600 Years before Galileo, Al-Baruni Wrote that the earth rotation on its axis. Unlike Galileo, his ideas were accepted by Religious Scholars

Buku ini merupakan output dari pengkajian dan pendalaman kebutuhan bahan kajian mata kuliah Geometri Analitik Bidang. Dalam penyusunannya, penulis mengintegrasikan pembelajaran, penugasan dan hasil penelitian. Buku ini diharapkan dapat berkontribusi dalam membentuk kemampuan berpikir praktis, analitis, skeptis, kritis, dan sistematis bagi para pengguna.

Buku Geometri Analitik Bidang ini tersusun atas 9 bab yang memadukan pemaparan konsep secara teoritis, pembentukan persamaan-persamaan dalam irisan kerucut, dan penyelesaian contoh soal secara procedural. Buku ini juga didukung oleh pemanfaatan Aplikasi GeoGebra di dalam mengeksplorasi perpaduan geometri dan aljabar. Dalam rangka meningkatkan keampuan pengguna dalam sajian-sajian materi yang diberikan, setiap bab disertai dengan latihan soal yang menghendaki kemampuan pengguna dalam memahami konsep, dan menggunakannya dalam penyelesaian yang bersifat prosedural.

Adapun judul dari buku ini : Geometri Analitik Bidang : Integrasi teori, Komputasi GeoGebra dan Budaya Lokal. Susunan bab dalam buku ini disusun secara sistematis, yang tersusun atas :

- Pendahuluan
- Sistem Koordinat Kartesius
- Titik, Garis, dan Bidang
- Lingkaran
- Parabola
- Elips
- Hiperbola
- Persamaan Parametrik
- Irisan Kerucut dalam Tinjauan Budaya Lokal

IAIN PAREPARE NUSANTARA PRESS

ISBN 978-623-6622-04-9

Zulfiqar Busrah GEOMETRI ANALITIK BIDANG Editor : Abdul Wahab

GEOMETRI ANALITIK BIDANG

INTEGRASI TEORI, KOMPUTASI GEOGEBRA DAN BUDAYA LOKAL

Penulis :
Zulfiqar Busrah
Buhaerah

2021

GEOMETRI ANALITIK BIDANG
(Integrasi Teori, Komputasi Geogebra dan Budaya Lokal)

Penulis : Zulfiqar Busrah,
Buhaerah.

Editor : Abdul Wahab & Gusniwati
Desain Cover : Agsar
Layout : Zulfiqar Busrah & Abdul Wahab

Cetakan: Pertama, Desember 2021

Diterbitkan Oleh

IAIN PAREPARE NUSANTARA PRESS
LPPM IAIN PAREPARE, JI. AmalBakti No. 8 Parepare,
Sulawesi-Selatan
Website: iainpare.ac.id
Tlp. (0421) 21307 Fax. (0421) 24404

Cet. 1— Parepare**, 2021**
ix, 230 hlm; 5.83” x 8.27”
ISBN : 978-623-6622-04-9

GEOMETRI ANALITIK BIDANG : Integrasi Teori, Komputasi Geogebra dan Budaya Lokal

7 alasan mengapa pembelajar geometri analitik bidang, disarankan menggunakan buku ini :

1. Dalam buku ini menggunakan bahasa yang mudah dipahami dan setiap pembahasan mencoba untuk menyajikan hubungan antara materi antar sub bab dan materi antar BAB sehingga penyajiannnya berkesinambungan.
2. Gambaran struktur materi dalam buku ini telah dideskripsikan secara jelas pada bab awal, sehingga memudahkan pembaca untuk memahami deskripsi materi secara komprehensif.
3. Pada buku lain, biasanya penyajian persamaan ataupun dalam penggunaannya tidak disajikan secara detail dengan pertiimbangan memberi kesempatan kepada pembaca untuk mengeksplorasi kemampuannya. Namun dalam buku ini pembentukan setiap persamaan atau rumusan diuraikan secara detail baik dari segi langkah-langkahnya maupun keterangannya. Hal ini mempertimbangkan bahwa pengguna dapat merasakan keistimewaan dari setiap interpretasi yang ada pada pebentukan rumusan.
4. Pada buku ini dilengkapi contoh soal, lengkap dengan pembahasan secara detail, diharapkan mampu membantu pembaca menguraikan proses proses penyelesaian masalah secara prosedural.
5. Buku ini juga menyertakan latihan-latihan soal yang representatif setiap sub-sub Babnya meliputi soal yang berkaitan dengan pemahaman konsep dan penyelesaian soal secara prosedural.
6. Gambar-gambar yang ditampilkan, didominasi oleh gambar-gambar yang langsung dibuat dalam aplikasi GeoGebra, dengan ini pembaca dapat menguji kembali setiap gambar-gambar bidang yang dimunculkan melalui penguunaan GeoGebra.
7. Di bab terakhir dilengkapi dengan eksplorasi etnomatematika yang merupakan hasil riset yang mengintegrasikan konsep-konsep pada irisan kerucut dengan kearifan lokal yang terdapat di masyarakat Bugis. Dengan ini ada kesempatan bagi para pembaca atau pengguna buku ini, mengembangkan penelitian mengenai etnomatematika yang memadukan pembelajaran geometri analitik bidang dengan unsur-unsur budaya lokal.

Buku Kedua ini saya dedikasikan untuk seluruh pejuang-pejuang pengetahuan. Para petarung yang berbudidaya kebijaksanaan di tengah tengah belantara Pengetahuan. Tak mengenal lelah, tak mengenal sepi, berjalan menanjak menebar manfaat tanpa pamrih.

Masih banyak disekitar kita, yang memilih diam dalam berkarya. Terima kasih pada apa saja yang telah mengisnpirasi!!

DAFTAR ISI

PRAKATA

Assalamualaikum. Wr.Wb.

Allahmdulillahi Rabbil Alamin, Puji Syukur ke Hadirat Allah SWT. Tuhan Semesta Alam. Tidak ada *ilah* selain Allah semata, dan tidak ada sekutu bagi-Nya. Atas limpahan Berkat, Rahmat dan Hidayah-Nya kepada kita semua. Siapa yang Dia beri petunjuk, tidak ada yang dapat menyesatkannnya, dan siapa yang Dia sesatkan tidak ada yang dapat memberinya petunjuk. Salam dan Sholawat, senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW., sebagai *Uswatun Hasanah* , Suri Tauladan bagi umat manusia. Semoga kita semua mendapat *Syafaat* dari beliau di hari kemudian.

Buku Geometri Analitik Bidang : Integrasi Teori, Komputasi Geogebra dan Budaya Lokal, Alhamdulillah telah terselesaikan**.** Buku ini disusun sebagai buku panduan dalam kegiatan perkuliahan Geometri Analitik Bdang. Kehadiran buku ini merupakan output dari perkuliahan Geometri analitik Bidang yang disusun atas kerjasama Mahasiswa dan dosen. Sangat diharapkan mampu memberikan stimulus bagi mahasiswa di bidang Pendidikan Matematika dalam meningkatkan pemahaman teoritis, keterampilan teknis komputasi GeoGebra dan wawasan Budaya lokal pada bidang Geometri. Lebih khusus lagi diharapkan bahwa dengan dimilikinya buku ini dapat membuka jalan bagi para pengguna untuk mengintegrasikan kemampuan komputasi dan kearifan lokalnya dalam rangka peningkatan daya saing di era industri 4.0.

Penyusunan buku ini dapat terselesaikan atas bantuan dari berbagai pihak, dengan ini penulis mengucapkan Terima kasih yang setinggi-tingginya kepada seluruh pihak yang telah memberi dukungan kepada penulis. Terkhusus kepada Bapak Ketua Program Studi Tadris Matematika Bapak Dr. Buhaerah dan Dekan fakultas Tarbiyah Bapak Dr. Saepudin, M.Pd. dan yang telah memberikan ruang bagi penulis untuk melaksanakan kegiatan penulisan buku. Tak lupa pula, ucapan terima kasih kepada Pimpinan IAIN Parepare, dalam hal ini Bapak Dr. Ahmad Sultra Rustan selaku Rektor IAIN Parepare yang selalu mendorong sivitas akademika beserta dukungan moril dan kebijakan dalam peningkatan mutu dosen di Lingkungan IAIN Parepare.

Penulis sangat menyadari bahwa penyusunan Buku ini masih sangat jauh dari kata sempurna, di dalamnya masih terdapat sejumlah kekurangan, sebab kesempurnaan itu sejatinya hanya milik Allah SWT., namun dengan tangan terbuka dan hati yang ikhlas, penulis sangat mengharapkan masukan bahkan kritikan yang produktif untuk tujuan dengan segala kebaikan bersama secara umum, dan untuk pembenahan isi dari Buku ini secara khusus.

Sebagai Penutup, penulis mengucapkan salam kebajikan kepada para pengguna buku ini. Semoga kita semua selalu dalam petunjuk-Nya menjadi sebaik baiknya pencinta ilmu dan kebijaksanaan semata mata untuk membuka jalan ibadah dan kebaikan bagi kita semua.

WassalamuAlaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Parepare, November 2021

Penulis

BAB I. PENDAHULUAN

Kemampuan akhir yang diharapkan

- Mampu menuliskan kembali perkembangan pembelajaran geometri dalam lingkungan belajar formal
- Memahami deskripsi, tujuan, dan arah atau ruang lingkup pembelajaran geometri analitik bidang.
- Merancang peta konsep pembelajaran geometri analitik bidang
- Menceritakan sejarah geometri pada peradaban Mesir Kuno, Yunani Kuno dan Peradaban Islam beserta dengan tokoh dan pemikiran-pemikirannya yang berkontribusi dalam matematika dan geometri.
- Mengurai hubungan dasar geometri analitik masing-masing terhadap kalkulus, aljabar dan komputasi geometri.
- Mengenal Ilmuwan Muslim dan temuan-temuan nya dalam bidang geometri
- Mengeksplorasi geogebra

1. A. REFLEKSI BERGEOMETRI

Aktivitas bermatematika di dalam kehidupan sehari-hari membentuk pengalaman belajar baik melalui kegiatan belajar formal maupun melalui kegiatan yang non-formal. Pada setiap jenjang pendidikan yang dilalui, pembelajaran matematika memberikan pengalaman-pengalaman khusus dan mempengaruhi pembentukan cara berpikir pada tingkatan yang berbeda-beda. Sebagai contoh, pembelajaran dalam bidang geometri bagi Anak Usia Dini (AUD) diperkenalkan melalui bentuk-bentuk mainan maupun bentuk-bentuk benda yang ada di lingkungan sekitarnya tanpa harus menuntut anak untuk menghitung panjang, luas ataupun volume. Demikian halnya dengan siswa yang telah berada pada tingkatan Sekolah Dasar, pembelajaran geometri di sekolah dasar, dieksplorasi melalui pengenalan bidang datar dan bangun ruang. Pembelajaran geometri bidang datar dan bidang ruang di sekolah dasar, selain pengenalan bentuk tahap ini juga telah menghendaki siswa untuk mampu menyebutkan dan menggunakan unsur-unsur yang ada pada bidang seperti sisi, panjang, lebar, tinggi, titik sudut, dan permukaan, sedangkan pada pembelajaran bangun ruang diperkenalkanlah nama, unsur-unsur, dan perhitungan volumenya. Kemampuan siswa juga diasah dengan menghadapkannya pada masalah-masalah penyelesaian soal cerita.

Pengetahuan-pengetahuan ilmu ukur pada tingkat sekolah dasar membekali siswa untuk menikmati pembelajaran geometri di tingkat Sekolah Menengah Pertama (SMP).

Jika kita mengingat kembali aktivitas pembelajaran geometri yang ada pada tingkat SMP, maka akan terasa lebih menantang dari sebelumnya. Pada tingkatan ini, mulailah diperkenalkan persamaan garis, gradien yang dapat divisualisasikan melalui sistem koordinat. Pada tingkat ini pula, mulailah diperkenalkan unsur-unsur lain pada lingkaran seperti tali busur, luas juring, melalui perhitungan yang mengkombinasikan antara perbandingan sudut, jari-jari dan diameter lingkaran. Pendalaman sistem koordinat juga dipelajari pada topik Geometri Transformasi yang meliputi refleksi, translasi, dilatasi dan rotasi baik pada garis maupun bidang. Pada tingkat SMP pula istilah garis menyinggung lingkaran secara berjenjang diperkenalkan.

Selanjutnya pembelajaran geometri pada tingkat Sekolah Menengah Atas (SMA), menghendaki pemahaman yang komprehensif siswa pada materi ajar matematika di tingkat SMP. Pada tingkat SMA inlah, bagaimana pembelajaran geometri bidang dan ruang mulai diperkenalkan secara lebih kompleks dengan mengkombinasikan unsur sudut, konsep-konsep trigonometri, dan konsep-konsep kesebangunan. Melalui pokok-pokok bahasan yang ada mulai dari tingkat SD, SMP hingga SMA mestilah dipandang sebagai pengalaman belajar yang berkelanjutan. Pengalaman bermatematika harus mampu dipetakan sedemikian rupa, agar asal dan arah kedatangannya dapat dihubungkan satu sama lain, dengan ini dapat membantu kita dalam memahami arah dan proses dari seluruh tingkatan tujuan pembelajaran.

Tumpukan pakaian di dalam lemari akan menyulitkan penggunanya dalam memilih mana pakaian untuk beribadah, yang mana pakaian untuk bermain, yang mana pakaian untuk acara santai, untuk acara formal, yang mana pakaian untuk kerja, dan yang mana pakaian yang sudah tidak layak pakai, apabila tidak ditata sesuai dengan karakteristiknya dan tidak digunakan sesuai peruntukannya. Kelayakan-kelayakannya satu sama lain dapat saling memenuhi pada batas-batas tertentu. Demikian adanya dengan pengetahuan dan pengalaman-pengalaman belajar yang ada di kepala, butuh untuk diorganisir dan dipergunakan sebagaimana mestinya

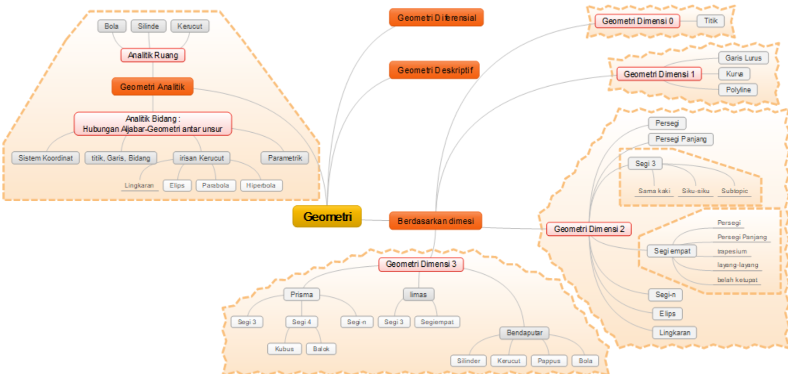
---

1. B. KEDUDUKAN GEOMETRI ANALITIK DENGAN MATA KULIAH DASAR

Secara umum, kompleksitas dalam pembelajaran matematika tidak terlepas dari adanya beragam cabang ilmu di dalamnya yang disajikan secara abstrak. Dengan kompleksitas ini, cabang-cabang dari ilmu matematika harus dipahami secara berkesinambungan dan berkelanjutan sehingga arah pembelajaran menjadi jelas, terstruktur, sistematis dan komprehensif. Khususnya dalam Geometri Analitik Bidang (GAB), maka penting untuk dilakukan pemetaan secara jelas hubungan antara materi-materi pendukung seperti Kalkulus, Aljabar dan Komputasi Geometris.

Geometri sendiri sebagai cabang ilmu matematika yang secara etimologi dipandang sebagai ilmu ukur berkaitan atas pertanyaan mengenai bentuk fisik, ukuran, kedudukan, dan ruang tidak hanya secara konseptual namun juga secara kontekstual. Integrasi antara konsep juga tidak terlepas dari hubungan geometri dengan cabang ilmu matematika lainnya. Hubungan antara geometri dengan kalkulus, aljabar dan komputasi geometris yang dimaksudkan untuk melihat kesinambungan antara cabang matematika yang telah dikaji mendalam dalam mata kuliah dasar sebelumnya. Oleh karena itu, pembahasan dalam buku ini akan diawali dengan menguraikan hubungan antara Geometri dengan Kalkulus, Aljabar dan Komputasi matematika.

Ruang lingkup geometri yang begitu luas, dapat diklasifikasikan ke dalam cabang-cabang khusus :



Adanya kecendrungan bagi mahasiswa melihat mata kuliah yang ada sebagai subjek subjek yang saling terpisah. Pemahaman mengenai keterpaduan dan kesinambungan materi amatlah penting untuk dijadikan sebagai dasar dalam memulai satu kajian baru.

❖ Kalkulus

Salah satu mata kuliah yang menjadi fondasi awal terhadap konstruksi materi geometri analitik bidang adalah **Kalkulus**. Dalam konteks geometri analitik bidang, kalkulus telah membekali pemahaman konsep **sistem bilangan** dan **sistem koordinat**, penyelesaian **persamaan** dan **pertidaksamaan** serta pemahaman tentang konsep **relasi** dan **fungsi**. Berikut penguraian kontribusi kalkulus dalam pembelajaran geometri analitik bidang.

1. **Keterpaduan sistem bilangan real dan sistem koordinat** menjadi wadah dalam mengilustrasikan dan menvisualisasikan konsep konsep geometris seperti konsep titik, garis dan bidang, khususnya dalam ruang berdimensi dua.
2. **Dalam geometri analitik bidang kita akan menjumpai berbagai jenis persamaan standar dan tak standar** yang secara bersamaan merepresentasikan objek-objek geometris tertentu. Selanjutnya kajian tentang pertidaksamaan dalam kalkulus memberikan kita referensi dalam melihat kedudukan objek-objek geometris tertentu terhadap objek geometris lain.
3. Selain itu, **kalkulus juga telah membekali kita tentang konsep relasi dan fungsi**. Relasi yang dinyatakan sebagai suatu aturan yang memetakan anggota-anggota dari himpunan tertentu yang dikenal dengan himpunan daerah asal ke dalam anggota-anggota himpunan lain yang dikenal dengan daerah hasil. Sedangkan fungsi, secara spesifik sebagai bagian relasi yang memetakan setiap anggota daerah asal (Domain) tepat ke satu anggota himpunan daerah hasil (Range). Relasi dan fungsi menjadi dasar penyajian suatu persamaan ke dalam grafik pada sistem koordinat, ataupun sebaliknya dengan parameter parameter tertentu.
4. **Kajian aplikasi turunan** juga sangat erat kaitannya dalam geometri analitik bidang. Pendalaman fungsi dalam aplikasi turunan yang mengkaji tentang titik kritis, nilai ekstrim, titik maksimum, titik minimum ataupun titik belok, serta kemonotonan dan kecekungan suatu fungsi yang divisualisasikan dalam suatu grafik menjadi parameter-parameter tertentu dalam objek-objek irisan kerucut.
5. Secara khusus pada buku Kalkulus Purcel dkk. pada bab 10, diuraikan materi **irisan kerucut dan representasi parametrik** dari suatu kurva pada bidang bersama dengan koordinat polar. Topik persamaan parametrik juga akan kembali disajikan pada buku ini di bab 8.

❖ Aljabar

Selain kalkulus, **Aljabar** juga merupakan salah satu prasyarat dalam mata kuliah geometri analitik bidang. Dalam geometri analitik bidang, telaah aljabar diterapkan dalam mengoperasikan titik titik koordinat. Sebagai cabang ilmu dari matematika, aljabar menjadi dasar dalam kajian penggunaan simbol-simbol matematis dan seperangkat aturan yang dimanipulasi untuk melihat hubungan antar simbol.

Seperti halnya, simbol yang mewakili operator dasar aritmatika $(+,-,\times,/,\div)$, dan simbol operator relasional dasar $(=,\neq,\leq,\geq)$dalam menghubungkan sifat antar simbol lain misal penggunaan huruf untuk mewakili angka, memungkinkan adanya keumuman sifat tanpa memperhatikan angka-angka yang digunakan. Hal ini, umum dikenal sebagai persamaan atau pertidaksamaan.

Kajian aljabar dalam geometri dapat ditemukan dalam beberapa sub pokok bahasan diantaranya :

1. Penentuan **jarak** antar dua titik menggunakan konsep panjang **vektor**, demikian halnya dengan panjang suatu segmen garis.
2. Dalam penggambaran grafik pada suatu sistem koordinat, melibatkan atau merepresentasikan suatu **persamaan.** Dengan ini kita dapat melihat kajian geometri lebih komprehensif yaitu dengan mengintegrasikan konsep konsep aljabar dengan grafik.
3. Kontribusi aljabar dalam geometri analitik bidang ini, dapat kita jumpai dalam mengkontruksi garis, bidang dan irisan-irisan kerucut. Melalui definisi dan representasi geometrisnya, maka kita dapat mengkonstruksi representasi aljabarnya dengan mudah.
4. Pada buku ini, irisan kerucut berupa lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola, pengkajiannya tidak hanya dilakukan pada aspek grafiknya saja, namun juka akan ditekankan pada aspek aljabarnya, dan sejumlah pengkajian analitis untuk membuktikan ataupun menunjukkan suatu persamaan tertentu.
5. Sedangkan, kajian pertidaksamaan akan kita jumpai pada penentuan kedudukan titik, garis dan bidang satu sama lain.

❖ Komputasi Geometri

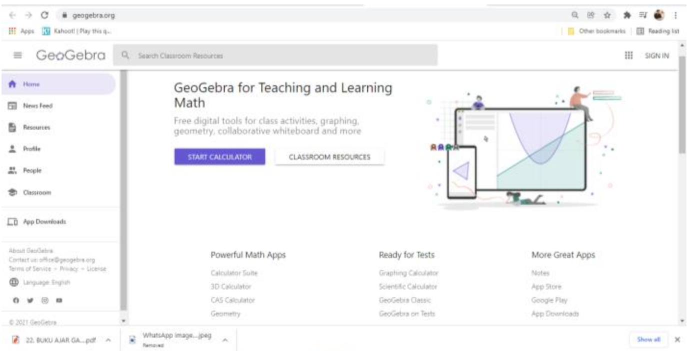
Adapun perangkat lunak yang dipilih pada buku ini yaitu *geogebra* menunjukkan bagaimana peran aljabar terhadap geometri khususnya geometri analitik bidang. ***GeoGebra*** sebagai perangkat lunak dari namanya tidak lain merupakan gabungan dua cabang ilmu matematika yaitu geometri dan algebra. Secara jelas, ruang kerja *geogebra* memadukan secara visual antara ruang kerja algebra dan ruang kerja grafik. Ruang kerja *algebra* digunakan dalam pengolahan persamaan, sedangkan ruang kerja grafik digunakan dalam pengolahan representasi geometris atau grafik. Dari kedua ruang kerja memberikan kita pemahaman bahwa geometri dan aljabar adalah dua cabang ilmu yang tidak dapat dipisahkan. Peran ***Geogebra*** dalam buku ini sangatlah vital, di mana pada setiap sub pokok bahasan, ataupun pada setiap yang melibatkan gambar-gambar grafik diperoleh dari penggunaan geogebra.

Dengan adanya aplikasi geogebra ini, dapat membantu dalam proses penyususnan buku ini, dan juga dapat pula secara langsung digunakan untuk mengeksplorasi hubungan-hubungan antara aljabar dan geometri beserta pengembangannya. Terkhusus untuk irisan kerucut, aplikasi geogebra digunakan untuk menerjemahkan secara visual definisi definsi setiap jenis bidang. Selain itu, juga dalam melihat hubungan antara irisan irisan kerucut dengan titik dan garis dapat dilihat secara komprehensif melalui aplikasi ***GeoGebra*.**

Geogebra adalah softwere matematika dinamis yang dapat digunakan sebagai alat bantu dalam pembelajaran matematika. Softwere ini dikembangkan untuk proses belajar mengajar matematika di sekolah oleh Markus Hohenwarter di Universitas Florida Atlantic[1]. Bila diamati paling tidak ada 3 kegunaan geogebra, yaitu sebagai:

1) Media pembelajaran matematika.
2) Alat bantu membuat bahan ajar matematika.
3) Menyelesaikan soal matematika.
4) Membangun sistem belajar dan sisem penugasan yang interaktif

Berikut halaman utama jika ingin mengakses

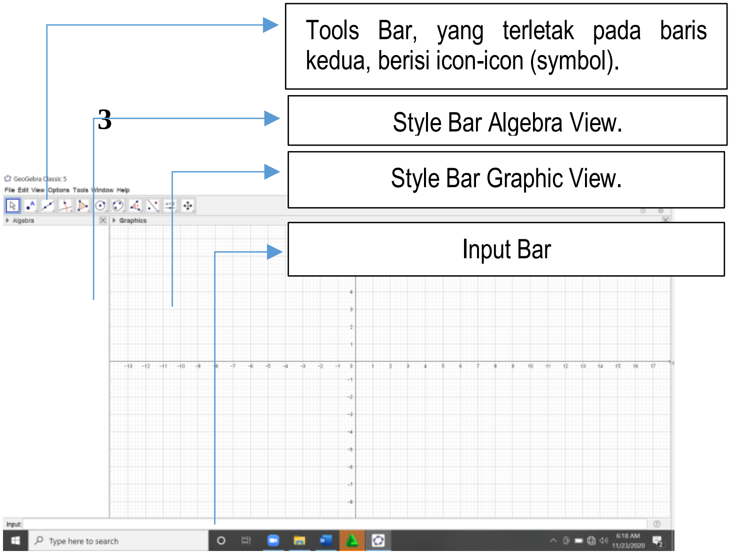


Gambar 1. 1. Tampilan utama GeoGebra di https://www.geogebra.org/

[1] Markus Hohenwarter and Keith Jones, 'Ways of Linking Geometry and Algebra, the Case of Geogebra', *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27.3 (2007), 126–31.

Salah satu versi GeoGebra yang dapat diakses dalam halaman utama GeoGebra ialah GeoGebra Classic 5. Berikut tampilan GeoGebra Classic 5 setelah melalui proses instalasi.

Tampilan dari geogebra sangat sederhana, yang terdiri dari:



Gambar 1. 2. Interface Utama Geogebra Classic 5

1. C. SEJARAH GEOMETRI

Perkembangan geometri tidak terlepas dari kebudayaan kebudayaan kuno, yang memadukan konteks sosial-budaya dan matematika itu sendiri. Dalam mengenal histori dari geometri, maka perhatian kita tidak terlepas dari tiga peradaban besar dalam sejarah yaitu peradaban Mesir Kuno, Yunani Kuno dan Islam yang berkontribusi dalam pengembangan konsep geometri. Pemikir-pemikir yang akan dijelaskan pada bagian ini, adalah pemikir-pemikir yang berkontribusi di dalam perkembangan ilmu geometri dan dalam berbagai terapannya.

❖ Peradaban Mesir (5000 SM – 500 SM)

Matematika pada peradaban Mesir kuno dapat ditelusuri jejak jejaknya melalui artefak *Papiruys Rhind*. Artefak tersebut memberikan indikasi bahwa pada masa peradaban Mesir Kuno Matematika telah berkembang pesat. Secara khusus, perkembangan geometri mengikuti corak peradaban masyarakat lembah Indus dan Babilonia. Corak sosial ekonomi, pada peradaban Mesir Kuno ditandai oleh keahlian drainase rawa, irigasi dan konstruksi bangunan-bangunan megah. Geometri pada mesir Kuno didominasi oleh pengukuran panjang segmen Garis, perhitungan Luas dan Volume. Kontribusi besar pada peradaban Mesir Kuno dapat dilihat dari Pembangunan Piramida raksasa yang dikenal dengan *Piramida Joser* dan diarsiteki oleh *Imhotep*. Dalam menyusun Piramid, Imhotep menemukan cara penyusunan batu dari tanah liat berbentuk balok dengan sisi yang miring dikenal sebagai *Mastaba* secara seimbang mulai dari yang terbesar ke yang terkecil.

Geometri pada peradaban Mesir kuno dapat ditemukan pada sebuah naskah kuno yang berisi catatan matematika dari budaya Mesir kuno yang ditulis diatas lembaran papirus, sehingga naskah tersebut dikena sebagai *Papiruys Rhind* sebagai dokumen sekaligus bukti sejarah kemajuan matematika Mesir Kuno.

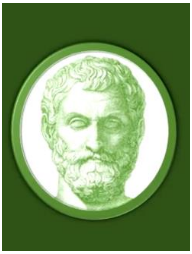
Gambar 1. 3. Papyrus Rhind

❖ Peradaban Yunani Kuno

Hellas atau ***Ellada*** sebagaimana orang Yunanai menyebut negara mereka merupakan suatu negara kepulauan di laut Mediterania. Perkembangan ilmu pengetahuan yang ada saat ini, mendapat pengaruh yang sangat vital dalam peradaban Yunani Kuno. Berdasarkan penelitian ***Capplesston***, dikatakan bahwa perkembangan ilmu matematika di Yunani sangat dipengaruhi oleh ilmu matematika yang lebih dahulu berkembang di Mesir. Meskipun demikian perkembangan pesat ilmu matematika khususnsnya geometri ilmiah, bukan terjadi di Mesir tapi berkembang pesat di Yunani oleh sejumlah nama besar yang kita sering jumpai dalam ilmu filsafat. Berikut beberapa nama nama besar dan lebih dikenal sebagai filsuf yang berasal dari Yunani disertai dengan gagasan matematika ataupun secara jkhusus buah pemikirannya dalam bidang geometri.

Tokoh 1. Thales (624 BC – 546 BC)

Thales dikenal sebagai bapak filsafat dan masuk ke dalam golongan *Seven Wise Men of Grece* dalam buku Phytagoras yang ditulis oleh Socrates. Pemikiran Thales juga dapat dijumpai pada tulisan-tulisan Aristoteles, dalam buku yang dituliskan Aristoteles. Thales berkembang dalam fondasi **Tradisi Filsafat Nonian**. Gagasan Filsafat utama Thales, yakni dengan memandang bahwa segala aspek yang berkaitan dengan kehidupan, air merupakan prinsip dasarnya. Dengan ini Thales dianggap sebagai inisiator dari Filsafat Alam.



Gambar 1. 4. Thales

Thales adalah pemikir pertama dalam sejarah filsafat barat yang mencoba menganalsis gejala alam tanpa menghubungkannnya dengan mitos dewa-dewa, namun pembacaannya terhadap alam menggunakan pendekatan ilmiah modern. Thales dengan kemampuan matematisnya dapat mempelopori pengukuran tinggi piramid menggunakan pendekatan kesebangunan antara tinggi dan panjang bayangan tubuh Thales dengan tinggi dan panjang bayangan piramid.

Di dalam buku yang berjudul *A History of Greek Phylosophy* yang dituliskan oleh Guthire (1985) menguraikan kumpulan khasanah keilmuan dari para filsuf. Thales merupakan Filsuf pembuka yang diulas mengenai Biografi Thales, keluarga, pandangan filsafat dan kumpulan gagasan Matematikanya[2]. Gagasan matematika yang cukup dikenal yaitu, menegnai konsep kesebangunan, dan beberapa teorema yang digagas oleh Thales diantaranya :

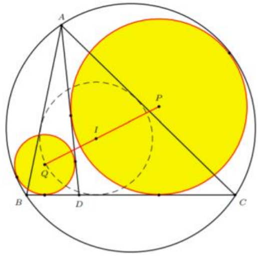
1. Sebuah lingkaran terbagi dua sama besar oleh diameternya
2. Sudut Bagian Dasar dari sebuah segitiga samakaki adalah sama besar.
3. Jika ada dua garis lurus bersilangan, maka besar kedua sudut yang saling berlawanan akan sama

[2] Rosamond Kent Sprague and W. K. C. Guthrie, ‘A History of Greek Philosophy. Vol. I: The Earlier Presocratics and the Pythagoreans’, *The Classical World*, 1963, 182 <https://doi.org/10.2307/4345078>.

4. Sudut yang terdapat dalam setengah lingkaran adalah sudut siku-siku.
5. Sebuah segitiga terbentuk bila bagian dasarnya serta sudut-sudut yang bersinggungan dengan dasar tersebut telah ditentukan.

Sebagai Latihan, coba rekakan secara langsung ilustrasi geometris yang dikemukakan dalam thales dalam Teoremanya !

Dalam pengembangan ilmu geometri, konsep geometri sederhana yang digagas oleh Thales sebagai konsep kesebangunan dan teorema Thales dapat digunakan dalam membuktikan keistimewaan garis-garis segitiga di dalam lingkaran dengan apa yang dikenal sebagai kolinearitas titik pusat lingkaran pada teorema *Sawayama-Thebault.* Garis bagi dan garis sumbu sebagai garis istimewa memiliki titik kongkuren, demikian dengan kolinearitas titik *incenter, excenter dan circumcenter*[3].



Gambar 1. 5. Konsep kekolinearitas Sawayama-Thebault

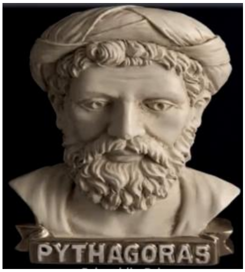
Tokoh 2. Pythagoras

Setelah Thales, ilmuwan Yunani berikutnya memiliki kontribusi yang besar dalam perkembangan Geometri adalah Pythagoras (582 SM – 507 SM). Pythagoras sendiri memiliki *tareqat* atau aliran berfikir tersendiri yang di kenal dengan Pythagorean. Secara sosial-ekonomi, Pythagoras terlahir dari orang yang kaya, tumbuh dan besar dalam dalam lingkungan bisnis perdagangan permata. Pythagoras pada masa kecilnya, adalah pemburu ilmu dan dikenal senang berguru kemana-mana. Pythagoras pun pernah menjadi murid dari Thales dan Anaximander. Dari guru-gurunya ini, Pythagoras menyemai Khasanah matematika, dengan kemampuannya akhirnya Pythagoras dikenal sebagai Bapak Bilangan.

[3] Jean-louis Ayme, 'Sawayama and Th ´ Ebault ' s Theorem', 3 (2003), 225–29.

Gambar 1. 6. Pythagorian

Selain itu, pada akhir abad Ke-6 sebelum masehi, Pythagoras berkontribusi terhadap perkembangan ilmu Filsafat dan ajaran keagamaan. Dalam sejarahnya, istilah Filsafat pertama kali diperkenalkan oleh Pythagoras sebagai aktivitas mencari dan mencinta kebijaksanaan. Dengan pengalamannya berguru ke berbagai penjuru dunia seperti Mesir, India dan tempat lainnya, dengan ini Pythagoras mempunyai wawasan yang sangat luas.



Gambar 1. 7. Pythagoras

Dalam penjelajahan di sekitar umur 40 tahun, Pythagoras kembali ke tanah kelahirannya yaitu Kota Samos. Namun oleh gejolak politik di Yunani, Pythagoras berpindah ke kota Croton dan membentuk komunitas belajar. Dari sekolah inilah yang mengembangkan dan menyebarluaskan ajaran-ajaran aliran Phytagorean.

Kontribusinya terhadap matematika

Dalam sejarahnya , Pythagoras kecil yang hobby bermain sambil belajar pernah melakukan percobaan dalam menyusun batu batu kecil dalam susunan yang menyerupai bentuk segitiga dengan jumlah yang beraturan dan membentuk urutan yang khas :

Selanjutnya dari hasil yang diperoleh Bilangan yang berdekatan membentuk jumlahan dengan bilangan yang khas. Dalam hal ini, setiap jumlahan dari hasil jumlahan yang berdekatan membentuk bilangan kuadrat.

$$
\begin{array}{rl}
1 = 1 & 1 + 0 = 1\ (1 \times 1) \\
1 + 2 = 3 & 1 + 3 = 4\ (2 \times 2) \\
1 + 2 + 3 = 6 & 3 + 6 = 9\ (3 \times 3) \\
1 + 2 + 3 + 4 = 10 & 6 + 10 = 16\ (4 \times 4) \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 & 10 + 15 = 25\ (5 \times 5) \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 & 15 + 21 = 36\ (6 \times 6) \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 & 21 + 28 = 49\ (7 \times 7) \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 & 28 + 36 = 64\ (8 \times 8) \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 & 36 + 45 = 81\ (9 \times 9) \\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 & 45 + 55 = 100\ (10 \times 10)
\end{array}
$$

Dari susunan bilangan kembar inilah memberikan inspirasi Pythagoras dalam merumuskan Teoremanya yang sangat Mahsyur dalam dunia geometri yakni

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{(I.1)}$$

Pythagoras mempunyai peran penting dalam perkembangan matematika. Pythagoras mendapat penghargaan dan namanya dipakai untuk menamai perhitungan relasi antar segitiga siku-siku. Pythagoras mendapat penghargaan tersebut karena beliau dianggap sebagai orang yang membawa pengetahuan tersebut ke peradapan Yunani yang selanjutnya menjadi pusat ilmu pengetahuan pada zamannya.

Dalam perkembangan matematika teorema Pythagoras juga masih di tetap diajarkan di sekolah dan digunakan untuk menghitung jarak suatu sisi segitiga. Manfaat penemuan Pythagoras kelak akan membuat matematika tetap dapat digunakan sebagai alat bantu dalam melakukan perhitungan terhadap pengamatan fenomena alam. Temuan Tteorema Phytagoras ini, menjadi tonggak awal dalam perkembangan ilmu geometri. Sebagaimana ruang Euclids dalam geometri Euclides tidak terlepas dari teorema Pythagoras [4]. Berbagai penelitian telah dikembangkan dengan menggunakan konsep dasar teorema phytagoras, salah satunya adalah Louis Teia yang mengulas tenatang teorema phytagoras pada ruang Dimensi [5].

Tokoh 3. Euclide (325 – 265 SM)

Selepas dari meninggalnya Phytagoras, lahirlah matematikawan yang bernama Euclide. Dalam berbagai sumber, Euclide diperkirakan mengembangkan kemampuannya pada Akademi Plato. Kemahsyuran yang didapatkan oleh Euclide sebagai ahli ilmu ukur berlangsung cukup lama.

[4] Nunuk Sulistyanigrum Suprapto, 'Nilai Islam Dalam Theorema Phytagoras', *Jurnal Pendidikan Matematika*, 2.2 (2019) <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.21043/jpm.v2i2.6360>.

[5] Luis Teia, 'Geometry of the 3D Pythagoras' Theorem', *Journal of Mathematics Research*, 8.6 (2016), 78 <https://doi.org/10.5539/jmr.v8n6p78>.

Gambar 1. 8. Euclides

Meski dia menulis beberapa buku dan diantaranya masih ada yang tertinggal, kedudukannya dalam sejarah terutama terletak pada bukunya yang hebat mengenai ilmu ukur yang bernama **The Elements**. Karya ini menjadi referensi utama dalam pembelajaran geometri di sekolah maupun kampus di Britania Raya. Dalam The Elements, Euclid menggabungkan pekerjaan disekolah yang telah ia ketahui dengan semua pengetahuan matematika yang ia ketahui dalam suatu perbandingan yang sistematis hingga menjadi sebuah hasil yang menakjubkan. Kebanyakan dari pekerjaannya itu bersifat *original*, sebagai metode deduktif ia mendemonstrasikan sebagian besar pengetahuan yang diperlukan melalui penalaran. Dalam Element Euclid pun menjelaskan aljabar dan teori bilangan sebaik ia menjelaskan geometri.

Arti penting buku ***The Elements*** tidaklah terletak pada pernyataan rumus-rumus pribadi yang dilontarkannya. Hampir semua teori yang terdapat dalam buku itu sudah pernah ditulis orang sebelumnya, dan juga sudah dapat dibuktikan kebenarannya. Sumbangan Euclid terletak pada cara pengaturan dari bahan-bahan dan permasalahan serta formulasinya secara menyeluruh dalam perencanaan penyusunan buku. Di sini tersangkut, yang paling utama, pemilihan dalil-dalil serta perhitungan-perhitungannya, misalnya tentang kemungkinan menarik garis lurus diantara dua titik.

Sesudah itu dengan cermat dan hati-hati dia mengatur dalil sehingga mudah difahami oleh orang-orang sesudahnya. Bilamana perlu, dia menyediakan petunjuk cara pemecahan hal-hal yang belum terpecahkan dan mengembangkan percobaan-percobaan terhadap permasalahan yang terlewatkan. Perlu dicatat bahwa buku The Elements selain terutama merupakan pengembangan dari bidang geometri yang ketat, juga di samping itu mengandung bagian-bagian soal aljabar yang luas berikut teori penjumlahan.

Buku ***The Elements*** sudah merupakan buku pegangan baku lebih dari 2000 tahun dan merupakan buku yang paling sukses yang pernah disusun manusia. Begitu hebatnya Euclid menyusun bukunya sehingga dari bentuknya saja sudah mampu menyingkirkan buku yang pernah dibuat orang sebelumnya.

Sebagai alat pelatih logika pikiran manusia, buku The Elements jauh lebih berpengaruh ketimbang semua risalah Aristoteles tentang logika. Buku itu merupakan contoh yang komplit sekitar struktur deduktif dan sekaligus merupakan buah pikir yang menakjubkan dari semua hasil kreasi otak manusia. Adil jika kita mengatakan bahwa buku Euclid merupakan faktor penting bagi pertumbuhan ilmu pengetahuan modern. Ilmu pengetahuan bukanlah sekedar kumpulan dari pengamatan-pengamatan yang cermat dan bukan pula sekedar generalisasi yang tajam serta bijak. Hasil besar yang direnggut ilmu pengetahuan modern berasal dari kombinasi antara kerja penyelidikan empiris dan percobaan-percobaan di satu pihak, dengan analisa hati-hati dan kesimpulan yang punya dasar kuat di lain pihak.

Pengaruh Euclid terhadap **Sir Isaac Newton** sangat terasa sekali, sejak Newton menulis buku yang terkenal dengan nama *The Principia* dalam bentuk kegeometrian, mirip dengan The Elements. Berbagai ilmuwan mencoba menyamakan diri dengan Euclid dengan jalan memperlihatkan bagaimana semua kesimpulan mereka secara logis berasal mula dari asumsi asli. Tak kecuali apa yang diperbuat oleh ahli matematika seperti Russel, Whitehead dan filosof Spinoza.

Kini, para ahli matematika sudah memaklumi bahwa geometri Euclid bukan satu-satunya sistem geometri yang memang jadi pegangan pokok dan teguh serta yang dapat direncanakan pula, mereka pun maklum bahwa selama 150 tahun terakhir banyak orang yang merumuskan geometri bukan ala Euclid. Sebenarnya, sejak teori relativitas Einstein diterima orang, para ilmuwan menyadari bahwa geometri Euclid tidaklah selamanya benar dalam penerapan masalah cakrawala yang sesungguhnya.

Pada kedekatan sekitar "Lubang hitam" dan bintang neutron misalnya dimana gaya berat berada dalam derajat tinggi, geometri Euclid tidak memberi gambaran yang teliti tentang dunia, ataupun tidak menunjukkan penjabaran yang tepat mengenai ruang angkasa secara keseluruhan. Tetapi, contoh-contoh ini langka, karena dalam banyak hal pekerjaan Euclid menyediakan kemungkinan perkiraan yang mendekati kenyataan. Kemajuan ilmu pengetahuan manusia belakangan ini tidak mengurangi baik hasil upaya intelektual Euclid maupun dari arti penting kedudukannya dalam sejarah.

Dalam hidupnya Euclide dikenal memiliki pribadi yang terbuka, jujur dan memiliki kepedulian pada sesama. The Elements sebagai salah satu Maha Karya dari Euclide sangatlah monumental. Karya tersebut membuatnya dijuluki guru matematika sepanjang masa dan matematikawaan terbesar Yunani.

Sebagai karya Euclides yang fenomenal, ***The Element*** tersusun atas 13 Tema atau topik yang menjadi dasar pengembangan ilmu Geometri, diantranya[6] :

Elements Book 1	*Fundamentals of Plane Geometri Involving Straight-Lines*
Elements Book 2	*Fundamentals of Geometric Algebra*
Elements Book 3	*Fundamentals of Plane geometry Involving Circles*
Elements Book 4	*Constructions of Rectilinear Figures In Around Circles*
Elements Book 5	*Proportion*
Elements Book 6	*Similar Figures*
Elements Book 7	*Elementary Number Theory*
Elements Book 8	*Continued Proportions*
Elements Book 9	*Applicatins of Number Theory*
Elements Book 10	*Incomennsurable Magnitudes*
Elements Book 11	*Elementary Stereometry*
Elements Book 12	*Proportional Stereometry*
Elements Book 13	*The Platonic Solids*

Karakteristik di setiap buku, secara terstruktur dan sistematis diawali dari difinisi, kemudian dilanjutkan denagn postulat, preposisi, theorema sebelum ditegaskan dalam rangkaian rangkaian pembuktian yang merujuk pada definisi dan postulat yang diberikan pada bagian awal.Pada tahun 1482, The Euclides diterjemahkan ke dalam bahasa Latin dan Arab. Selain utu pada Abad ke 18 buku ini menjadi buku teks utama yang menjadi rujukan dalam perkembangn ilmu geometri. Euclid dalam membangun konstruksi matematika membaginya ke dalam *postulat,* CN: *common notions (*Gagasan Umum) *, dan aksioma*[7]*.* Dari karya The Elements yang terdiri dari 13 Buku, terdapat 131 Definisi, 5 Postulat, 5 Notasi Umum, dan 465 Proposisi.

Postulat geometri yang digagas oleh Euclide tak lepas dari kritikan berkaitan dengan pembuktian diri. Salah satu postulat membawa konflik ide bagi matematikawan yaiu pada Postulat kelima. Beberapa matematikawan menganggap bahwa postulat kelima dibuktikan oleh Euclide tanpa disertai cara atau langkah-langkah pembuktian. Sebelum bermunculan kritikan dari para matematikawan, Girolamo Sacchery Pada tahun 1773, berupaya

[6] Richard Fitzpatrick, *Euclid's Elements of Geometry*, *Science*, 2007, IV <https://doi.org/10.1126/science.4.85.201>.
[7] Vincenzo De Risi, 'The Development of Euclidean Axiomatics: The Systems of Principles and the Foundations of Mathematics in Editions of the Elements in the Early Modern Age', *Archive for History of Exact Sciences*, 70.6 (2016), 591–676 <https://doi.org/10.1007/s00407-015-0173-9>.

memberi dukungankepada euclide dengan menerbitkan buku berjudul Euclides ab omni naevo vindicatus ("Euclid bebas dari semua kesalahan"). Beberapa matematikawan yang berupaya membuktikan postulat kelima Euclide diantranya Girolamo Saccheri, Gauss, Janos Bolyai dan Nicolai Lobachevsky.Buku tersebut tidak dapat menuntaskan kesalahan Euclid. Matematikawan selanjutnya atematikawan terkemuka Jerman, Gauss, pertama kali menemukan kesalahan postulat kelima tapi malu untuk mempublikasikannya sehingga kehormatan diberikan kepada dua matematikawan lain yang mengungkapkannya dengan cara penemuan Gauss. Janos Bolyai dari Hongaria dan Nicolai Lobachevsky secara terpisah mampu membuktikan cacat postulat kelima Euclid dengan cara berbeda pula.

Geometri Euclidean

Euclidean merupakan istilah aliran atau tarekat yang merpresentasikan pandangan Euclide dalam geometri. Meskipun demikian, apa yang telah dicetus oleh Euclid mendapatkan bantahan dan penemuan kesalahan yang membuat berkembangnya geometri model baru. Dirintis oleh Beltrami dari Italia, disusul Cayley dari Inggris, Poincare dari Perancis dan Felix Klein dari Jerman. Terakhir, dirombak, diubah dan dilakukan penyesesuai kecil terhadap postulat-postulat Euclid oleh [Bernhard] Riemann dari Jerman sehingga muncul bentuk-bentuk baru: hiperbola, parabola, ellips yang merupakan jawaban bahwa alam semesta bukanlah pengikut aliran Euclid (non-Euclidian). Selisih paham oleh Riemann terhadap Euclid, diantaranya yaitu mengenai konsep Jumlah Sudut dalam satu segitiga. Perbedaan dalam konsep kesejajaran garis juga memberikan perbedaan pandangan.

Apabila dahulu Euclid dipuja, sekarang keadaan berbalik. Banyak pengikutnya mulai "menyerang" Euclid dengan menyebut dia terlalu arogan dan memaksakan suatu pembuktian yang dibuatnya selalu benar, misalnya: salah satu sisi segitiga tidak akan lebih panjang daripada jumlah kedua sisi lainnya. Matematikawan modern mengkritik Euclid dari sudut pandang lain, yaitu: Euclid tidak cermat dalam melakukan pembuktian. Terdapat beberapa kesalahan dan ide-ide yang tidak dapat dipertanggungjawabkan. Yang paling mencolok adalah postulat kelima yang juga lazim disebut dengan postulat kesejajaran.

Para matematikawan berikutnya tidak dapat menerima pernyataan-pernyataan (postulat) yang tidak dapat dibuktikan itu. Kemudian, muncul geometri non-Euclidian yang menggantikan postulat-postulat itu dengan pernyataan yang dapat diterima umum.

Sumbangsih

Format yang dibuat Euclid membantu terjadi standarisasi matematika Yunani. Subyek-subyek yang dibahas oleh Euclid mencakup bentuk-bentuk, theorema Pythagoras, persamaan dalam aljabar, lingkaran, tangen, geometri ruang, teori proporsi, bilangan prima, bilangan sempurna, integer positif, bilangan irrasional, gambar tri-matra (tiga dimensi). Euclid meninggalkan warisan yang berguna bagi pengembangan matematika.

Kompilasi hasil-hasil karya matematikawan sebelumnya lewat buku Elements, menunjukkan "benang merah" bahwa pengembangan matematika tidak lepas dari peran pemikir Yunani. Kritik terhadap Euclid justru memicu munculnya non-Euclidian yang melengkapi bahasan Euclid. Bentuk parabola, hiperbola dan elips mulai mendapatkan perhatian dari para matematikawan. Sebagai perintis jejak ilmu geometri, Erhardus Radolt (1442-1528) mencetak untuk pertama kalinya buku **The Elements** dan mempublikasikannya pada Bulan Mei 1482.

https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-euclid-s-elementa-geometriae-printed-by-ratdolt

Gambar 1. 9. Euclide's Elementa Printed By Radolt

❖ Peradaban Islam

Tidak hanya pada peradaban Mesir Kuno dan Yunani Kuno, pada era kekhalifahan Islam para Ilmuwan Muslim juga berkontribusi dalam pengembanagn ilmu matematika lebih khusus bidang Geometri. Para matematikawan muslim juga menjadi simbol kejayaan pada era abad pertengahan.

Pencapaian peradaban Islam di era keemasan dalam bidang geometri sungguh sangat menakjubkan. Betapa tidak. Para peneliti di Amerika Serikat (AS) menemukan fakta bahwa di abad ke-15 M, para cendekiawan Muslim telah menggunakan pola geometris mirip kristal. Padahal, pakar matematika modern saja baru menemukan pla desain geometri itu pada abad ke-20 M.

Menurut studi yang diterbitkan dalam Jurnal Science itu, para matematikus Muslim di era keemasan telah memperlihatkan satu terobosan penting dalam bidang matematika dan desain seni pada abad ke-12 M. "Ini amat mengagumkan," tutur Peter Lu, peneliti dari Harvard, AS seperti dikutip BBC .

Peter Lu mengungkapkan, para matemetikus dan desainer Muslim di era kekhalifahan telah mamapu membuat desain dinding, lantai dan langit-langit dengan menggunakan tegel yang mencerminkan pemakaian rumus matematika yang begitu canggih. "Teori itu baru ditemukan 20 atau 30 tahun lalu," ungkapnya.

Desain dalam seni Islam menggunakan aturan geometri dengan bentuk mirip kristal yang menggunakan bentuk poligon simetris untuk menciptakan satu pola. Hingga saat ini, pandangan umum yang beredar adalah pola rumit berbentuk bintang dan poligon dalam desain seni Islam dicapai dengan menggunakan garis zigzag yang digambar dengan mistar dan kompas.

Seorang ilmuwan barat dari Amerika Serikat bernama Peter Lu mengakui kekaguman-kekagumannya atas kemajuan ilmu geometri di dunia Islam. Pola-pola dari desain geometris Dalam buku ini akan kembali memuat ilmuwan-ilmuwan Muslim yang menjelaskan riwayat singkat, dan karya-karyanya yang berkontribusi dalam dunia geometri. Beberapa tokoh di antaranya adalah Al Khawarizmi, Thabit Ibnu Qurra, Abu Nass Mansur Ibnu , Ibnu Al Haibthan, dan Al Biruni.

Tokoh 1. Al- Khawarizmi

Ilmuwan Islam pertama yang akan digalii gagasan dan warisan keilmuannya dalam bidang Matematika yaitu Al Khawarizmi. Dalam mengenali pemikiran, gagasan dan Karya dari Al Khawarizmi, maka sebaiknya kita perlu mengenal pula Biografinya, dan gambaran-gambaran kondisi yang terjadi di masa beliau baik masalah sosial, budaya, dan kemajuan-kemajuan berpikir yang ada pada waktu itu.

Matematikawan muslim ini mempunyai nama lengkap **Muhammad Ibn Musa Al Khawarizmi** dikenal pula dengan **Abu Abdullah Muhammad Bin Ahmad Bin Yusuf**. Al Khawarizmi lahir di Bhukhoro pada Tahun 780 Masehi. Pada adab ke 9 ini dalam selang tahun780-850 Masehi menjadi masa kegemilangan Al Khawarizmi[8]. Nama besar Al Khawarizmi tidak hanyapopuler di kalangan Islam di dunia timur, namundi berbagai belahan barat, Al Khawarizmi dikenal dalam banyak nama yaitu Al Kowarizmi, Al Hawizmi, Al Karizmi, , AL Goritmi, dan Al Gorizmi. Dengan bebagai Maha Karyanya dalam bidang Aljabar, akhirnya beliaua dinobatkan sebagai ***The Father Of Algebra*** pada abad 19. Al

[8] Adnan Baki, 'Al Khawarizmi's Contributions to The Science of Mathematics : Al Kitab Al Jabr Wa'l Muqabalah', *Journal of Islamic Academy of Sciences*, 5.3 (1992), 225–28 <https://doi.org/10.1088/0031-9120/2/6/301>.

Khawarismi membawa pengaruh yang sangat kuat dalam perkembangan ilmu Aljanar di darata Asia, Afrika, hingga ke Eropa sehingga berkembanglah Matematika modern[9].

Tidak hanya di bidang matematika, namun beliau juga ahli dalam bdang Falsafah, sejarah, logika, aritmatika, geometri, musik, Ilmu Hitung, Astronomi, dan beliau juga adalah ahli Kimia. Melalui pengetahuannya yang luas menjadikannya sebagai Tokoh Islam yang mengharumkan nama Islam di dunia barat. Dalam banyak sumber mengatakan bahwa selain karena dasar keilmuannya yang begitu kuat, beliau juga mengasah kemampuannya saat menjadi observator di laboratorium astronomi . Dimasa Pemerintahan Khalifah Al Mamun di Baitul Hikmah tepatnya di Kota Baghdag.

Gambar 1. 10. Al Khawarizmi dan Kitab Al Jabr Wal Muqaabalah,

Dalam dunia matematika, Al Khawarizmi dikenal dengan Bapak Aljabar. Al Khawarizmi dalam memajukan analisis geometrinya menggunakan The Elements sebagai referensi dasar ilmu geometri yang dikenal sebagai Karya dari Euclid. Dalm kajian trigonometri dan astronomi Al Khawarizmi memperkenalkan istilah secans dan tangens.

Penelitian-penelitian Al Khawarizmi menjadi satu loncatan dalam sejarah matematika, dengan memadukan konsep geometri yang diperkenalkan oleh matematikawan Yunani Kuno. Melalui karya-karya dari hasil penelitiannya mendorong berbagai kemajuan dalam bidang matematika seperti Aljabar Polinom, Analisis Kombinatorik, Analisis Numerik, Teori Bilangan, dan Geometri Analitis.

Apa yang telah dilakukan oleh Al Khawarismi dalam sejumlah penelitiannya memberikan kontribusi yang sangat besar dalam bidang geometri. Kekuatan riset yang dilakukan oleh AL Khawarismi dalam mengembangkan geometri, yaitu dengan mengintegrasikannya dengan ilmu-ilmu aljabar, dan sistem penomoran. Tak dapat dipungkiri, perkembangan ilmu astronomi sangat bergantung pada sejumlah teori-teori

[9] David M. Nabirahni, Brian R. Evans, and Ashley Persaud, ‘Al-Khwarizmi (Algorithm) and the Development of Algebra’, *Mathematics Teaching-Research Journal*, 11.12 (2019), 13–17.

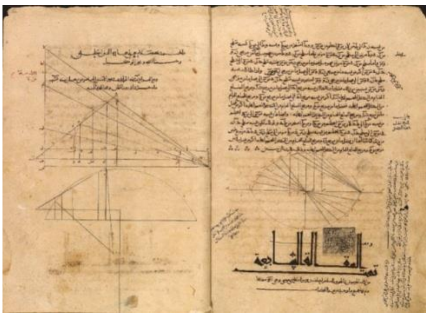
geometri. Kedudukan bintang terhadap bumi, merupakan salah satu aspek diastronomi yang membutuhkan keterampilan dan wawasan yang mumpuni dalam bidang geometri. Dari kajian astronomi inilah, Al kKhawarismi memperkenalkan konsep-konsep dalam geometri. Salah satu karya terbesar Al Khawarizmi adalah menciptakan satu tools yang sangat penting dalam kajian sudut yakni *secans dan tangens*. Istilah ini digunakan dalam menginvestigasi masalah trigonometri dan astronomi.

Tokoh 2. Thabit Ibnu Qurra (836-901)

Setelah Al Khawirizmi, ilmuwan muslim lain yang juga memiliki kontribusi dalam perkembangan ilmu matematika, khususnya dalam kemajuan ilmu geometri adalah Thabit Ibnu Qurra atau yang lebih dikenal dengan Thabit.

Gambar 1. 11. Thabit Ibnu Qurra

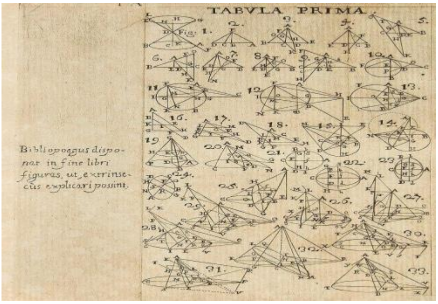
Hasil penemuan-penemuannya juga menjadi dasar dalam pengembangan Kalkulus, Integral, Trigonometri, dan Geometi Analitik. Thebit juga menjadi pelopor dalam kajian geometri non- Euclidean. Karya yang paling populer yang diwariskan oleh Thabist adlah The Composition of Ratio. Gagasan yang dapat diperoleh dalam kitab ini adalah integrasi antara aritmatika dan rasio geometri.



Gambar 1. 12. Shkenca Matematike nga Thabit Ibn Qurra

Sumber : https://sq.wikipedia.org/wiki/Thabit_bin_Kurra

Sumbangan Thabit terhadap geometri lainnya yakni, pengembangan geometri terhadap teori Pitagoras di mana dia mengembangkannya dari segi tiga siku-siku khusus ke seluruh segi tiga siku-siku. Thabit juga mempelajari geometri untuk mendukung penemuannya terhadap kurva yang dibutuhkan untuk membentuk bayangan matahari.



Sumber : Wikipedia

Tokoh 3. Abu Nasr Mansur Ibnu Ali Ibnu Iraq

Cendekiawan Muslim yang juga mempunyai andil besar dalam perkembangan Geometri adalah Abu Nasr Mansur. Salah satu kontribusi Abu Nasr Mansur adalah geometri bidang astronomi yang lebih dikenal dengan *spherical geometri*. Spheric Menelaus sebagai karya yang dikembangkan dari Menelauss Yunani.

Gambar 1. 13. Abu Nasr

Dalam perkembangan astronomi di dunia islam sangat dipengaruhi oleh *Spherical*. Melalui ilmu *spherical geometri,* Abu Nasr mewariskan ilmu yang menjadi dasar dalam dalam penentuan waktu-waktu istemewa dalam kegiatan ibadah, seperti waktu shalat, waktu hari raya idul Fitri dan waktu Idul Adha. Keberadaaan Abu Nasr menjadi simbol kemajuan ilmu di dunia Islam. Karya-karyanya menjadi referensi dalam pengembangan ilmu astronomi di Eropa.

Abu Nasr dalam menciptakan karya-karyanya mendapat dukungan dari Ali Ibnu ma'mun dan Abu'l Abbas Ma'mun. Di bawah kekuasaan Dinasti Sumaniyah, ilmuwan-lmuwan pada waktu itu sangat dihormati dan mendapat dukungan. Karya-karya dihasilkan memiliki kontribusi yang besar dalam matematika, astronomi, geografi dan astrologi Romawi.

Abu Nasr Mansur (960 M – 1036 M) dari Persia merupakan cendikiawan muslim dalam bidang matematika yang juga memiliki kontribusi yang sangat vital khususnya dalam bidang geometri. Dikenal sebagai penemu hukum sinus, hukum yang menguraikan hubungan sisi-sisi pada segitiga siku-siku. Sebagaimana yang telah ketahui bahwa interpretasi geometri sinus adalah perbandingan antara sisi hadap terhadap sisi miring dalam segitiga siku-siku. Dalam karya yang ditulis oleh Bill Scheppler, memperkenalkan bahwa hukum sinus al-Biruni: Master Astronomer and Muslim Scholar of the Eleventh Century.

Tokoh 4. Abu Raihan Al Biruni

Suatu kawah di bulan diberi nama **Al Biruni**, selain itu sebuah Asteroid dinamakan 9936 Al Biruni, itu semua adalah bentuk penghargaan atas dedikasi Al Biruni dalam mengembangkan ilmu geometri dan mengaplikasikannya dalam ilmu Falaq. **Abu Raihan Al Biruni** adalah seorang ilmuan yang lahir pada tanggal 4 september 973 Mdi Kota Kyat. Al Biruni menjadi bagian penting dari ***Islamic Golden Age.*** Pengetahuan dari peradaban era Yunani bersemai dan bertumbuh pada zona dan periode imperium Arab, setelah perpecahan Kekaisaran Romawi. Kemampuannya dalam bidang matematika, filsafat, geografi dan studi budaya membuatnya terpanggil untuk bekerja dalam bidang Astronomi, sehingga diangkat sebagai Astrolog kerajaan.

Gambar 1. 14. Al Biruni

Al Biruni berpindah-pindah dan merasakan pergantian 6 Dinasti. Di bawah Kekhalifahan Dinasty Abbasiyah, ditandai oleh adanya gejolak politik. Al Biruni dikenal sebagai salah satu ilmuan muslim yang sangat produktif dalam menghasilkan karya tulis.

Beberapa karya tulis yang dapat diidentifikasi yaitu *Tarikh Al Hindi* (sejarah India), karya ini dikenal sebagai karya terbaik yang pertama kali mengulas India. Karya lainnya yaitu, buku **Al Jamahir Fi Ma'rifati Al Juwahir** (Ilmu Pertambangan), **As Syadala Fi Al Thib** (Farmasi dalam Ilmu Kedokteran), **Al Maqalid Ilm Al Hai'ah** (Ilmu Perbintangan) dan **Kitab Al Kusuf wa Al Hunud** (Kitab tentang Pandangan India mengenai peristiwa gerhana bulan).

Karya Al Biruni yang paling monmumental yakni kitab **Al Qanun Al Mas'udi** yang membahas tentang perhitungan benda langit, fenomena benda langit yang sangat berkontribusi dalam penentuan waktu ibadah umat islam[10]. Proses percetakan Kitab Al Qanun Al Mas'udi diterbitkan di India yang terdiri dari 1485 halaman dalam susunan 11 jilid. Adapun urutan-urutan bab di dalamnya tersusun atas : Pendahuluan; Kalender; Ukuran Keliling Bumu; Matematika untuk perhitungan gerak matahari dan hubungannya dengan kejadian malam dan siang; garis Lintang dan bujur serta perhitungannya; Matahari dan kedudukannya dalam tata surya; Bulan dan geraknya; Gerhana Matahari dan gerhana bulan; Bintang dan galaxy; Gerakan planet-planet beserta orbitnya; dan Astrologi[11].

Asumsi awal yang menjadi dasar dalam ajaran astronomi Al Biruni adalah konsep bumi bulat dengan pendekatan teori gravitasi. Fakta yang menegaskan tentang pengakuan Al Biruni bahwa bumi bulat yaitu dalam perhitungan keliling bumi. Dalam kitab ini pula mengkaji bahwa Matahari adalah pusat tata surya yang dikelilingi oleh benda langit. Dengan ini, Al Biruni dikenal sebagai astronom yang pertama kali menolak teori *geosentris*[12]. Pemikiran hisab Rukyah Abu Raihan Al Biruni, menghitung pergerakan Matahari dan Bulan sebagai panjang tahunan tropical. Dari hasil observasinya, Al Biruni menghasilkan angka 365.242 hari sebagai panjang tahun tropical. Dari perhitungan yang diperoleh Al Biruni menunjukkan keakuratan yang hampir sama dengan Hipparchus dan Ptolemy. Pada proses perhitungan jari-jari bumi menggunakan konsep perhitungan sudut dan tinggi gunung dengan perhitungan Trigonometri.

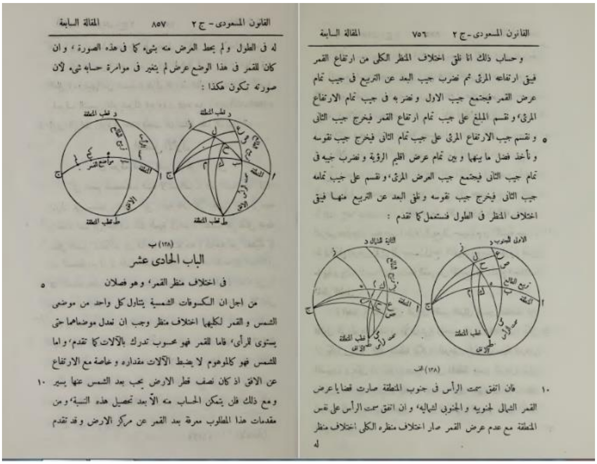
Dalam hal penentuan arah kiblat, Al Biruni menggunakan diagram dari bola langit yang dipandang dari luar. Dengan aturan segitiga bola, Al Biruni mewariskan perhitungan penentuan arah kiblat. Dapat diketahui, bahwa perbandingan dari data-data yang diperoleh

[10] Sakirman, 'Memahami Konsep Dasar Gerak , Bentuk Dan Ukuran Bumi Studi Analisis Kitab Al-Qanun Al-Mas'udi Karya Al-Biruni Dalam Konteks Hukum Islam', *Al Istinbath : Jurnal Hukum Islam*, 2.1 (2017), 2548–3382.

[11] Nugroho Eko Atmanto, 'Relevansi Konsep Fajar Dan Senja Dalam Kitab Al-Qanun Al-Mas'Udi Bagi Penetapan Waktu Shalat Isya Dan Subuh', *Analisa*, 19 (2012), 95–105.

[12] Sakirman.

AL BIruni tidak memiliki perbedaan yang signifikan dengan data modern yang ada saat ini [13].



Gambar 1. 15.   Al Qanuun Al Mas'udi

Secara matematis, dalam penentuan arah kiblat Al Biruni menggunakan aturan sinus, cosinus, konsep kesebangunan, konsep kesesuaian untuk menentukan sudut-sudut segitiga bola. Dari sudut-sudut inilah kemudian diasosiasikan unsur-unsur dalam menentukan arah kiblat. Al Biruni memperhitungkan Lintang lokasi amatan, Bujur lokasi amatan, Lintang Mekkah, Bujur Mekkah serta selisih bujur. Dengan demikian diperoleh kemiringan dengan besaran sudut tertentu pada lokasi tertentu [14].

Banyak ilmuan seperti Omar Khayam pada tahun 1074 M yang kemudian menggunakan hasil penelitian Al Biruni tanpa ragu dengan keyakinan terhadap Al Biruni atas otoritasnya sebagai Astrologi. Demikian halnya, dengan Ulghbek (Astronom Besar Uzbekistan) yang memanfaatkan karya-karya Al Biruni dalam mengembangkan ilmu Falaq.

Tokoh 5.   Ibnu Al- Haitham

Selain itu, ilmuwan Muslim lainnya yang berjasa mengembangkan geometri adalah Ibnu al-Haitham. Dalam bidang geometri, Ibnu al-Haitham mengembangkan analitis

[13] Abdul Kohar, 'Pemikiran Hisab Rukyah Abu Raihan Al Birui', *Jurnal Pemikiran Hukum Islam*, 14.1 (2018), 63–79.
[14] Kohar.

geometri yang menghubungkan geometri dengan aljabar. Selain itu, dia juga memperkenalkan konsep gerakan dan transformasi dalam geometri.

Gambar 1. 16. Ibnu Al-Haitham

Teori Ibnu al-Haitham dalam bidang persegi merupakan teori yang pertama kali dalam geometri eliptik dan geometri hiperbolis. Teori ini dianggap sebagai tanda munculnya geometri non- Euclidean. Karya-karya Ibn al-Haitham itu mempengaruhi karya para ahli geometri Persia seperti Nasir al-Din al Tusi dan Omar Khayyam. Namun pengaruh Ibn al-Haytham tidak hanya terhenti di wilayah Asia saja. Sejumlah ahli geometri Eropa seperti Gersonides, Witelo, Giovanni Girolamo Saccheri, serta John Wallis pun terpengaruh pemikiran al-Haitham. Salah satu karyanya yang terkemuka dalam ilmu geometri adalah Kitab **Al-Tahlil Wa Al'Tarkib**.

1. D. PETA KONSEP GEOMETRI ANALITIK BIDANG

Pada pembelajaran geometri analitik bidang ini, penting buat pembaca untuk memahami kerangka materi yang ada di dalamnya. Setiap bab di dalam buku ini dapat dikatakan menyerupai bangun piramida. Seperti halnya pada susunan dan hubungan antar Bab didesain dengan mempertimbangkan pengetahuan dasar dan umum menuju pengetahuan yang bersifat spesifik dan relatif lebih sulit.

Setelah mengkaji susunan susunan topik di dalam geometri analitik bidang pada beberapa referensi yang telah ada sebelumnya dapat dikatakan bahwa ada tingkatan aktivitas belajar yang perlu untuk dikenali. Secara terurut, tingkatan aktivitas belajar didapatkan pada pembelajaran Geometri analitik Bidang adalah sebagai berikut :

1. Pengenalan objek-objek geometris seperti titik, garis, bidang, dan ruang.Objek-objek geometris ini, juga terikat pada tingkatan-tingkatan kesulitan yang terurut mulai dari objek titik, sampai pada objek ruang.
2. Pengenalan unsur-unsur intrinsik yang ada pada objek di atas seperti posisi atau kedudukan, arah, jarak, kemiringan, besar sudut, dan persamaan matematis atau bentuk aljabarnya.
3. Pembentukan persamaan persamaan standar dengan mengacu pada definisi atau karakteristik objek.Pada bagian ini, kita akan menggabungkan pengetahuan-pengetahuan dasar mengenai objek dengan sifat-sifat aljabar.
4. Penggunaan rumus-rumus atau penggunaan persamaan secara prosedural. Pada kegiatan ini, kita hanya perlu mengenali variabel variabel yang ada kemudian disubtitusikan ke dalam persamaan.
5. Modifikasi persamaan standar menjadi persamaan tak standar untuk kondisi yang lebih kompleks.
6. Eksplorasi perpaduan aljabar dan geometri menggunakan aplikasi Geogebra.

1. E. LATIHAN SOAL

1. **Jelaskan** kedudukan Geometri Analitik Bidang dengan mata kuliah dasar Kalkulus dan Aljabar Linear dalam narasi 3 paragraf! (Tuliskan sebagai serangkaian pemahaman atas pengalaman belajar)
2. **Uraikanlah** secara singkat sejarah awal dan perkembangan geometri pada tiga peradaban besar yakni Mesir Kuno, Yunani Kuno dan dalam peradaban Islam dengan mengklasifikasikan tokoh-tokoh dan gagasan geometrinya melalui narasi (atau bagan sederhana) minimal 1 halaman (Gunakan referensi dan tuliskan referensi yang ada).
3. **Rancanglah** grand desain atau peta konsep pembelajaran Geometri Analitik Bidang dengan menekankan pada pola hubungan antara topik dalam 1 halaman.
4. Berikanlah masing-masing ilustrasi geometris,dari teorema yang digagas oleh **Thales**!
5. Lakukanlah penjajakan penelitian atau referensi yang membahas metode ataupun pendekatan yang di gunakan **Abu Raikhan Al Biruni** dalam melakukan perhitungan jari-jari bumi, dan sudut penentuan arah Kiblat!

BAB II. SISTEM KOORDINAT KARTESIUS

Kemampuan Akhir yang Diharapkan

- Mampu membedakan definisi, postulat, lemma dan teorema yang berkaitan dengan Geometri Bidang.
- Mampu mendeskripsikan konsep dasar Sistem Koordinat Kartesius
- Mampu menentukan titik yang dilewati oleh satu garis lurus.
- Mampu memahami dan menerapkan cara perhitungan jarak antar dua buah titik dalam koordinta kartesius.
- Mampu menentukan koordinat titik yang berada diantara dua koordinat pada satu garis lurus.
- Mampu mengeksplorasi hubungan aljabar dan geometri melalui Aplikasi Geogebra

2. A. HIERARKI PERNYATAAN MATEMATIKA

Sebelum kita memasuki pembahasan geometri, maka perlu kembali untuk kita mengklasifikasikan pernyataan matematika berdasarkan tingkatan-tingkatannya. Dalam dunia matematika, sistem kebahasaan dan nilai kebenarannya mempunyai kategori tersenidiri. Adapun pernyataan yang bersifat matematis dapat dikategorikan menjadi definisi, aksioma, postulat, teorema, proposisi, lemma, hukum, dalil dan akibat (*corolary*).

Dalam buku The Elements yang dituliskan oleh Euclid, berisi kumpulan definisi, axioma, postulat, teorema, dan proposisi yang mengulas tentang objek-objek geometri serta hubungannya satu sama lain. Berikut ini, kita akan melihat beberapa pernyataan mathematis yang diperoleh dari buku The Elemnts

Definisi

Definisi adalah rumusan tentang makna dari suatu benda, aktifitas, proses dan yang lainnya yang menjadi suatu konsep atau pokok bahasan agar lebih mudah dipahami dan memiliki batasan untuk lebih mudah dimengerti. Dalam pembelajaran matematika, definisi dari suatu pokok bahasan menjadi bagian penting untuk dijelaskan terlebih dahulu kepada siswa. Definisi sendiri, tidak ditinjau sebagai pernyataan yang memiliki nilai kebenaran, namun menjadi dasar dalam membuktikan pernyataan-pernyataan seperti teorema.

Dalam pembelajaran geometri ada beberapa definisi yang akan kembali diberikan sebagai komponen utama geometri euclid yang tercantum pada buku 1 “The Element” yang ditulisakn oleh Euclid, yaitu[15] :

1. Definisi1: Titik adalah sesuatu yang tidak punya bagian (sesuatu yang punya posisi tetapi tidak punya dimensi)
2. Definisi 2: garis sesuatu yang punya panjang tetapi tidak punya lebar
3. Definisi 3: Ujung-ujung suatu garis adalah titik
4. Definisi 4: Garis lurus adalah garis yang terletak secara rata dengan titik-titik pada dirinya
5. Definisi 5: Bidang adalah sesuatu yang hanya mempunyai panjang dan lebar
6. Definisi 6: Sisi-sisi dari bidang berupa garis
7. Definisi 7: Bidang datar adalah bidang yang terletak secara rata dengan garis-garis lurus pada dirinya
8. Definisi 8: Sudut bidang terbentuk dari dua garis pada bidang yang bertemu pada sebuah titik dan tidak terletak dalam sebuah garis lurus
9. Definisi 9: Dan ketika garis-garis yang membentuk sudut lurus, sudut tersebut disebut rectilinear
10. Definisi 10: Ketika garis lurus berdiri pada sebuah garis lurus dan membentuk sudut berdekatan yang besarnya sama, masing-masing sudut tersebut adalah sudut siku-siku, dan garis yang berdiri dikatakan tegak lurus dengan garis kurus tempatnya berdiri
11. Definisi 11: Sudut tumpul adalah sudut yang lebih besar dari sudut siku-siku.
12. Definisi 12: Sudut lancip adalah sudut yang lebih kecil dari sudut siku-siku.
13. Definisi 13: Batas adalah sesuatu yang merupakan ujung dari apapun
14. Definisi 14: Bangun adalah sesuatu yang dibentuk oleh batas atau batas-batas.
15. Definisi 15: Lingkaran adalah bangun datar yang dibentuk oleh satu garis sedemikian hingga semua garis lurus yang jatuh pada bangun tersebut dari sebuah titik di dalam bangun tersebut pada bangun tersebut panjangnya sama
16. Definisi 16: Dan titik tersebut disebut pusat lingkaran
17. Definisi 17: Diameter lingkaran adalah suatu garis lurus yang digambar melalui pusat lingkaran dan berakhir di dua arah keliling lingkaran
18. Definisi 18: Setengah lingkaran adalah bangun yang dibangun oleh diameter dan keliling lingkaran yang dipotong oleh diameter

[15] Fitzpatrick, IV.

19. Definisi 19: Bangun-bangun rectilinear adalah bangun-bangun yang dibentuk oleh garis lurus. Bangun segitiga adalah bangun yang dibentuk oleh tiga garis lurus, bangun segiempat adalah bangun yang dibentuk oleh empat garis lurus, bangun segibanyak adalah bangun yang dibentuk oleh lebih dari empat garis lurus
20. Definisi 20: Dari bangun segitiga, segitiga sama sisi adalah segitiga yang memiliki tiga sisi yang sama, segitiga sama kaki adalah segitiga yang memiliki dua sisi yang sama, segitiga sembarang (segitiga tak sama panjang) adalah segitiga yang ketiga sisinya tidak ada yang sama
21. Definisi 21: Selanjutnya, pada bangun segitiga, segitiga siku-siku adalah segitiga yang memiliki sudut siku- siku, segitiga tumpul adalah segitiga yang memiliki sudut tumpul, segitiga lancip adalah segitiga yang memiliki sudut lancip
22. Definisi 22: Pada bangun segiempat, persegi adalah bangun yang semua sisinya memiliki panjang yang sama dan memiliki sudut siku-siku, persegi panjang adalah bangun yang memilik sudut siku- siku tetapi tidak memiliki dua pasang sisi yang panjangnya sama, belah ketupat adlah bangun yang semua panjang sisinya sama tetapi tidak memiliki sudut suku-siku
23. Definisi 23: Garis-garis lurus sejajar adalah garis lurus yang berada pada bidang datar yang sama, dan jika diperpanjang secara terus menerus pada kedua arah tidak akan berpotongan di arah manapun.

Aksioma

Aksioma merupakan pendapat yang dijadikan sebagai dasar rujukan dengan kebenaran yang tidak perlu untuk dibuktikan karena dianggap sebagai pernyataan yang kebenarannya dapat langsung diterima dan bersifat umum. Berikut diberikan beberapa contoh Aksioma dasar dalam kajian geometri :

1. Melalui dua titik yang berada pada posisi sembarang dapat dibuat sebuah garis lurus
2. Jika sebuah garis dan sebuah bidang mempunyai dua titik persekutuan, maka garis itu seluruhnya terletak pada bidang
3. Melalui tiga buah titik dalam posisi sembarang hanya dapat dibuat sebuah bidang.
4. Melalui sebauh titik yang berada di luar sebuah garis tertentu,hanya dapat dibuat sebuah garis yang sejajar dengan garis tertentu tersebut

Postulat

Pada beberapa teori tertentu, kadang membutuhkan pernyataan-pernyataan dukungan yang kebenaran dari pernyataan tersebut tidak perlu dibuktikan. Pernyataan seperti ini dikenal sebagai **postulat**. Postulat sendiri kedudukannya hampir sama dengan aksioma, yaitu sama -sama tidak perlu untuk dibuktikan karena ebenarannya telah diterima. Dalam beberapa referensi, postulat seringkali dibahasakan sebagai landasan berpikir yang diartikan sebagai suatu keterangan yang kebenarannya dapat diterima tanpa perlu untuk menunjukkan kebenarannya. Setidaknya ada 8 prinsip yang perlu untuk dipertimbangkan untuk merancang suatu postulat baru, diantranya prinsip *causalitas*, prinsip *prediktif uninformatif*, prinsip objektivitas, prinsip empirisme, prinsip pengukuran kuantitatif, prinsip kontrol, prinsip *simplify*. Dalam dunia fisika, salah satu postulat umum yang sering kita temukan seperti Postulat Einstein tentang relativitas khusus pada fenomena kecepatan cahaya. Sementara postulat dalam Geometri Bidang, juga dapat dijumpai dalam karya Euclide The Elements. Euclide mencetuskan 5 postulat yang kemudian menjadi pokok bahasan. Agar tidak terjadi salah interpretasi, maka postulat kelima juga disajikan dalam bahasa Inggris[16].

1. Garis lurus dapat digambar dari (sembarang) titik sampai (sembarang) titik lainnya.
2. Ujung garis lurus dapat dilanjutkan terus sebagai garis lurus.
3. Lingkaran dapat digambar dari sembarang titik pusat dan dengan jari-jari berbeda.
4. Semua sudut-sudut di sisi kanan besarnya sama dengan sisi lainnya.
5. Apabila garis lurus terpotong menjadi dua garis lurus, menyudut di sisi dalam pada kedua garis pada sisi yang sama daripada dua sudut yang sejajar, jika diteruskan sampai ke (titik) tak terhingga, akan berpotongan pada sisi dimana sudutnya lebih kecil dibandingkan sudut yang terbentuk dari dua garis.

(If a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side together less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which the angles are together less than two right lines)

[16] Fitzpatrick, IV.

Teorema

Setelah mengenal definisi, aksioma dan postulat, tingkatan pernyataan berikutnya adalah teorema. Definisi, aksioma dan postulat sebagai pernyataan dalam matematika telah dijelaskan bahwa tidak perlu membukikan status kebenarannya. Sedangkan pada teorema, kebenarannya dapat diterima setelah dibuktikan. Pembuktian teorema sendiri, dapat dilakukan dengan melibatkan defininisi-definisi yang berkaitan, ataupun oleh teorema yang kebenarnnya sudah dibuktikan. Bentuk teorema sendiri, biasanya berupa pernyataan implikatif "jika-maka"

Teorema dalam geometri :

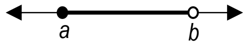
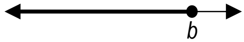
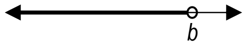
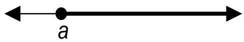
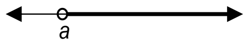
1. Jika sebuah garis memotong suatu bidang yang tidak memuat garis tersebut, maka perpotongan adalah tepat sebuah titik.
2. Jika terdapat sebuah garis dan sebuah titik pada garis tersebut maka keduanya terletak pada suatu bidang
3. Jika dua buah garis berbeda berpotongan, maka keduanya terletak tepat pada satu bidang

2. B. SISTEM KOORDINAT KARTESIUS

Pembahasan sistem koordinta kartesius, maka penting bagi kita ungtuk mengenal tokoh yang memperkenalkan Sistem Koordinat Kartesius pertama kali. Pada bagian ini akan diawali dengan penjelasan taksonomi sistem bilangan. Sebagaimana yang telah diurai dalam mata kuliah kalkulus telah cukup membekali kita bahwa sistem bilangan dapat diklasifikasikan dalam himpunan berdasarkan wujudnya. Pertama dari bilangan kompleks yang mengandung unsur bilangan nyata yang dikenal bilangan Real dan bilangan khayal yang dikenal dengan bilangan Imajiner. *Selanjutnya bilangan Real ini diklasifikasikan kembali dalam Bilangan Rasional dan Irrasional. Kemudian dilanjutkan dengan klasifikasi bilangan Rasional yang mengkategorikan ke dalam jenis yaitu Bilangan bulat dan bilangan pecahan. Secara sistematis, taksonomi bilangan dapat dilihat pada gambar bagan sistem bilangan berikut*

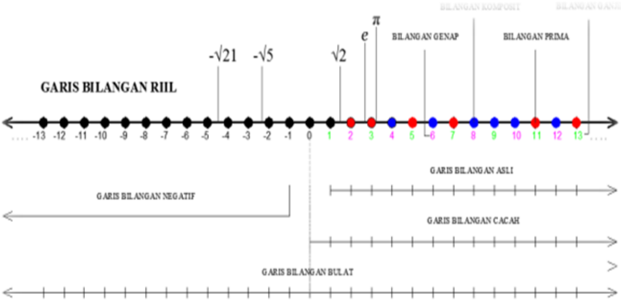
Secara khusus, kalkulus berfokus pada kajian bilangan Real untuk menelaah konsep fungsi, limit fungsi, kontinuitas fungsi, turunan, integral dan pengembangan lainnya. Dari bilangan real inilah kemudian diperkenalkan bagaimana konsep penyajiannya. Dalam buku Kalkulus oleh Varberg dkk, dijelaskan bahwa bilangan real dapat disajikan melalui interval, himpunan, dan melalui garis bilangan. Mengapa demikian?

Meskipun wujudnya nyata dan ada, untuk menuliskan semua anggota-anggota himpunan bilangan real bahkan yang berada pada interval -1 sampai 1 saja, satu persatu mustahil untuk dituliskan, sehingga butuh sistem penyajian khusus. Himpunan Bilangan Real dapat disajikan dalam bentuk Interval, himpunan dan Garis Bilangan, berikut tabel yang menunjukkan penyajian bilangan real :

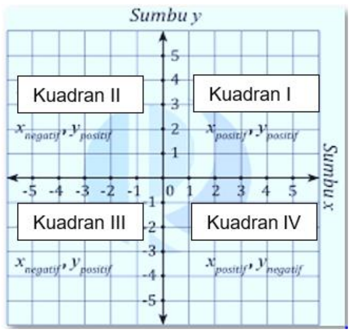
Penyajian Interval	Penyajian himpunan	Penyajian Garis Bilangan
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Ketika semua anggota bilangan Real ingin dituliskan maka hanya dapat dilakukan melalui penulisan interval $(-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}$ atau disajikan dalam garis bilangan yang kedua ujungnya berupa anak panah. Penyajian bilangan Real melalui garis bilangan inilah yaang kemudian mengantarkan seorang **Rene Descartes** menggagas sistem koordinat kartesius. Dalam hal ini, Matematikawan Perancis tersebut mengkombinasikan dua sumbu garis sebagai representasi bilangan real yang diletakkan secara berpotongan dan saling tegak lurus. Sumbu horizontal dikenal sebagai sumbu *absis* sedangkan sumbu vertikal dikenal dengan *ordinat* dan masing-masing biasanya disebut sebagai sumbu-x dan sumbu-y.

Melalui kombinasi garis bilangan tersebut membentuk satu himpunan baru yaitu pasangan bilangan real pada sumbu-x dan bilangan real pada sumbu-y. Himpunan tersebut dinotasikan dengan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ yang menempati empat kuadran yaitu $(+,+), (-,+), (-,-), (+,-)$. Selain gagasan mengkombinasikan dua garis bilangan, Rene Descartes juga mengikutsertakan idenya dalam mengkombinasikan aljabar dan geometri dalam sistem koordinat tersebut.



Gambar 2.1. Garis bilangan vertikal



Gambar 2.2. Penggabungan garis bilangan horizontal dan vertikal

Hal mendasar pada sistem koordinat kartesius pada geometri adalah sebagai berikut :

1. Melalui sistem koordinat kartesius, suatu titik dapat diidentifikasi kedudukan atau posisinya. Dapat dikatakan bahwa pemberian tanda titik pada suatu bidang, kedudukannya tidak dapat diketahui jika tidak dilengkapi dengan sistem koordinat.

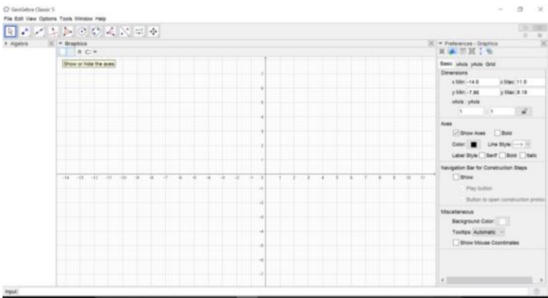
2. Melalui sistem koordinat kartesius, dua titik yang berada pada satu sistem koordinat di kedudukan yang berbeda dapat dihitung panjang garis yang menghubungkannya.Melalui sistem koordinat kartesius, suatu bidang dapat dihitung luasannya.

2. C. SISTEM KOORDINAT DALAM TINJAUAN GEOGEBRA

Di dalam aplikasi geogebra, ruang kerjanya berbasis pada sistem koordinat. Kita dapat memilih sistem koordinat 2 Dimensi atau sistem koordinat 3 Dimensi, bahkan kita dapat mengaktifkan kedua-duanya. Secara standar, pada sistem koordinat 2 Dimensi melekat variabel x dan variabel y, sehingga jika kita ingin memplot titik, maka secara otomatis kita memasukkan niali (x,y). Demikian halnya dengan dalam membuat garis lurus, variabel x dan y yang dimasukkan terintegrasikan dengan sistem koordinat.

Sistem koordinat ini berperan vital di dalam eksplorasi geometri analitik bidang. Dalam hal ini, melalui aplikasi geogebra, kita dapat meninjau hubungan titik, garis, bidang dan ruang baik dari aspek geometrinya, maupun dari aspek aljabarnya.

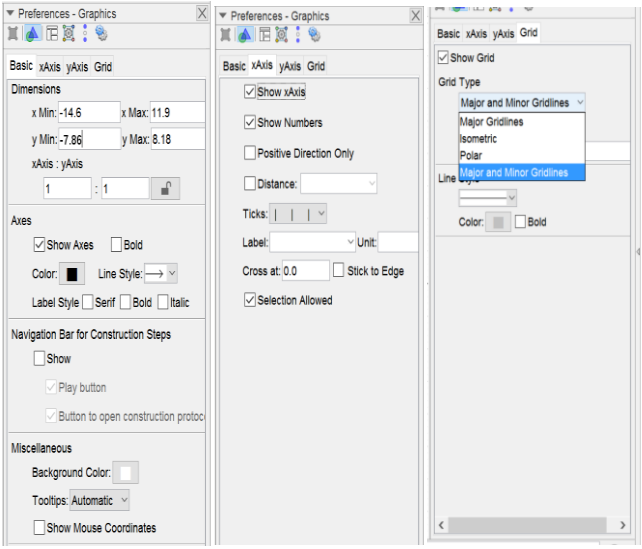
Ada beberapa hal yang perlu diperhatikan, di dalam penggunaan sistem koordinat pada aplikasi geogebra.



Gambar 2.3. Ruang kerja sistem koordinat 2D pada Geogera

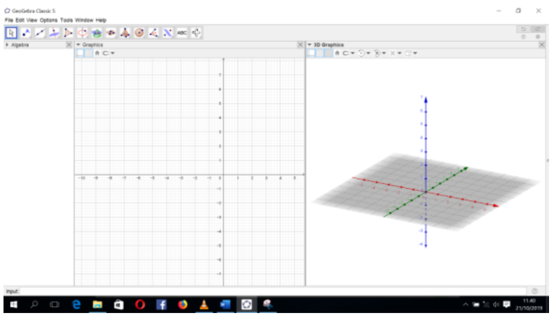
Pada aplikasi geogebra, ruang kerja utama dalam hal ini sistem koordinat kartesius terdapat 4 sub menu, yakni sub menu pengaturan dasar, pengaturan sumbu x, pengaturan sumbu y, dan pengaturan grid. Hal tersebut dapat dieksplorasi secara bebas.

Sebagai kunci dalm penggunaan aplikasi geogebra, adalah eksplorasi sebebas-bebasnya untuk seluruh tools-tools yang ada



Gambar 2.4. Pengaturan sumbu koordinat horizontal x, vertikal y dan grid, dari sistem koordinat 2D pada *Geogebra*

Kita dapat pula mengeksplorasi sistem koordinat 3 Dimensi (3D), cukup dengan mengaktifkan jendela 3D Graphics pada menu view. Sistem koordinat 2 D dan 3 D dapat diaktifkan secara bersamaan. Integrasi sistem koordinat 3D dan 2D pada buku ini, akan kita gunakan pada eksplorasi irisan kerucut. Melalui Kerucut yang digambarkan pada sistem koordinta 3D, ketka dilakukan pengirisan bidang datar maka dapat kita melihat hasil bidang potongnya pada sistem koordinat 2D.



Gambar 2.5. Tampilan sistem koordinat 2D dan 3D pada apliasi Geogebra

2. D. LATIHAN SOAL

1. Rancanglah kembali peta konsep yang merepresentasikan tingkatan pernyataan pernyataan matematika !
2. Lakukan eksplorasi definisi pada buku **The Elements 1 :** ***Fundamentals of Plane Geometry Involving Straight-Lines*** yang dituliskan oleh Euclide, berikanlah penggambaran grafik atau ilustrasi geometris dari 23 definisi yang dikemukakan Eulide dalam buku The Element 1!
3. Lakukan eksplorasi definisi pada buku **The Elements 3 :** ***Fundamentals Of Plane Geometry Involving Circles*** yang dituliskan oleh Euclide, tuliskan dan berikan pemaknaan 11 definisi yang ada !
4. Tuliskan 5 **proposisi** disertai dengan pembuktiannya pada buku **The Elements** yang dituliskan oleh Euclide !
5. Jelaskan hubungan sistem bilangan real, penyajian bilangan real dan sistem koordinat kartesius !
6. Tuliskan unsur-unsur yang terdapat pada sistem koordinat, melalui eksplorasi geogebra !
7. Uraikan kembali peran Sistem Koordinat Kartesius di dalam pebelajaran geometri analitik bidang!

BAB III. TITIK, GARIS DAN BIDANG

Kemampuan akhir yang diharapkan

- Mengeksplorasi unsur-unsur intrinsik titik.
- Mengintegrasikan tinjauan aljabar dan tinajauan geometris hubungan antara titik, garis dan bidang irisan kerucut
- Mengeksplorasi unsur-unsur intrinsik garis berdasarkan jenisnya
- Menganalisis pembuktian aljabar garis sejajar, saling berpotongan, saling berimpit dan tegak lurus aljabar maupun secara geometri.
- Mengurai hubungan titik, kemiringan dan garis.
- Mengurai Hubungan antara dua garis
- Mengetahui persamaan dasar bidang, dan penggambarannya dalam sistem koordinta kartesiu
- Menggunakan geogebra untuk mengeksplorasi titik, garis dan bidang

3. A. TITIK

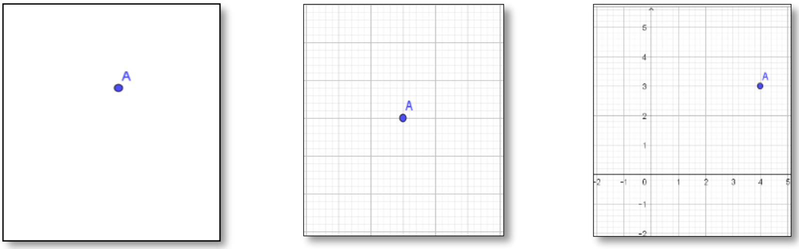
Titik dalam geometri analitik bidang mempunyai unsur intrinsik yakni kedudukan. Titik di dalam kajian geometri dipandang sebagai objek yang tidak memiliki dimensi. Jika dibubuhkan di atas kertas, maka objek tersebut tidak lain adalah kombinasi dari titik titik yang tak berhingga. Titik ini menjadi konsep dasar dalam menggambarkan objek-objek berdimensi seperti garis, bidang dan ruang. Dalam buku pertama The Elemets Book 1 : *Fundamentals of Plane Geometry Involving Straight-Lines*, Euclides menyatakan bahwa A point is that of which ther is no part, atau dapat diartikan bahwa titik adalah sesuatu tanpa bagian[17].

Hal yang perlu diketahui bahwa jika satu titik dibubuhkan di atas kertas putih, maka posisinya tidak dapat disebutkan secara pasti. Hanyalah didekati dari perspektif pengamat seperti berada di tengah, pinggir, atas atau bawah. Selanjutnya timbul pertanyaan, bagaimana posisi titik yang dapat dikatakan pasti?. Posisi titik secara pasti hanyalah bersifat konseptual, namun konsep posisi titik setidaknya dapat menjadi acuan dalam mengkaji objek-objek yang lebih kompleks seperti panjang garis, besar sudut, pusat, dan seterusnya.

Pendekatan yang digunakan untuk dapat menyebutkan posisi titik adalah dengan menggunakan kedudkan objek di atas **sistem koordinat kartesius**. Melalui sistem

[17] Fitzpatrick, IV.

koordinat kartesius, kedudukan sebuah titik dapat disebutkan secara pasti. Berikut ilustrasinya. Dalam memahami pentingnya koordinat kartesius terhadap posisi titik dapat dilihat pada gambar berikut.

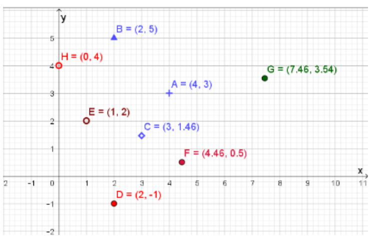


(a) (b) (c)

Gambar 3. 1. Kedudukan titik (a) tanpa sumbu koordinat dan grid , (b) tanpa sumbu koordinat, (c) dengan sumbu koordinat daan grid

Dari ketiga gambar (3.1) di atas bahwa posisi titik yang paling memungkinkan untuk disebutkan posisinya secara pasti dan dapat dikuantifikasi adalah gambar 3.1 bagian c. Hal ini dikarenakan oleh adanya penunjuk letak melalui sumbu-sumbu dari sistem Koordinat Kartesius. Dengan demikian hal mendasar yang perlu untuk dipahami adalah posisi titik yang dapat dikuantifikasi jika terletak di atas sistem koordinat kartesius. Sebagai tambahan, dari kaidah penamaan titik biasanya menggunakan huruf Kapital.

Di dalam sistem koordinat kartesius, satu titik kedudukannya dapat diidentifikasi melalui pembacaan pertemuan nilai pada sumbu horizontal dan verktikalnya yang biasanya dikenal dengan (x, y). Adapun simbol-simbol yang dapat digunakan untuk menunjukkan titik memiliki beragam style. Hal yang paling mendasar pada posisi sebuah titik adalah dengan memandang x adalah titik asal, y sebagai titik kawan, dan (x, y) merupakan titik hasil. Berikut disajikan beberapa style dari titik yang dilengkapi dengan nilai-nilai sebagai posisinya.



Gambar 3. 2. Kedudukan titik dalam sistem koordinat 2D

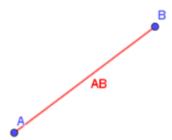
Di dalam geometri, titik menjadi dasar dalam pengembangan objek-objek yang lebih kompleks. Selain itu kedudukan titik terhadap objek lain menjadi tinjauan dalam pembelajaran geometri analitik bidang. Seperti bagaimana menetukan kedudukan titik terhadap titik itu sendiri, kedudukan terhadap garis, kedudukan tiik terhadap lingkaran, kedudukan titik terhadap parabola, kedudukan titik terhadap elips dan kedudukan titik terhadap hiperbola. Hubungan antar titik dengan ojek-objek geometri yang ada akan ditinjau secara terpadu dari aspek geometris dengan tinjauan aljabarnya.

Hubungan antar dua titik

Ketika diberikan dua titik yang berada pada posisi yang berbeda di atas sistem koordinat kartesius, misal titik $A(x_1, y_1)$ dan titik $B(x_2, y_2)$, maka jika kedua titik ini menjadi dua titik ujung oleh suatu garis, maka garis tersebut dikenal sebagai segmen. Dimana jarak terkecil antar dua titik tersebut dapat direpresentasikan dalam satu garis lurus dengan panjang dapat dinyatakan dalam rumusan berikut :

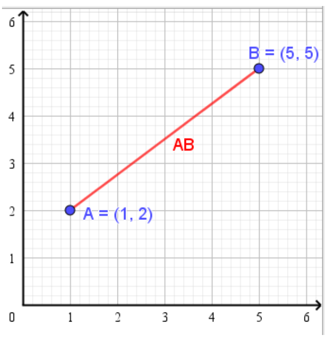
$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad \text{(III.1)}$$

Berikut ilustrasi geometrisnya :



Gambar 3. 3. Kedudukan titik tanpa sumbu koordinat

Pada gambar samping tidak dapat dilakukan perhitungan panjang garis, karena titik A dan B tidak diletakkan dalam sistem koordinat kartesius. Namun demikian panjang dari garis di atas dapat dilakukan melalui pengukran langsung menggunakan alat ukur (misal: mistar) dengan standar satuan tertentu (misal cm).



Gambar 3. 4. Panjang garis dan Jarak antar titik

Pada gambar di samping,diberikan dua titik yang terletak pada sistem koordinat kartesius dengan ini panjang dari garis AB dapat ditentukan dengan menggunakan formula di atas.

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(1-5)^2 + (2-5)^2} \\ &= 5\ satuan \end{aligned}$$

(III.2)

Rumusan antara jarak antar titik, dengan rumusan panjang garis pada dsarnya sama. Panjang Garis yang mengubungkan titik $P(x_1, y_1)$ dan titik $Q(x_2, y_2)$ dinotasikan dengan $\overline{PQ}$

$$|PQ| = \overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{III.3}$$

3. B. GARIS

Sejauh ini, pembelajaran mengenai garis telah dijumpai pada berbagai tingkatan. Mulai dari penggambaran secara geometris maupun pendalamannya dalam bentuk persamaan aljabar. Secara khusus dalam aljabar linear, garis telah diperlihatkan sebagai objek geometris yang dapat menghubungkan sekurang-kurangnya dua titik. Dalam ilmu geometri, garis yang dikenal tidak hanya dalam bentuk garis lurus (*straight line*) namun juga terdapat jenis garis yang tidak lurus dikenal dengan *curve line*. Setidaknya dalam buku **The Element oleh Euclides** jilid 1, garis dijelaskan pada definisi 2-4[18] :

1. Definisi 2: garis sesuatu yang punya panjang tetapi tidak punya lebar
2. Definisi 3: Ujung-ujung suatu garis adalah titik
3. Definisi 4: Garis lurus adalah garis yang terletak secara rata dengan titik-titik pada dirinya

Penggambaran garis di dalam sistem koordinat kartesius dapat dimaknai sebagai kumpulan titik titik yang saling terhubung baik garis lurus maupun dalam bentuk garis tidak lurus. Pada bagian ini, kita akan fokus pda pembahasan garis lurus, yang meliputi arah garis lurus, panjang garis lurus, persamaan garis lurus.

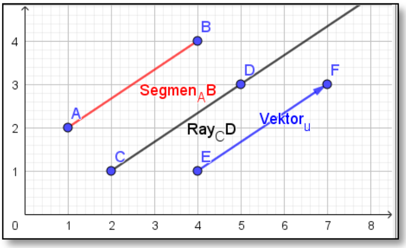
Pemahaman garis lurus dalam sistem koordinat kartesius, dapat dipetakan dalam melihat unsur-unsur intrinsik berikut :

❖ **Arah dari garis lurus.**

Pada telaah aljabar linear, suatu garis yang memiliki arah dan besaran dikenal dengan istilah vektor. Biasanya dalam penggambaran satu garis lurus yang berarah ***ditandai dengan adanya mata panah yang berada pada ujung garis.*** ***Apabila suatu garis memiliki arah panah pada salah satu ujungnya maka jenis garis tersebut dalam ilmu geometri dikenal dengan vektor. Selanjutnya jika kedua ujungnya hanya berupa titik maka garis tersebut dikenal sebagai segmen garis. Sedangkan jika salah satu***

[18] Fitzpatrick, IV.

ujungnya berupa titik dan ujung lainnya tidak berujung maka garis tersebut dikenal sebagai sinar (ray)

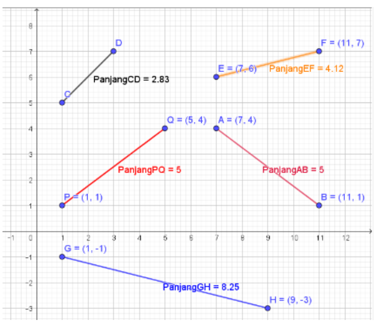


Gambar 3. 5. Ilustrasi Segmen, Rays, dan vektor

❖ Panjang garis lurus

Setelah mempelajari sistem koordinat kartesius dan posisi satu titik pada sub bab sebelumnya mengantarkan kita untuk memahami konsep dan konteks dari suatu garis lurus. Ketika diberikan dua titik yang berada pada posisi yang berbeda di atas sistem koordinat kartesius, misal titik $A(x_1, y_1)$ dan titik $B(x_2, y_2)$, maka jika kedua titik ini menjadi dua titik ujung oleh suatu garis, maka garis tersebut dikenal sebagai segmen. Dimana jarak terkecil antar dua titik tersebut dapat direpresentasikan dalam satu garis lurus dengan panjang dapat dinyatakan dalam rumusan berikut :

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Gambar 3. 6. Kedudukan dan panjang Segmen pada sistem Koordinat 2D

❖ **Kemiringan garis lurus**

Sebagaimana yang telah diketahui bahwa persamaan salah satu penyajian fungsi yang umum dijumpai. Dalam memahami suatu persamaan, maka kita perlu mengenal kembali bahwa persamaan dapat bersifat tertutup dan dapat pula bersifat terbuka, dalam hal ini persamaan yang bersifat tertutup memiliki kebenaran yang pasti (Benar atau Salah) misal $7 + 3 = 10$ merupakan persamaan tertutup lebih lanjut dikenal sebagai **kesamaan**, sedangkan persamaan yang bersifat terbuka nilai kebenarannya bergantung pada Himpunan Penyelesaian (HP). Persamaan yang bersifat terbuka inilah yang kemudian menjadi salah satu wujud penyajian fungsi.

Secara khusus Persamaan garis lurus bersifat persamaan yang terbuka, ciri-ciri persamaan terbuka adalah dalam persamaannya memuat variabel atau peubah. Oleh karena itu pada buku ini akan diuraikan kembali secara detail unsur unsur dalam persamaan khususnya persamaan garis. Persamaan garis yang dimaksudkan adalah persamaan garis lurus dalam bentuk :

$$\boldsymbol{y = mx + c} \qquad \text{(III.4)}$$

- ❖ Peubah $\boldsymbol{y}$ dikenal sebagai variabel yang bersifat terikat. Dalam sistem koordinat kartesius nilai dari variabel $\boldsymbol{y}$direpresentasikan oleh sumbu vertikal.
- ❖ Status $\boldsymbol{m}$ dalam persamaan dikenal sebagai **koefisien** dan dalam tinjauan geometrinya $\boldsymbol{m}$ merupakan gradien atau tingkat kemiringan dari garis. Nilai $\boldsymbol{m}$ berupa bilangan Real.
- ❖ Peubah $\boldsymbol{x}$ dikenal sebagai variabel bebas atau *independent variabel.* Dalam sistem koordinat kartesius nilai dari variabel $\boldsymbol{x}$direpresentasikan oleh sumbu Horizontal. Titik dari $\boldsymbol{x}$inilah yang menentukan nilai $\boldsymbol{y}$**.**
- ❖ Sedangkan $\boldsymbol{c}$dikenal sebagai suatu konstata yang juga menentukan nilai dari $\boldsymbol{y}$. Secara geometris konstanta ini dapat ditandai dari kedudukan titik yang memotong sumbu $\boldsymbol{y}$.

Masalah yang biasanya dihadapi pada pembelajaran persamaan adalah kebingungan terhadap perubahan simbol atau notasi-notasi dari persamaan.

Bentuk umum dari persamaan garis lurus $(\boldsymbol{III.4})$ dapat pula dituliskan dalam bentuk yang berbeda seperti pada persamaan berikut

$$\boldsymbol{L \equiv ax + by + c = 0} \qquad \text{(III.5)}$$

dimana $\boldsymbol{a, b, dan\ c}$ merupakan konstanta Real, sedangkan nilai $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ tidak bersama-sama bernilai nol.

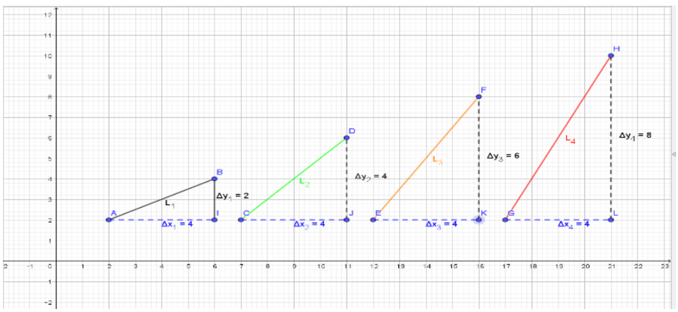
Dalam aplikasi geogebra diberikan secara spesifik bahwa garis yang direpresntasikan oleh persamaan garis, tidak dalam jenis segmen, namun dalam bentuk line, atau rays (sinar).

---

3. C. HUBUNGAN TITIK, GRADIEN DAN GARIS

Gradien dapat dipandang sebagai tingkat kecuraman atau kelandaian dari suatu garis lurus. Melalui nilai gradien dapat diketahui seberapa curam suatu garis , semakin besar gradien maka dapat dikatakan semakin curam suatu kemiringan garis atau semakin tegak, demikian sebaliknya, jika semakin kecil nilai gradiennya maka semakin landai kemiringan garisnya. Jika kedudukan garis ini berada dalam sistem koordinat kartesius, maka kemiringan suatu garis lurus dipengaruhi oleh panjang sisi dekat atau nilai mendatar dengan notasi $\Delta x = x_2 - x_1$, dan tinggi sisi hadap atau nilai tegak dengan notasi $\Delta y = y_2 - y_1$.

Berikut disajikan gambar sistem koordinat kartesius yang di dalamnya terdapat empat garis lurus yaitu garis $L_1; L_2; L_3\ dan\ L_4$ dengan kedudukan dan kemiringan yang berbeda :

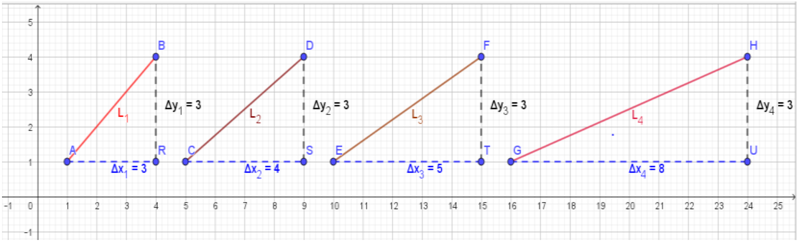


Gambar 3. 7. Kemiringan garis dengan nilai mendatar yang tetap dan nilai tegak yang berbeda

Pada gambar di atas garis L_1*(Hitam) ,* L_2*(Hijau),* L_3*(Orange) dan* L_4*(Merah) masing-masing memiliki nilai mendatar yang sama yaitu* $\Delta\mathrm{x} = 4$*, sedangkan nilai tegaknya masing-masing adalah* $\Delta\mathrm{y}_1 = 2$*,* $\Delta\mathrm{y}_2 = 4, \Delta\mathrm{y}_3 = 6$*, dan* $\Delta\mathrm{y}_4 = 8$*. Dengan nilai* $\Delta\mathrm{x}$

yang sama dan Δy yang berbeda memberikan hasil bahwa tingkat kemiringannya berbeda. Secara visual nampak bahwa semakin tinggi nilai tegak Δy suatu garis maka akan semakin tinggi tingkat kecuraman atau kemiringannya.

Berikut diberikan gambar 4 jenis garis pada kedudukan yang berbeda dan tingkat kemiringan yang berbeda yang diposisikan pada sistem koordinat kartesius yang sama.



Gambar 3. 8. Kemiringan garis dingan nilai tegak yang tetap

Berbeda dengan gambar sebelumnya, pada gambar ini menunjukkan 4 jenis garis dengan tingkat kecuraman yang berbeda. Pada gambar ini, nilai tegaknya diskenariokan memiliki nilai yang sama yaitu $\Delta x = 3$, sedangkan nilai mendatarnya dibuat dengan nilai yang berbeda yakni masing-masing $\Delta x_1 = 3,\ \Delta x_2 = 4, \Delta x_3 = 5,$ dan $\Delta x_4 = 8.$ Dengan nilai Δx yang berbeda dan Δy yang sama memberikan hasil bahwa tingkat kemiringannya berbeda. Secara visual nampak bahwa semakin panjang nilai mendatar Δx suatu garis maka akan semakin rendah tingkat kecuraman atau kemiringannya dalam hal ini semakin landai.

Dari dua ilustrasi tingkat kemiringan di atas, tingkat kemiringan suatu garis akan sulit dibedakan secara visual apabila perbedaan tingkat kemiringannya sangat kecil. Sehingga tingkat kemiringan suatu garis perlu untuk diketahui nilainya secara pasti. Nilai dari tingkat kemiringan dirumuskan dengan :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{(III.6)}$$

Kemiringan suatu garis lurus dapat dimaknai sebagai perbandingan antara tinggi sisi tegak terhadap panjang sisi mendatar.

Melalui rumusan ini diperoleh hubungan antara persamaan garis, gradien garis dan posisi titik-titik yang melewati garis. Hubungan-hubungan tersebut menjadi dasar dalam pembentukan persamaan garis.

- **Persamaan Garis Lurus Melalui Satu Titik dengan Gradien m**

  Selanjutnya Persamaan garis dengan mengetahui satu titik misal (x_1, y_1) dan nilai gradien m , Dengan memandang bahwa di range titik manapun yang dilaui oleh garis lurus maka akan mempunyai kemiringann yang sama :

  $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad \text{(III.7)}$$

  Sehinga, persamaan garisnya dapat dituliskan menjadi :

  $$(y - y_1) = m(x - x_1) \qquad \text{(III.8)}$$
  $$y = m(x - x_1) + y_1 \qquad \text{(III.9)}$$

- **Persamaan Garis Lurus Melaui Dua Buah Titik**

  Persamaan garis dapat ditentukan pula cukup dengan mengetahui dua titik misal (x_1, y_1) dan (x_2, y_2). Cara yang dapat dilakukan dapat dengan men cari nilai gradien dan konstantanya, dan dapat pula dengan memandang keseragaman gradian yang berlaku pada semua titik di dalam garis.

  1. Cara 1

     Misal (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dimana berada pada satu garis lurus. Seperti yang kita ketahui bahwa persamaan garis lurus secara umum adalah $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{mx} + \boldsymbol{c}$, sehingga dari dua titik di atas cukup kita mencari nilai gradien $\boldsymbol{m}$ dan konstanta $\boldsymbol{c}$. Dengan dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) kemudian dapat diperoleh kemiringannya dengan menggunakan persamaan (*III.7*).

     Sedangkan nilai $\boldsymbol{c}$ dapat diperoleh dengan mengambil satu titik yang diketahui misal (x_1, y_1) dan nilai gradien m yang diperoleh, sehingga :

     $$y_1 = mx_1 + \boldsymbol{c} \qquad \text{(III.10)}$$
     $$\boldsymbol{c} = y_1 - mx_1 \qquad \text{(III.11)}$$

  2. Cara 2

     Dengan mengedepankan prinsip atau Konsep bahwa dalam satu garis lurus mempunyai kemiringan yang sama pada semua sisinya, maka dapat dituliskan :

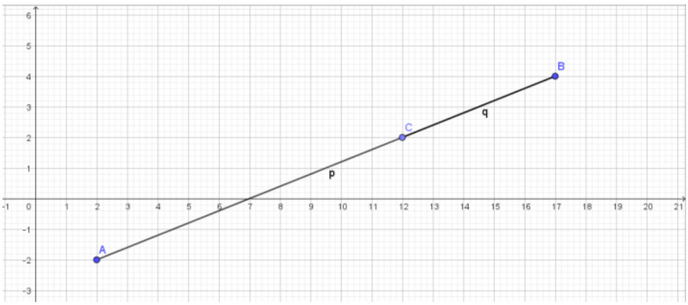
     $$\frac{\mathrm{y} - y_1}{\mathrm{x} - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{(III.12)}$$
     $$\frac{\mathrm{y} - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{\mathrm{x} - x_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{(III.13)}$$

3. D. KEDUDUKAN TITIK TERHADAP GARIS

Kedudukan titik terhadap garis dapat dibedakan ke dalam dua jenis, yakni titik dilalui garis dan titik tidak dilalui garis.

❖ Titik dilalui garis

Ketika titik dilalui garis, maka jarak antara titik dengan garis adalah 0. Misal dalam gambar (3.9) berikut diberikan suatu garis yang kedua titik ujungnya adalah titik A dan titik B, selanjutnya diberikan titik C tepat berada pada garis yang menghubungkan A dan B, dengan demikian jarak antara titik C dengan garis yaitu bernilai 0. Dengan adanya titik C, membentuk 2 segmen garis yang saling berpotongan, misal segmen garis f dan segmen garis g. Berikut visualisasi yang menggambarkan kondisi titik dilalui garis.



Gambar 3. 9. Titik yang dilalui oleh garis

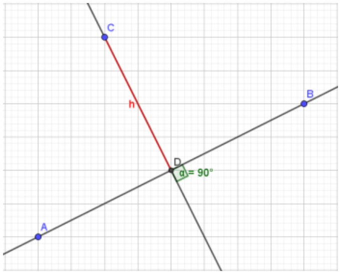
Rumusan matematis yang menarik dalam kedudukan titik yang dilalui garis adalah bagaimana menentukan kedudukan titik yang dilalui oleh garis hanya dengan mengetahui kedudukan titik ujung dan perbandingan panjang antar kedua segmen. Dalam buku ajar yang ditulis oleh Nanda Ariztia Risky (2018)[19], dinyatakan bahwa : Misal diberikan dua titik berbeda, yaitu $A(x_1, y_1)$, dan $B(x_2, y_2)$. Kedua titik tersebut menjadi titik ujung dan membentuk satu segmen garis. Selanjutnya suatu titik $C(x_3, y_3)$ diletakkan dalam segmen garis tersebut, dengan perbandingan panjang $p = |AC|$; $q = |CB|$ yang dinyatakan dengan $p{:}q$. Kedudukan titik $C(x_3, y_3)$ dapat ditentukan dengan menggunakan formula formula berikut :

$$C(x_3, y_3) = \left(\frac{p \cdot x_2 + q \cdot x_1}{p+q}, \frac{p \cdot y_2 + q \cdot y_1}{p+q}\right) \qquad \text{(III.14)}$$

[19] Nanda Arista Rizki, *Analytic Geometry (Geometri Analitik)*, 2018.

❖ Titik tidak dilalui garis

Sedangkan, jika titik diluar garis maka jarak terkecilnya dapat dipandang sebagai panjang garis tegak lurus yang menghubungkan titik dengan garis, sebagai ilustrasi dapat kita lihat pada gambar berikut ini.



Gambar 3. 10. Jarak titik terhadap garis

Pada gambar 3.10 menunjukkan suatu garis yang melalui A dan B namun tidak melalui titik C. Pada kondisi ini, panjang minimum titik C terhadap garis yang melalui titik A dan B dapat ditentukan. Ada beberapa hal yang baiknya kita perhatikan dalam membentuk rumusan penentuan jarak titik terhadap garis :

1. Kedudukan titik dan garis yang ditinjau diketahui, Misal titik yang ditinjau berada di $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$akan diukur jaraknya terhadap garis $\boldsymbol{L} \coloneqq \boldsymbol{Mx} + \boldsymbol{Ny} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$.
2. Perlu untuk membuat persamaan garis yang melalui titik yang ditinjau, dan tegak lurus dengan garis yang diberikan.(Jadi telah ada dua persamaan garis yang saling tegak lurus).
3. Menentukan titik potong dari kedua persamaan garis tersebut. Misal titik potong $(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$tersebut tidak diketahui, namun memenuhi persamaan lingkaran pertama dan kedua.
4. Kita akan menentukan nilai $\boldsymbol{x_2}$ dan $\boldsymbol{y_2}$ melalui teknik aljabar : pindah ruas, pengelompokan, subtitusi, dan penyederhanaan.
5. Jarak antar titik tinjauan dengan titik potong yang dihasilkan, dihitung dengan menggunakan jarak antar dua titik dengan rumusan

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \qquad \text{(III.15)}$$

Untuk rincian pembentukan rumusnya diuraikan dalam tabel berikut :

Pada persamaan garis pertama yag diberikan diubah ke dalam bentuk umumnya. Dengan ini dapat dilihat besaran dan arah gradien dari garis tersebut, misal gradiennya m_1.	$L \coloneqq Mx + Ny + C = 0$ $Ny = -Mx - C$ $\Rightarrow y = -\frac{M}{N}x - \frac{C}{N}$ **(III.16)** Persamaan garis 1 dengan $m_1 = -\frac{M}{N}$
Selanjutnya kita membentuk persamaan garis 2 yang tegak lurus dengan garis L , dengan ketentuan gradien $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.	Dengan gradien garis $m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{N}{M}$, diperoleh persamaan garis 2 berikut : $(y - y_1) = m_2(x - x_1)$ $(y - y_1) = \frac{N}{M}(x - x_1)$ **(III.17)**
Misalkan titik potongnya adalah (x_2, y_2), berarti titik tersebut memenuhi persamaan garis 1dan garis 2. Ketika kita tinjau pada persaman garis dua, maka nilai $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ disubtitusi dengan $\mathbf{x_2}$ dan $\mathbf{y_2}$	$y_2 = -\frac{M}{N}x_2 - \frac{C}{N}$ (Pers.garis 1) $(y_2 - y_1) = \frac{N}{M}(x_2 - x_1)$(Pers.garis 2) $y_2 = \frac{N}{M}(x_2 - x_1) + -y_1$ (Pindah Ruas) **(III.18)**
Nilai $\mathbf{y_2}$pada persamaan garis 1, disubtitusi pada $\mathbf{y_2}$ **di** persamaan garis 2 untuk menyatakan nilai $\mathbf{x_2}$ dan $\mathbf{y_2}$ secara terpisah	$\left(-\frac{M}{N}x_2 - \frac{C}{N} - y_1\right) = \frac{N}{M}(x_2 - x_1)$ $-y_1 = \frac{N}{M}(x_2 - x_1) + \frac{M}{N}x_2 + \frac{C}{N}$ **(III.19)**
Teknik pengelompokan	$\frac{N}{M}x_1 - y_1 - \frac{C}{N} = \left(\frac{N}{M} + \frac{M}{N}\right)x_2$ **(III.20)**
Menyatakan nilai $\mathbf{x_2}$ yang tidak lagi memuat nilai $\mathbf{y_2}$ dan variavel $x\ dan\ y$	$x_2 = \dfrac{\frac{N}{M}x_1 - y_1 - \frac{C}{N}}{\left(\frac{N}{M} + \frac{M}{N}\right)}$ **(III.21)**

Teknik penyederhanaan : pembilang dan penyebut dikalikan dengan $\mathbf{MN}$ (Tidak merubah nilai)	$x_2 = \frac{\frac{N}{M}x_1 - y_1 - \frac{C}{N}}{\left(\frac{N}{M}+\frac{M}{N}\right)} \times \frac{MN}{MN}$ **(III.22)**
Bentuk sederhana dari $\mathbf{x_2}$	$x_2 = \frac{N^2x_1 - MNy_1 - CM}{(N^2+M^2)}$ **(III.23)**
Selanjtnya nilai $\mathbf{x_2}$ disubtitusi ke dalam persamaan garis 1	$y_2 = -\frac{M}{N}\left(\frac{N^2x_1 - MNy_1 - CM}{(N^2+M^2)}\right) - \frac{C}{N}$ **(III.24)**
Bentuk sederhana dari $\mathbf{y_2}$ dengan mengalikan $-\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$ pada pembilang.	$y_2 = \frac{-MNx_1 + M^2y_1 + \frac{CM^2}{N}}{(M^2+N^2)} - \frac{C}{N}$ **(III.25)**
Dengan nilai nilai x_2 dan y_2 yang telah terpisah, selanjutnya dapat kita dengan mudah menghitung nilai $\boldsymbol{d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Untuk lebih mudahnya penentuan $(x_2 - x_1)$ dan $(y_2 - y_1)$ diselesaikan secara terpisah	
Penentuan bentuk sederhana dari : $\boldsymbol{x_2 - x_1}$ dilakukan dengan teknik menyamakan penyebut dan pengelompokan. Teknik tersebut dilakuakn dengan dasar kaidah komutatif, asosiatif, dan distributif.	$x_2 - x_1 = \frac{N^2x_1 - MNy_1 - CM}{(M^2+N^2)} - x_1$ $x_2 - x_1 = \frac{N^2x_1 - MNy_1 - CM}{(M^2+N^2)} - \frac{(x_1N^2 + x_1M^2)}{(M^2+N^2)}$ $x_2 - x_1 = \frac{-x_1M^2 - MNy_1 - CM}{(M^2+N^2)}$ $x_2 - x_1 = -M\left(\frac{Mx_1 + Ny_1 + C}{(M^2+N^2)}\right)$ **(III.26)**
Penentuan bentuk sederhana dari : $\mathbf{y_2 - y_1}$ dilakukan dengan teknik menyamakan penyebut, sistem coret yang berbeda tanda dan pengelompokan.	$y_2 - y_1 = \left(\frac{-MNx_1 + M^2y_1 + \frac{CM^2}{N}}{(M^2+N^2)}\right) - \frac{C}{N} - y_1 =$ $\left(\frac{-MNx_1 + M^2y_1 + \frac{CM^2}{N}}{(M^2+N^2)}\right) +$ $\frac{-\frac{C}{N}(M^2+N^2) - y_1M^2 - y_1N^2}{(M^2+N^2)}$ **(III.27)**

Penyederhanaan bentuk $\mathbf{y_2 - y_1}$ melalui pengelompokan

$$y_2 - y_1 = \left(\frac{-MNx_1 - CN - y_1N^2}{(M^2 + N^2)}\right)$$

$$y_2 - y_1 = -N\left(\frac{Mx_1 + C + y_1N}{(M^2 + N^2)}\right)$$

(III.28)

Selanjutnya pada tahap akhir, dengan mengetahui nilai $(\mathbf{x_2 - x_1})$ dan nilai $\mathbf{y_2 - y_1}$. Makan nilai d dapat ditentukan melalui teknik aljabar.

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = M^2\frac{(Mx_1 + Ny_1 + C)^2}{(M^2 + N^2)^2} + N^2\frac{(Mx_1 + Ny_1 + C)^2}{(M^2 + N^2)^2}$$

$$d^2 = (M^2 + N^2)\frac{(Mx_1 + Ny_1 + C)^2}{(M^2 + N^2)^2}$$

$$d^2 = \frac{(Mx_1 + Ny_1 + C)^2}{(M^2 + N^2)}$$

$$d = \sqrt{\frac{(Mx_1 + Ny_1 + C)^2}{(M^2 + N^2)}}$$

$$d = \frac{|Mx_1 + Ny_1 + C|}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$$

(III.29)

Akhirnya diperoleh rumusan jarak titik terhadap garis sebagai berikut :

$$\boldsymbol{d = \frac{|Mx_1 + Ny_1 + C|}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}} \qquad \text{(III.30)}$$

Rumusan ini akan diimplementasikan pada berbagai perhitungan jarak titik terhadap garis pada materi irisan kerucut lingkaran, parabola, elips dan hiperbola.

Contoh Soal 4.1 : Penggunaan rumusan jarak titik ke garis

1. Jika diberikan suatu garis lurus yang direpresentasikan oleh persamaan $x + 4y - 16 = 0$ dan diberikan suatu titik A yang berkedudukan di $(9,6)$, tentukan jarak minimum antara titik A dengan garis lurus tersebut !

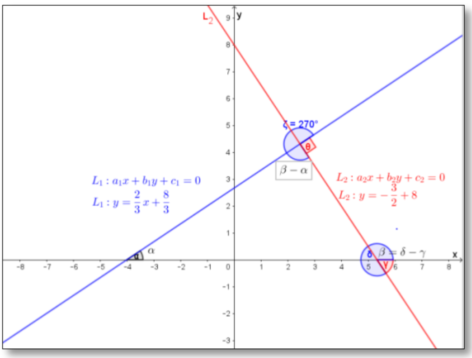
Dari soal di atas dapat diidentifikasi nilai $M, N, C, x_1, y_1,$ secara prosedural jarak titik dengan garis yang diberikan dapat ditentukan dari persamaan **(III.30)**

$$d = \frac{|Mx_1 + Ny_1 + C|}{\sqrt{(M^2 + N^2)}} = \frac{|1(9) + 4(6) - 16|}{\sqrt{(1^2 + 4^2)}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = 4.12$$

Jadi jarak titik $A(9,6)$ dengan garis $x + 4y - 16 = 0$ adalah 4.12 satuan

3. E. SUDUT ANTARA DUA GARIS LURUS

Sebelum menguraikan jenis hubungan antara dua garis maka terlebih dahulu perlu untuk menguraikan konsep sudut yang terbentuk dari dua garis lurus. Hubungan antara dua garis lurus yang dapat membentuk sudut adalah garis yang saling berpotongan. Penentuan besar sudut antara dua garis berpotongan dapat dikembangkan dengan meninjau gradien dari kedua garis.



Gambar 3. 11. Dua garis saling tegak lurus

Pandang garis yang ditinjau adalah $L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dan $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2$. Garis L_1 dan L_2 memotong sumbu x yang membentuk sudut α untuk perpotongan garis L_1dengan sumbu x dan sudut β oleh perpotongan L_2dengan sumbu y. Dengan menggunakan konsep perbandingan sisi hadap dengan sisi dekat, maka besar sudut dari masing-masing titik sudut dapat ditentukan melalui konsep gradien.

Pada gambar di atas, jika ditinjau dari sudut α maka perbandingan sisi tegak terhadap sisi dekat dapat dituliskan sebagai fungsi trigonometri, dalam hal ini :

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m_1 \quad \text{(III.31)}$$

$$\tan(\beta) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m_2 \quad \text{(III.32)}$$

Dengan menggunakan konsep sudut yang saling bersebrangan maka besar sudut $\theta = \pm(\alpha - \beta)$.

$$\tan(\theta) = \pm\tan(\alpha - \beta) = \pm\frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad \text{(III.33)}$$

Selanjutnya dengan melihat hubungan antar sudut dengan masing-masing nilai kemiringan dapat ditulis dengan

$$\tan(\theta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad \text{(III.34)}$$

Sehingga untuk nilai θ dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai $\tan(\theta)$ pada persamaan **(III.34)**, diperoleh

$$\text{sudut}(\theta) = \begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{2}(lancip); jika \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} > 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2}(siku - siku); jika \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 0 \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi(tumpul); jika \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} < 0 \end{cases}$$

3. F. HUBUNGAN ANTARA DUA GARIS

Pembahasan mengenai hubungan antara dua garis lurus, dapat dikatakan sebagai tinjauan terhadap kedudukan satu garis lurus terhadap garis lurus yang lain. Jika dua garis lurus dihubungkan maka akan ada 4 kemungkinan yang dapat dihasilkan yaitu :

1. Dua garis saling sejajar
2. Dua garis saling berimpit
3. Dua garis saling berpotongan
4. Dua garis saling Tegak Lurus

Empat kondisi di atas dipengaruhi oleh tingkat kemiringan m oleh dua garis, konstanta c yang memotong sumbu y oleh dua garis. Untuk lebih jelasnya kita akan meninjau kedudukan dua garis yang memiliki direpresentasikan dalam dua persamaan yang berbeda misal L_1 dan L_2 dengan persamaan sebagai berikut :

$$L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad \text{(III.35)}$$

$$L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad \text{(III.36)}$$

❖ **Tinjauan Aljabar dua garis lurus saling sejajar**

Dua garis saling sejajar, dapat dijelaskan secara gamblang bahwa *apabila dua garis ditarik hingga panjang yang tak berhingga pada kedua ujungnya, tidak akan saling berpotongan.* Konsep kesejajaran dua garis dapat terpenuhi apabila memiliki kemiringan yang sama dan mempunyai titik potong terhadap sumbu-y yang berbeda.

Melalui konsep kesejajaran, maka dari persamaan (III.35) dan (III.36) dikatakan saling sejajar jika kemiringan L_1 misal m_1 sama dengan kemiringan L_2 misal m_2.

Tinjau :

$$L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0 \rightarrow y = \frac{-a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \qquad \text{(III.37)}$$

$$L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0 \rightarrow y = \frac{-a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \qquad \text{(III.38)}$$

Sehingga diperoleh kemiringan masing-masing garis adalah $m_1 = \frac{-a_1}{b_1}$ dan $m_2 = \frac{-a_2}{b_2}$. Sebagaimana yang dijelaskan sebelumnya bahwa untuk sejajar maka keduanya memiliki gradien yang sama $m_1 = m_2$, sehingga diperoleh hubungan antar koefisien dari kedua persamaan garis adalah

$$\frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2} \rightarrow \frac{-a_1}{-a_2} = \frac{b_1}{b_2} \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \qquad \text{(III.39)}$$

Syarat kedua jika nilai konstanta c sebagai titik potong terhadap sumbu y berbeda, dalam hal ini dapat dituliskan hubungan antar koefisien dan konstanta dari kedua persamaan diperoleh :

$$k_1 = -\frac{c_1}{b_1} \neq k_2 = -\frac{c_2}{b_2} \Longrightarrow \frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2} \Longrightarrow \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Longrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \qquad \text{(III.40)}$$

Selanjutnya tinjauan besar sudut dari kedua garis sejajar dapat dilakukan dengan kembali melihat hubungan antara Gradien, koefisien dan konstanta dari masing-masing persamaan.

Pandang hubungan antar koefisien dua garis sejajar adalah

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$
$$\Longrightarrow \frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2}$$
$$\Longrightarrow m_1 = m_2$$

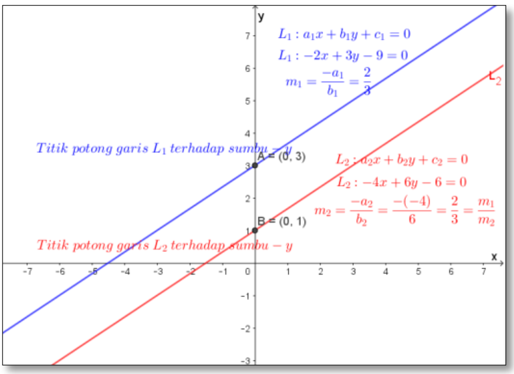
Berdasarkan pembahasan pada sub bab sebelumnya tentang sudut yang dihasilkan dari dua garis yang berpotongan dapat dinyatakan sebagai hubungan antar gradien garis. Dengan ini kita dapat menunjukkan besar sudut jika saling sejajar menggunakan persamaan (III.34).

$$\tan(\theta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Karena $m_1 = m_2$ maka

$$\tan(\theta) = \frac{0}{1} = 0$$
$$\arctan(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = 0$$

Sehingga dapat dikatakan bahwa sudut yang terbentuk dari dua garis sejajar adalah $\theta = 0$. Berikut ilustrasi hubungan dua garis sejajar melalui gambar :



Gambar 3. 12. Ilustrasi dua garis saling berimpit

❖ **Tinjauan Aljabar garis saling berimpit**

Dua garis yang saling berimpit dapat dimaknai bahwa titik-titik yang melewati kedua garis tersebut juga berimpit. Secara visual, dua garis berimpit membentuk satu kesatuan garis dengan tingkat kemiringan yang sama. Jika kedudukan garis-garis tersebut berada pada sistem koordinat kartesius, maka dapat dikatakan konstanta c dari kedua garis tersebut mengakibatkan memotong sumbu-y pada titik yang sama.

Dengan mengambil dua contoh persamaa garis yang digunakan sebelumnya yaitu persamaan **(III.35)** dan **(III.36)**. L_1dan L_2 diakatakan saling berimpit jika rasio (μ) antar koefisien dari kedua persamaan tersebut sama atau dapat dituliskan dengan $\mu = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Dengan rasio tersebut diperoleh :

$$a_1 = \mu a_2; b_1 = \mu b_2; c_1 = \mu c_2 \quad \textbf{(III.41)}$$

Untuk menunjukkan kebenaran bahwa : $L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ dan $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$, L_1dan L_2 diakatakan saling berimpit maka harus ditunjukkan rasio (μ) antar koefisien dari kedua persamaan tersebut sama atau dapat dituliskan dengan :

$$\mu = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \textbf{(III.42)}$$

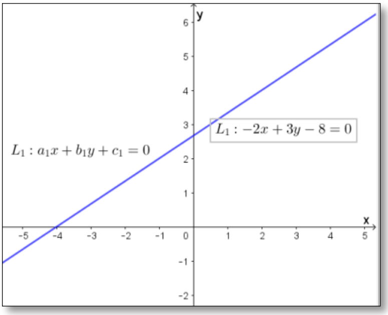
Dengan konsep ini, dapat dikatakan bahwa L_1merupakan kombinasi linear dari L_2.dapat dilihat pada pembuktian berikut. Misalkan diambil titik sembaran (x_0, y_0) yang melewati garis $L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Sehingga dapat dituliskan

$$L_1 \equiv \mu a_2x_0 + \mu b_2y_0 + \mu c_2 = 0 \quad \textbf{(III.43)}$$

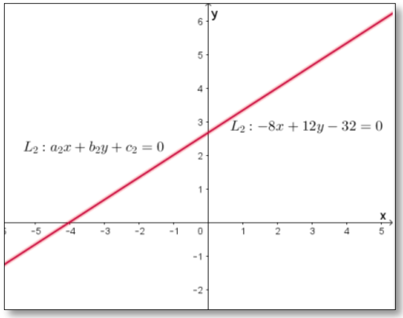
$$\Longrightarrow L_1 \equiv \mu(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0 \quad \textbf{(III.44)}$$

$$\Longrightarrow L_1 \equiv (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0 \equiv L_2 \quad \textbf{(III.45)}$$

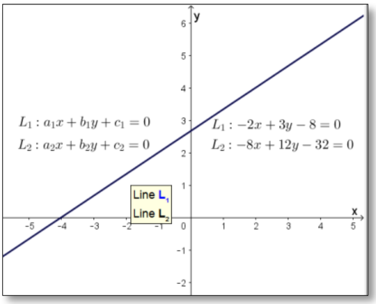
Melalui hasil ini dapat dikatakan bahwa (x_0, y_0) juga melewati garis L_2. Dengan dalil tersebut maka titik berapapun yang diambil dan memenuhi persamaan L_1maka mestilah juga memenuhi persamaan L_2. Dengan adanya perbedaan jenis garis antara segmen garis dan garis *rays* maka dapat dikatakan bahwa jika segmen garis dan garis raysnya saling berimpit maka segmen garis merupakan himpunan bagian dari garis raysnya, berikut ilustrasinya :



Gambar 3. 13. Garis pertama dengan persamaan $L_1 \equiv -2x + 3y - 8 = 0$



Gambar 3. 14. Garis kedua dengan persamaan $L_1 \equiv -8x + 12y - 32 = 0$



Gambar 3. 15. Garis Pertama dan kedua yang saling berimpit

❖ Tinjauan garis saling tegak Lurus

Hubungan antara dua garis yang saling tegak lurus secara standar dapat dilihat menyerupai perpotongan antara $sumbu - x$ dan $sumbu - y$. Hasil perpotongannya dikenal dengan titik pusat dan membentuk sudut siku-siku terhadap 4 kedudukan kuadran. Oleh karena itu, dapat dimaknai bahwa dua garis dikatakan saling tegak lurus jika kedua garis tersebut membentuk tepat satu titik potong dan dari titik potong tersebut terbentuk 4 bagian titik sudut dengan besar yang sama yakni sudut $90°$ atau yang dikenal dengan sudut siku-siku.

Jika kedudukan garis-garis tersebut berada pada sistem koordinat kartesius, misal dengan mengambil dua contoh persamaan **(III.35)** dan **(III.36)** sebelumnya yaitu

$$L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0; \; L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

L_1dan L_2 dikatakan saling tegak lurus jika Rasio dari konstanta-konstanta yang bersesuaian dapat dinyatakan dengan :$\frac{a_1}{a_2} = -\frac{b_1}{b_2}$

Hubungan antar gradiennya dapat dituliskan dengan

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}; \qquad \text{(III.46)}$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}; \qquad \text{(III.47)}$$

$$m_1 m_2 = -1 \qquad \text{(III.48)}$$

Sehingga diperoleh kemiringan masing-masing garis adalah $m_1 = \frac{-a_1}{b_1}$ dan $m_2 = \frac{-a_2}{b_2}$. Kedua garis tersebut dapat dikatakan saling tegak lurus jika hubungan gradiennya dapat dinyatakan dengan $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, dari hubungan ini diperoleh :

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{-a_1}{b_1}} = \frac{b_1}{a_1} \qquad \text{(III.49)}$$

di satu sisi diketahui bahwa $m_2 = \frac{-a_2}{b_2}$, sehingga diperoleh

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{-a_2}{b_2} \qquad \text{(III.50)}$$

$$b_1 b_2 = -a_1 a_2 \qquad \text{(III.51)}$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \qquad \text{(III.52)}$$

Dari penjabaran hubungan antar gradien dari kedua persamaan garis diperoleh syarat berdasarkan hubungan antar koefisien pada masing-masing persamaan. Dalam hal ini, dua persamaan garis dikatakan saling tegak lurus jika hubungan antar koefisiennya memenuhi $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$. Sehingga secara teknis apabila dua garis akan dibuktikan bahwa saling tegak lurus maka cukup dengan membuktkan bahwa hubungan antar koefisiennnya memenuhi $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

Pembuktian ini dapat dilakukan dengan :

Misalkan θ merupakan sudut yang terbentuk dari titik potong dua garis dengan kemiringan m_1 dan m_2. Berdasarkan sub pembahasan mengenai sudut yang dibentuk oleh dua garis yang mempunyai kemiringan m_1 dan m_2 diberikan pada persamaan persamaan (III.34).

$$\tan(\theta) = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Dengan ketentuan sebagai berikut :

$$sudut(\theta) = \begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{2}(lancip); jika \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} > 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2}(siku - siku); jika \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 0 \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi(tumpul); jika \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} < 0 \end{cases}$$

Dengan mengetahui bahwa dua garis saling tegak lurus jika membentuk sudut siku-siku dalam hal ini $\theta = \frac{\pi}{2}$, di satu sisi nilai dari $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$.

Sehingga hubungan antar gradien ini dapat dituliskan menjadi :

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \infty \qquad \text{(III.53)}$$

Dari persamaan ini maka mestilah nilai penyebut $1 + m_1 m_2$ harus bernilai 0. Sehingga hubungan antar gradien dapat ditulis menjadi :

$$1 + m_1 m_2 = 0 \qquad \text{(III.54)}$$

$$m_1 m_2 = -1 \qquad \text{(III.55)}$$

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \qquad \text{(III.56)}$$

Sedangkan hubungan antar koefisien kembali diperoleh menjadi :

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{-a_2}{b_2} \qquad \text{(III.57)}$$

$$\Longrightarrow b_1 b_2 = -a_1 a_2 \qquad \text{(III.58)}$$

$$\Longrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \qquad \text{(III.59)}$$

Setelah dibuktikan bahwa hubungan antar koefisiennnya memenuhi $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. Sehingga secara teknis apabila dua garis dapat dikatakan saling tegak lurus.

Pandang, hubungan antar konstanta dari persamaan garis yang saling tegak lurus :

$$L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0 \rightarrow y = \frac{-a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \qquad \text{(III.60)}$$

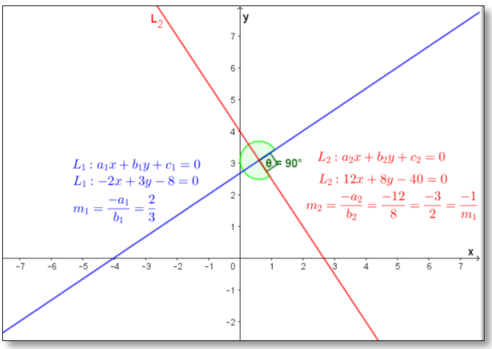
$$L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0 \rightarrow y = \frac{-a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \qquad \text{(III.61)}$$

berikut contoh persamaan dari dua garis yang saling tegak lurus :

$$L_1 \equiv -2x + 3y - 8 = 0 \rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \qquad \text{(III.62)}$$

$$L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0 \rightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{40}{8} \qquad \text{(III.63)}$$

Dari persamaan (*III.62*) dan (*III.63*) dua garis yang saling tegak lurus dapat diilustrasikan melalui gambar berikut:



Gambar 3. 16. Gambar garis tegak lurus dan persamaannya

3. G. BIDANG

Pada pembahasan titik dan garis, kita telah melihat hubungan-hubungannya baik melalui grafik maupun melalui representasi aljabarnya. Dari pembahasan sebelumnya titik telah dipahami secara intuitif seabagi objek yang tak berdimensi, sedangkan garis adalah wadah bagi kumpulan titik-titik yang membentuk dimensi panjang. Pada sub bab kali ini kita akan melihat objek geometris pada dimensi yang lebih tinggi, dalam hal ini **bidang.** Dimensi dari bidang sendiri, terdiri atas panjang dan lebar namun tidak memiliki ketebalan. Sehingga luas dari suatu permukaan bidang bergantung pada batasan-batasannya. Perlu pula untuk dipahami, bahwa susunan-susunan segmen garis tidak dapat merepresentasikan bidang secara aljabar. Sehingga penggambaran bidang dalam sistem koordinat kartesius dua dimensi, sulit untuk dilakukan. Representasi aljabar dari suatu bidang dapat dituliskan dengan :

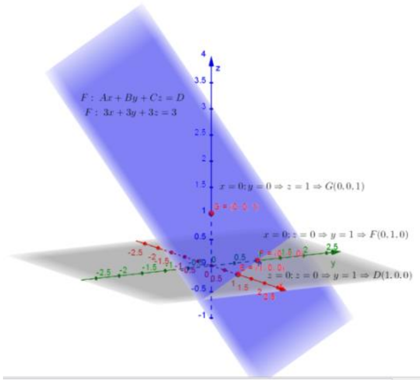
$$Ax + By + Cz = D\ , dimana:\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \qquad \text{(III.64)}$$

Melalui persamaan ini, dapat dijelaskan bahwa koefisien bidang $A, B\ dan\ C$ serta konstanta D, membentuk hubungan yang memenuhi titik (x, y, z) . dapat digambarkan pada sistem koordinat kartesius 3 Dimensi. Berikut contohnya :

Misal untuk persamaan : $3x + 3y + 3z = 3$.

Jika $y = 0; z = 0$, maka $3x = 3 \Longrightarrow x = 1$

diperoleh pasangan titik adalah $(1,0,0)$. Demikian halnya untuk $x = 0; z = 0 \Longrightarrow y = 1$ diperoleh pasangan titik $(0,1,0)$. $x = 0; y = 0 \Longrightarrow z = 1$ diperoleh pasangan titik $(0,0,1)$.

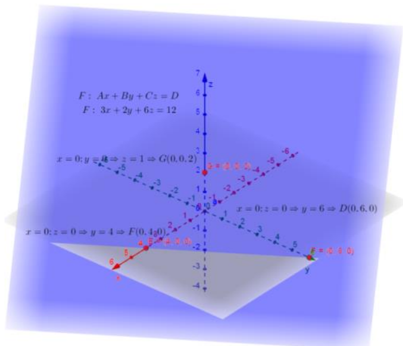


Gambar 3. 17. Bidang yang dihasilkan melalui aplikasi geogebra

Misal untuk persamaan : $3x + 2y + 6z = 12$.

Jika $y = 0; z = 0$, maka $3x = 12 \Longrightarrow x = 4$

diperoleh pasangan titik adalah $(4,0,0)$. Demikian halnya untuk $x = 0; z = 0 \Longrightarrow y = 6$ diperoleh pasangan titik $(0,6,0)$. $x = 0; y = 0 \Longrightarrow z = 1$ diperoleh pasangan titik $(0,0,2)$.



Gambar 3. 18. Bidang pada sumbu koordinat 3D

3. H. EKSPLORASI TITIK, GARIS, DAN BIDANG PADA GEOGEBRA

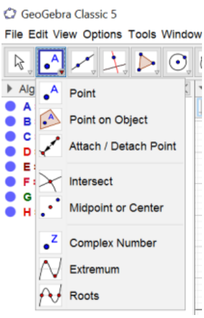
Di dalam aplikasi geogebra dilengkapi tools-tools yang memudahkan kita untuk mengeksplorasi titik, garis dan bidang. Pada gambar-gambar sebelumnya, titik dan garis dibuat pada aplikasi geogebra. Pada aplikasi ini, kita tidak hanya dapat menggambarkan, namun kita dapat mengeeksplorasi unsur-unsur matematis yang melekat pada titik, garis dan bidang.

❖ Eksplorasi Titik pada geogebra

Dalam hal ini, pada titik kita dapat mengetahui kedudukan pada sistem koordinat 2D, dan 3D, selain itu kita dapat pula mengeksplorasi kedudukan antar titik, baik melalui penggunaan toolsnya secara langsung maupun dengan menggunakan perhitungan jarak. Gambar berikut menunjukkan tools-tools pada geogebra untuk menggambarkan titik, diantaranya :

1. Point : dengan tools ini, kita dapat menempatkan titik di atas sistem koordinat di posisi manapun.
2. Point of object
3. Attach
4. Intersect : melalui tools ini kita dapat menentukan titik potong antar garis, antara garis dan bidang maupun antara bidang dengan bidang
5. Midpoint center : dikgunakan untuk memplot suatu titik yang membagi dua kedudukan titik
6. Complex number
7. Roots
8. Extremum

Secara otomatis penamaan titik pada aplikasi geogebra berupa huruf Kapital dengan menyesuaikan penggunaan huruf-huruf yang sudah ada.

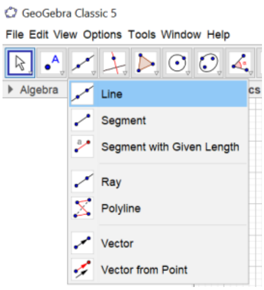


Gambar 3. 19. Tipe-tipe titik (point) pada aplikasi geogebra

Eksplorasi mengenai titik dalam buku ini akan ditnjau pada penentuan kedudukan titik terhadap garis dan bidang-bidang oleh irisan-irisan kerucut. Seperti kedudukan titik terhadap lingkaran, terhadap parabola, terhadap elips dan terhadap hiperbola. Kita tidak hanya akan meninjau pada visualisasi geometrisnya, namun kita akan melihat bagaimna tinjauan aljabarnya, atau bagaimna persamaan-persamaan umumnya dibentuk, sehingga dapat menjadi rumusan di dalam menentukan kedudukan titik tanpa menggambarkannya.

❖ Eksplorasi Garis pada geogebra

Aplikasi geogebra juga memberikan secara lengkap tools yang memungkinkan pengguna untuk mengeksplorasi jenis-jenis garis. Sebagaimana garis yang telah dipelajari pada sub bab sebelumnya bahwa garis lurus mempunyai jenis-jenis yang memiliki karaktersitik sendiri. Pada aplikasi geogebra, garis lurus dibedakan atas Line, Segmen, Ray, Polyline, dan vektor, hal ini dapat dilihat dengan mengklik tombol line pada menu utama.



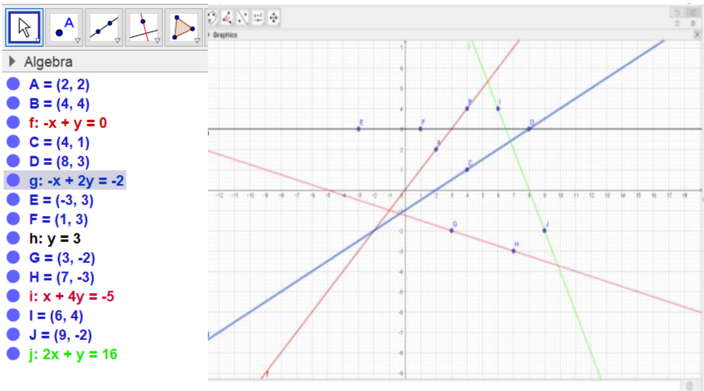
Gambar 3. 20. Tipe-tipe garis dalam geogebra

Dalam meninjau jenis-jenis garis tersebut maka hal yang perlu kita lihat bagai karakter grafiknya, dan bagaimana karakter aljabarnya.

a. Eksplorasi Line

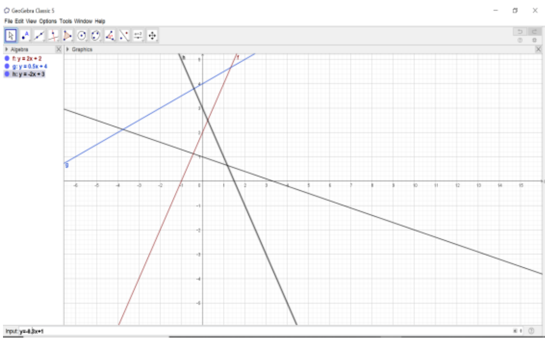
Line sendiri dapat diartikan sebagai garis, namun dalam mata kuliah ini, sangat penting bagi kita untuk membedakan line dengan jenis garis lainnya. Dari tinjauan **grafik**, line ini dapat digambarkan dengan memilih dua titik sembarang. Dua titik yang dipilih ini kemudian akan dilalui oleh garis yang kedua ujungnya tidak dapat ditentukan. Dengan kata lain, penggambaran garis tipe line ini pada geogebra diambil pada pasangan himpunan semua bilangan real yang memenuhi persamaan garis dan melalui kedua titik yang dipilih sebelumnya. Dari garis tersebut, mempunyai kemiringan yang tetap. Berikut digambarkan beberapa pasangan titik yang membentuk line yang berbeda-beda.

Hal yang perlu diketahui pula adalah **representasi aljabarnya**, yakni dapat dilihat pada kolom aljabarnya. Dapat dilihat bahwa geogebra begitu prsesisi dan praktis bagi kita untuk memahami interpretasi aljabar dari suatu gambar line. Ataupun sebaliknya, interpretasi geometri atas persamaan aljabarnya. Setiap line yang dibuat dapat pula dimodifikasi sesuai dengan kebutuhan seperti warna, nama fungsi, atau format penulisan persamaanya. Berikut diberikan 5 pasang titik yang dilalui oleh line yang berbeda-beda.



Gambar 3. 21. Representasi aljabar dan geometris beberapa ruas line

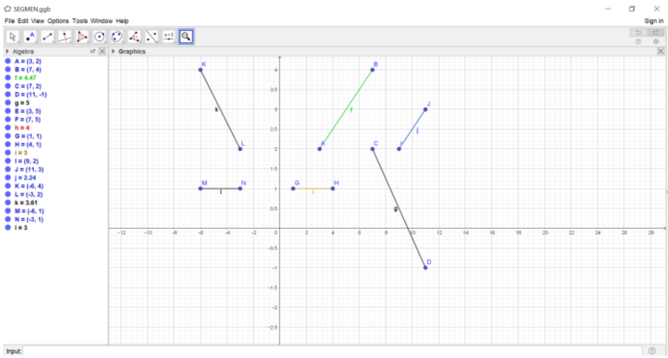
Hal yang lain yang perlu dipahami pada penggambaran line yaitu, garis tipe line dapat digambar tanpa melalui dua titik. Namun dengan mengetikkan persamaan garis di kotak input sesuai dengan aturan penulisan. Secara standar, kotak input menerima perintah penulisan fungsi secara umum yaitu $y = mx + c$. Berikut gambar line yang dimasukkan melui input persamaan.



Gambar 3. 22. Penggambaran line melalui kotak input (bar input)

b. Segment

Jika kita melihat bentuk grafik dari line, maka terlihat bahwa line tidak mempunyai titik ujung. Berbeda dengan segmen, segmen dapat dipahami sebagai satu ruas garis lurus yang mempunyai dua titik ujung. Dalam menggambarkan segmen pada geogebra juga dibutuhkan dua kedudukan titik untuk dihubungkan. Seperti pada gambar berikut, digambarkan 6 pasang titik yang masing masing pasangan titik terhubung oleh satu segmen garis.

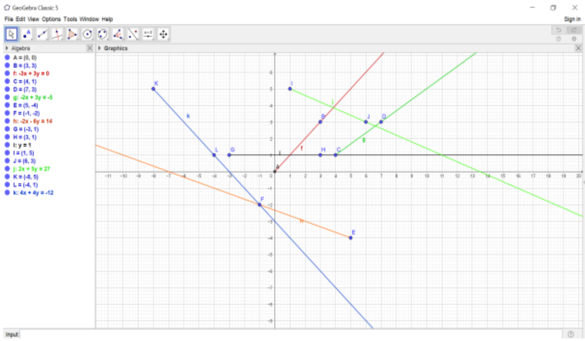


Gambar 3. 23. Segmen garis

Selain itu, hal yang berbeda antara **segmen** dan garis, yaitu pada representasi aljabarnya. Pada kolom aljabar, terlihat bahwa segmen tidak direpresentasikan dalam bentuk persamaan, namun satu segmen garis ditunjukkan oleh dua titik ujung, dan panjang dari segmen tersebut. Pada aplikasi geogebra cara untuk menggambarkan segmen dapat menggunankan **segmen with given length**, yaitu dilakukan dengan menentukan satu titik dan memasukkan panjang segmen, dengan sendirinya akan menghasilkan satu titik ujung dan membentuk segmen garis secara horizontal dengan panjang yang disesuaikan dengan inputan panjang yang dimasukkan.

c. Ray

Tipe garis yang ketiga yaitu *ray* atau sinar juga dapat dieksplorasi pada geogebra. Penggambaran *ray* juga dilakukan dengan menentukan dua titik awal. Titik awal yang pertama adalah titik ujung, selanjutnya titik yang kedua yang dipilih adalah titik yang dilalui oleh garis *ray*, dengan tingkat kemiringan yang diperoleh dari hubungan kedua titik tersebut. Terlihat bahwa, *ray* berupa satu garis lurus yang mempunyai satu titik ujung dan melalui satu titik tertentu dan diteruskan menuju arah yang tak berhingga.

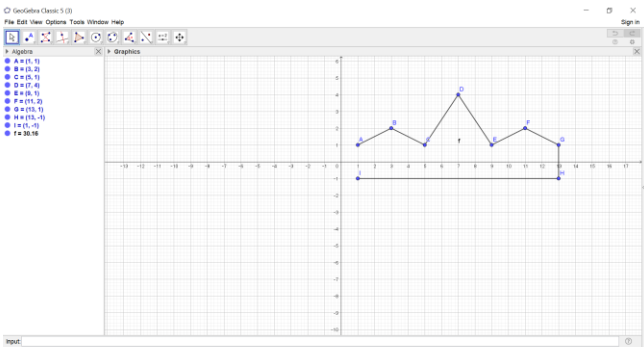


Gambar 3. 24. Penggambaran ray pada geogebra

Secara aljabar, dapat dilihat bahwa setiap ray yang digambarkan pada geogebra direpresentasikan oleh dua titik dan satu persamaan garis lurus.

d. Polyline

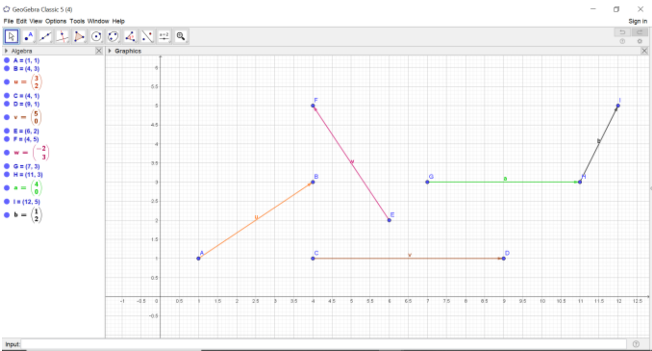
Selanjutnya untuk tipe garis polyline, dapat dijelaskan sebagai kumpulan segmen garis yang terhubung yang melalui titik titik yang diplot pada koordinat tertentu dan tidak dapat kembali pada titik awal. Sedangkan pada kotak aljabarnya, hanya menampilkan kumpulan titik yang diplot dan panjang total segmen yang terbentuk. Berikut contoh penggambaran polyline pada geogebra dan ekspresi aljabarnya.



Gambar 3. 25. Penggambaran polyline pada geogebra

e. Vector

Penggambaran vektor pada geogebra dapat dilakukan dengan menentukan dua titik, yaitu titik pangkal dan titik ujung serta dilengkapi oleh arah panah yang menunjukkan vektor mempunyai arah. Sedangkan pada kolom aljabar, setiap vektor yang digambarkan akan menghasilkan dua titik dan satu vektor dalam format matriks.



Gambar 3. 26. Penggambaran vektor pada aplikasi geogebbra

Aplikasi geogebra begitu sangat bermanfaat, membantu pengguna dalam menvisualisasikan teori-teori yang berkaitan dengan titik, garis dan bidang dalam tinjauan geometri analitik secara praktis dan presisi

---

3. I. LATIHAN SOAL

Soal Pemahaman Konsep :

1. Jelaskan peran sistem koordinat kartesius dalam menentukan kedudukan antar titik, panjang garis, kedudukan titik terhadap garis, dan kedudukan garis terhadap gars lainnya. Berikan pemahaman yang komprehensif!
2. Buatlah bagan yang mendeskripsikan hubungan-hubungan aljabar dan antara objek-objek geometris titik, keduudkan titik, vektor, segmen garis, dan garis lurus!
3. Identifikasi dalam geogebra, jenis-jenis garis dan masing-masing representasi aljabarnya.

Pemahaman prosedural :

1. Diketahui suatu titik berkedudukan di $P(-4,-6)$ dan satu titik lainnya berkedudukan di titik $Q(8,3)$, tentukan jarak antara titik P dengan titik Q !
2. Diketahui suatu segitiga sama kaki ABC, titik puncaknya berkedudukan pada titik $B(19,6)$ sedangkan pada salah satu titik pada kakinya berkedudukan di titik $A(16,2)$, tentukan kedudukan titik pada salah satu kaki lainnya dalam hal ini titik C!, berikan uraian kerangka berpikir dan perhitungannya !
3. Jika suatu bidang datar $ABCD$ berbentuk persegi panjang dengan menempatkan titik-titik sudutnya di keudukan $A(-3,4), B(-6,0), C(6,-5), dan\ D(d_1, d_2)$. Tentukan kedudukan titik $D(d_1, d_2)$ dan hitunglah berapa satuan keliling dari bangun persegi panjang tersebut !
4. Suatu segmen garis menghubungkan dua titik ujung yang berada di titik $P(3,3)$, dan $R(27,-4)$, jika suatu titik Q dilalui oleh segmen garis tersebut sedemikian hingga $|RQ|:|PR| = 2:3$, tentukan kedudukan titik $Q(q_1, q_2)$!
5. Jika suatu segmen garis FH, melalui suatu titik $G(22,1)$ di mana $H(26,2)$, tentukan kedudukan titik F sedemikian hingga $|FG|:|GH| = 5:1$!
6. Tentukan kemiringan persamaan garis yang tegak lurus dengan garis lain. Dimana garis lain tersebut melewati titik $P(1,-3)$ dan $Q(9,-5)$!
7. Misalkan suatu garis L_1 sejajar dengan garis L_2dan diketahui kemiringan garis L_1 adalah $m_1 = -3$, tentukanlah persamaan garis L_2 jika salah satu titiknya melewati titik $F(15,-1)$!

8. Misalkan suatu garis L_1 tegak lurus dengan garis lain sebut saja garis L_2. Jika $A(4,-1)$ salah satu titik yang dilewati garis L_1 , titik $P(2,-5)$ dan $Q(11,-2)$ dilewati oleh garis L_2. Tentukan persamaan garis L_1 dan titik potong antara L_1 dengan L_2!

9. Misal suatu garis dengan kemiringan $m = \frac{1}{3}$, dan sebuah titik yang berada di luar garis tersebut berkedudukan di $P(1,-8)$. Jarak titik P dengan garis tersebut adalah 3.16 satuan. Tentukan persamaan garis yang dimaksudkan !

10. Misalkan suatu garis L_1 sejajar dengan garis L_2dan diketahui kemiringan garis L_1 adalah $m_1 = -3$, tentukanlah persamaan garis L_2 jika salah satu titiknya melewati titik $F(15,-1)$!

BAB IV. LINGKARAN

Kemampuan akhir yang diharapkan

- Menjelaskan pengertian lingkaran dan unsur-unsur lingkaran
- Menentukan persamaan umum lingkaran.
- Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dengan titik singgung tertentu, dengan gradien tertentu, dan dari suatu titik di luar lingkaran.
- Menentukan persamaan garis kutub pada lingkaran.
- Menentukan titik kutub jika diketahui suatu garis dan lingkaran.
- Menentukan kuasa suatu titik terhadap suatu lingkaran.
- Menentukan persamaan garis kuasa dua buah lingkaran.
- Menentukan titik kuasa pada lingkaran.
- Menentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik potong dua buah lingkaran dengan menggunakan konsep berkas lingkaran.
- Menentukan syarat analitik dari relasi dua buah lingkaran yang berpotongan (tegak lurus dan membagi dua sama besar).

4. A. DEFINISI DAN UNSUR-UNSUR LINGKARAN

Lingkaran dalam kehidupan sehari-hari dapat kita jumpai dalam berbagai aktivitas, wujud kebendaan, bahkan dalam konsep yang bersifat abstrak. Dalam pembelajaran bidang datar, lingkaran termasuk salah satu jenis bidang datar yang dapat dihitung luasan, kelilingnya, dan menjadi dasar dalam pembelajaran bangun ruang tabung ataupun bola. Dalam pengembangannya, materi tentang lingkaran tidak lagi hanya pada perhitungan jari-jari, diameter, luasan, ataupun kelilingnya saja. Dengan properti sudut pada lingkaran, maka kemudian kita dapat menghitung panjang tali busur, luas juring. Namun pada pembelajaran Lingkaran pada Geometri Analitik Bidang, akan memfokuskan pada representasi Aljabar yang mensyaratkan tinauan lingkaran berada pada sistem Koordinat kartesius.

Sehinga dalam memahami lingkaran, unsur-unsur lingkaran maka terlebih dahulu penting bagi kita untuk memahami definisi lingkaran.

Lingkaran didefinisikan sebagai kedudukan titik titik pada bidang datar terhubung secara kontinu, di mana setiap titik memiliki jarak yang sama terhadap titik tertentu, dalam hal ini jarak tersebut dikenal sebagai radius atau jari jari, sedangkan titik tertentu ini disebut sebagai titik pusat lingkaran.

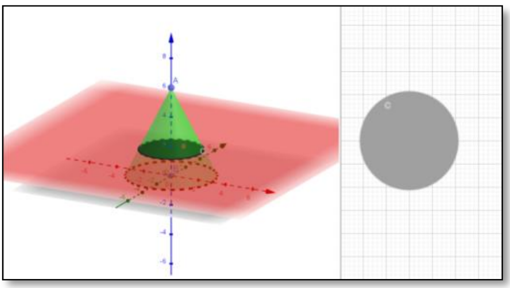
Setelah mengenal definisi dari lingkaran, selanjutnya kita akan mengenal kembali unsur-unsur dari lingkaran. Unsur-unsur utama yang perlu dikenali dalam lingkaran, beberapa di antaranya telah tersirat didefinisi yaitu titik-titik yang menduduki lingkaran, jari-jari, dan titik pusat lingkaran. Ketiga unsur ini menjadi karakteristik utama atau pembeda lingkaran terhadap bangun datar ataupun irisan kerucut lainnya. Jarum jam yang berputar melalui lintasan yang sama merupakan satu contoh bagaimana konsep lingkaran bekerja.

Pada geometri analitik bidang, kita akan mengeksplorasi lingkaran dalam beberapa hal yaitu :

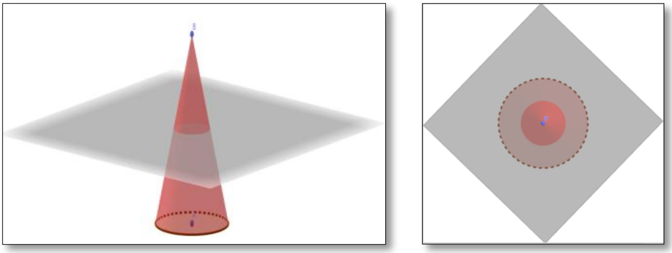
1. Memandang lingkaran sebagai irisan kerucut,:
2. Pembentukan persamaan atau representasi aljabar suatu lingkaran.
3. Kedudukan titik terhadap lingkaran
4. Kedudukan garis terhadap lingkaran
5. Garis singgung lingkaran
6. Kuasa titik terhadap lingkaran
7. Hubungan antara dua lingkaran

4. B. LINGKARAN SEBAGAI IRISAN KERUCUT

Lingkaran sebagai irisan kerucut dapat diartikan sebagai suatu bidang yang dihasilkan dari perpotongan antara bangun ruang kerucut yang berdiri tegak dengan suatu bidang datar segi-*n* (beraturan atau tak beraturan) secara horizontal.



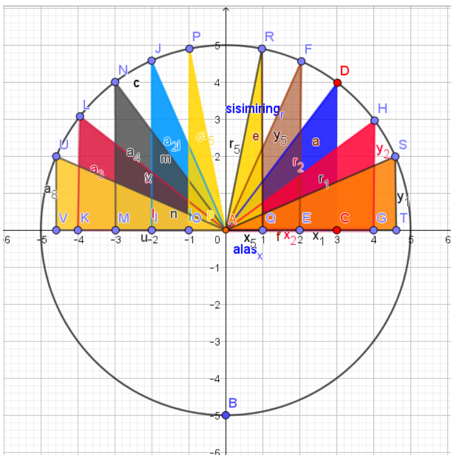
Gambar 4.1. Lingkaran sebagai irisan kerucut



Gambar 4.2. Visualisasi lingkaran dari irisan kerucutdari sisi atas

4. C. PERSAMAAN LINGKARAN

Melalui pengamatan terhadap unsur penyusun lingkaran berdasarkan definisi maka lingkaran dapat pula dipandang sebagai kumpulan titik yang merupakan pasangan titik yang dihasilkan dari sejumlah segitiga siku-siku yang tak berhingga dengan panjang kemiringan yang sama atau tetap.



Gambar 4.3. Kumpulan siku siku yang membentuk lingkaran

Interpretasi : Gambar di atas menunjukkan kumpulan 10 segitiga siku-siku yang berada pada dua kuadran dengan pasangan panjang alas dan tinggi yang berbeda untuk setiap segitiga pada setiap kuadrannya. Namun, untuk semua segitiga membentuk sisi miring yang panjangnya sama. Dengan ini dapat dibentuk suatu persamaan segitiga dengan pendekatan teorema Phytagoras.

Persamaan lingkaran dapat ditinjau berdasarkan kedudukan titik pusat. Apabila dipandang bahwa lingkaran tersebut berada pada sistem koordinat kartesius, maka kedudukan titik pusat lingkaran secara standar berada pada titik $(0,0)$ dan sebagai pengembangan titik pusat lingkaran berada di luar titik $(0,0)$ sebut saja pada (α, β)

Persamaan dasar lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dengan panjang jari-jari (radius) r dapat dituliskan dengan :

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{(IV.1)}$$

Dan apabila berpusat di (α, β) dengan panjang jari-jari (radius) r , persamaan lingkaran dapat dituliskan dengan :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \qquad \text{(IV.2)}$$

Dengan menyelesaikan persamaan (*IV*.2) diperoleh :

$$(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + (y^2 - 2\beta y + \beta^2) - r^2 = 0 \qquad \text{(IV.3)}$$

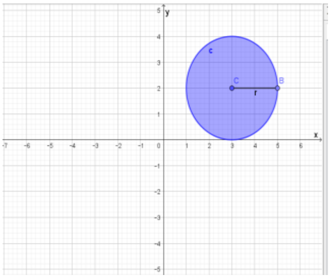
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0 \qquad \text{(IV.4)}$$

Dengan memandang bahwa α, β dan r adalah suatu yang konstan maka dapat dimisalkan suatu variabel baru yaitu A, B dan C sehingga persamaan (*IV*.4) dapat disederhanakan menjadi :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \qquad \text{(IV.5)}$$

$$Dimana : A = -2\alpha; B = -2\beta; C = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$
$$Diperoleh : \alpha = -\frac{A}{2}; \beta = -\frac{B}{2}; r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - C}$$

Sehingga dapat dituliskan bahwa apabila persamaan lingkarannya dinyatakan seperti pada persamaan (*IV.5*), maka diperoleh titik pusat tetap (α, β) yang bernilai $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ dan berjari-jari r dengan nilai $\sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$



Gambar 4.4. Lingkaran tak standar dengan titik pusat tetap $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

Interpretasi :

Gambar disamping menunjukkan suatu lingkaran yang berada pada koordinat kasrtesius dengan titik pusat yang tidak lagi berada pada titik $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ namun bergeser sejauh 3 satuan secara horizontal dan dua satuan secara vertikal dengan jari-jari sepanjang $\mathbf{r}$

Contoh soal yang berkaitan dengan penggunaan 3 bentuk persamaan lingkaran :

Contoh 4.1 :

Tentukan persamaan lingkaran dan berikanlah sketsa sederhana dengan kriteria lingkaran sebagai berikut

a. Berpusat di $(0,0)$ dengan jari-jari $r = 2\ satuan$
b. Berpusat di $(-2,3)$ dengan jari-jari $r = 2\ satuan$

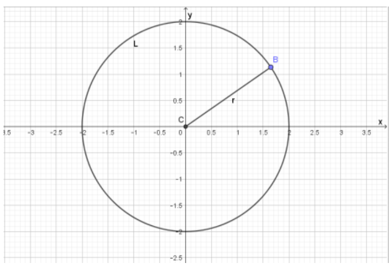
Jawab :

a. Persamaan lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari $r = 2\ satuan$, dengan menggunakan persamaan (1.1) maka dapat dengan mudah dituliskan :

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$L: x^2 + y^2 = 4$$

Selanjutnya sketsa dari lingkaran tersebut dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 4.5. Ilustrasi soal (a)

b. Persamaan lingkaran yang berpusat di $(-2,3)$ dengan jari-jari $r = 1\ satuan$ dapat dengan mudah dituliskan :

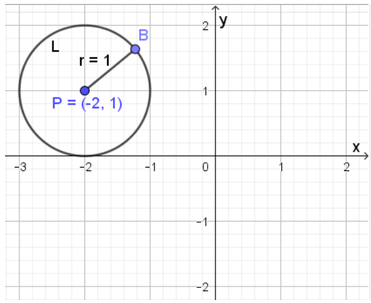
$$L: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Atau dapat pula dituliskan dalam bentuk :

$$L: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$$

Sedangkan sketsa dari lingkaran tersebut dapat dilihat pada gambar disamping:

Selanjutnya sketsa dari lingkaran tersebut dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 4.6. Ilustrasi soal (b)

4. D. KEDUDUKAN TITIK TERHADAP LINGKARAN

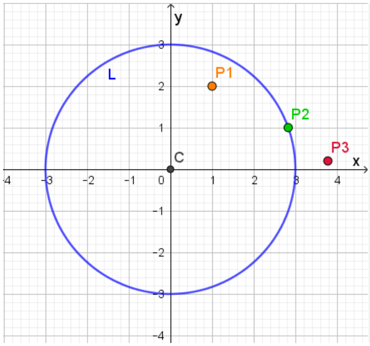
Misalkan terdapat suatu titik (x_1, y_1) akan ditinjau kedudukannya terhadap lingkaran baik standar yang berpusat di $(0,0)$ maupun yang tidak standar berpusat di (α, β), maka kedudukan titik terhadap lingkaran dapat dibedakan menjadi tiga kedudukan yaitu berada dalam lingkaran, berada tepat pada lingkaran atau berada di luar lingkaran. Dalam meninjau kondisi tersebut dapat dilakukan dengan mensubtitusi nilai $x_1$dan y_1 pada persamaan lingkaran yang ditinjau. Langkah prosedural yang dapat dilakukan dalam meninjau kedudukan titik terhadap lingkaran yaitu dengan :

a. Sederhanakn persamaan lingkaran ke dalam bentuk umum (standar atau tidak standar).

b. Subtitusi nilai $x_1$dan y_1 ke dalam persamaan dasar ${x_1}^2 + {y_1}^2$ atau pada $(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2$

c. Selanjutnya Identifikasi hasilnya dengan melihat hasil yang diperoleh dengan membandingkan nilai kuadrat dari jari-jarinya.

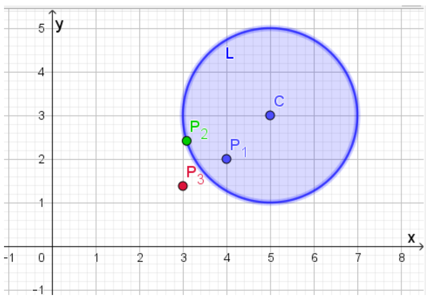
Berikut kondisi dan keterangan kedudukan titik (x_1, y_1) terhadap lingkaran yang berpusat di titik (0,0)



Gambar 4.7. Kedudukan titik terhadap lingkaran yang berpusat di (0,0)

Kondisi	Keterangan kedudukan titik
${x_1}^2 + {y_1}^2 < r^2$	titik (x_1, y_1) berada di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$
${x_1}^2 + {y_1}^2 = r^2$	titik (x_1, y_1) berada tepat lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$
${x_1}^2 + {y_1}^2 > r^2$	titik (x_1, y_1) berada di luar lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

Berikut visualisasi kondisi\ kedudukan titik (x_1, y_1) terhadap lingkaran yang berpusat di titik (α, β)



Gambar 4.8. Kedudukan titik terhadap linkaran yang berpusat pada $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

Adapun secara aljabar diukur dengan menguji titik tinjauan ke dalam persamaan, apakh lebih dari, krang dari ataukah sama dengan kuadrat dari jari-jari.

Kondisi	Keterangan kedudukan titik
$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 < r^2$	titik (x_1, y_1) berada di dalam lingkaran
$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = r^2$	titik (x_1, y_1) berada tepat lingkaran
$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 > r^2$	titik (x_1, y_1) berada di luar lingkaran

Contoh 4.2 :

Identifikasilah kedudukan titik titik dibawah ini terhadap lingkaran

a. Titik $(3,2)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 9$
b. Titik $(2,2)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 16$
c. Titik $(3,2)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 25$

Berikut tabel pengujiannya :

Titik	Lingkaran	Pengujian	Kedududkan
$(3,2)$	$x^2 + y^2 = 9$	${x_1}^2 + {y_1}^2 = 3^2 + 2^2 = 10 > 9$	Di luar lingkaran
$(2,2)$	$x^2 + y^2 = 16$	${x_1}^2 + {y_1}^2 = 2^2 + 2^2 = 8 < 16$	Di dalam lingkaran
$(3,4)$	${x_1}^2 + {y_1}^2 = 25$	${x_1}^2 + {y_1}^2 = 3^2 + 4^2 = 25$	Tepat di lingkaran

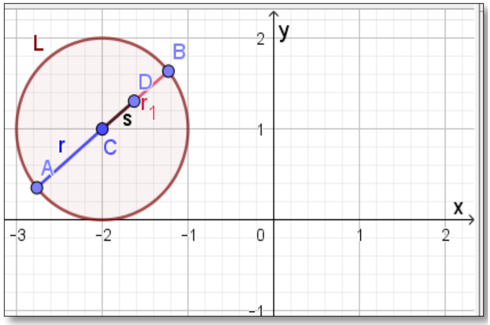
4. E. JARAK MAKSIMUM DAN MINIMUM TITIK TERHADAP LINGKARAN

Berdasarkan 3 kedudukan titik terhadap lingkaran, maka kemudian dapat ditentukan jarak minimum dan maksimum suatu titik tersebut terhadap lingkaran. Hal ini dapat dilihat dengan meninjau diameter dan jari jari lingkaran.

Kondisi 1: titik sembarang terletak di dalam lingkaran

Misal untuk suatu titik D sembarang yang berada di dalam lingkaran L, berakibat jarak titik D tersebut terhadap titik pusat C kurang dari panjang jari-jari lingkaran.

Interpretasi : Gambar disamping menunjukkan suatu titik $\mathbf{D}$ sembarang yang berada di dalam lingkaran $\mathbf{L}$ berpusat pada $\mathbf{C(-2,1)}$ dengan segmen garis $\mathbf{AC = BC}$ sebagai jari jari $\mathbf{r = 1}$. Titik $\mathbf{D}$ tersebut menjadi tinjauan jarak maksimumnya dan jarak minimumnya terhadap lingkaran $\mathbf{L}$.



Gambar 4.9. Jarak titik sembarang di dalam lingakaran terhadap tutuk pusat

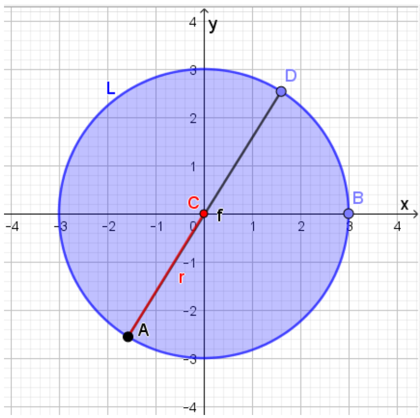
Jarak Maksimum : Jarak titik sembarang D terhadap titik A yang dilalui oleh lingkaran L dinyatakan sebagai jumlah antara jari-jari dengan jarak titik pusat C ke titik sembarang D

$$|DA| = |CA| + |CD| = r + |CD| \qquad \text{(IV.6)}$$

Kondisi 2: titik sembarang terletak tepat pada lingkaran

Misal untuk suatu titik D sembarang yang berada tepat pada lingkaran L, berakibat jarak titik D tersebut terhadap titik pusat C sama dengan panjang jari-jari lingkaran.

Interpretasi : Gambar disamping menunjukkan suatu titik $\mathbf{D}$ sembarang yang berada tepat pada lingkaran $\mathbf{L}$ berpusat pada $\mathbf{C(0,0)}$ dengan segmen garis AC = CD sebagai jari jari $\mathbf{r = 3}$. Titik $\mathbf{D}$ tersebut menjadi tinjauan jarak maksimumnya dan jarak minimumnya terhadap lingkaran $\mathbf{L}$.



Gambar 4.10. Ilustrasi jarak maksimum dan jarak minimum pada lingkaran

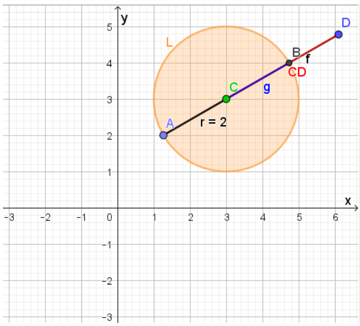
Jarak minimum : Jarak titik sembarang D dengan titik D sendiri, karena titik D merupakan titik yang dilewati oleh lingkaran L sehingga diperoleh jarak minimumnya adalah 0

Jarak Maksimum : Jarak titik sembarang D terhadap titik A yang dihubungkan oleh dua segmen garis yang melalui titik pusat yaitu AC dan CD sehingga diperoleh jarak maksimum sebagai berikut:

$$|AD| = |AC| + |CD| = r + r = 2r \quad \text{(IV.7)}$$

Kondisi 3: titik sembarang terletak di luar lingkaran

Misal untuk suatu titik D sembarang yang berada di luar lingkaran L, berakibat jarak titik D tersebut terhadap titik pusat C lebih panjang dari jari-jari lingkaran.



Gambar 4.11. Jarak minimum dan maksimum suatu titik yang berada di luar lingkaran terhadap lingkaran

Interpretasi : Gambar 4.11 menunjukkan suatu titik $\mathbf{D}$ sembarang yang berada di luar lingkaran $\mathbf{L}$ berpusat pada $\mathbf{C}(\mathbf{3},\mathbf{3})$ dengan segmen garis $\mathrm{AC} = \mathrm{CB}$ sebagai jari jari $\mathbf{r} = \mathbf{2}$. Titik $\mathbf{D}$ tersebut menjadi tinjauan jarak maksimumnya dan jarak minimumnya terhadap lingkaran $\mathbf{L}$.

Jarak minimum : Jarak titik sembarang D terhadap titik B yang dilalui oleh lingkaran L dinyatakan sebagai selisih antara jari-jari dengan jarak titik pusat C ke titik.

$$|DB| = |CD| - |CB| = |CD| - r \quad \text{(IV.8)}$$

Jarak Maksimum : Jarak titik sembarang D terhadap titik A yang dilalui oleh lingkaran L dinyatakan sebagai jumlah antara jari-jari dengan jarak titik pusat C ke titik sembarang D.

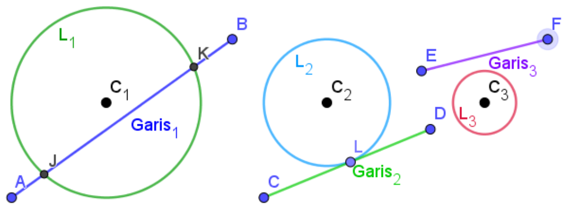
$$|DA| = |AC| + |CB| + |BD| = r + |CD| = 2r + |BD| \quad \text{(IV.9)}$$

Demikianlah penggambaran tiga kondisi dan jarak titik terhadap lingkaran.

4. F. KEDUDUKAN GARIS TERHADAP LINGKARAN

Setelah mempelajari persamaan garis, sifat dan karakteristik suatu garis di bidang kartseius, maka kemudian hubungan antara garis dengan lingkaran dapat dengan mudah dipahami. Pada bagian ini akan ditinjau kedudukan garis terhadap lingkaran.

Kedudukan garis terhadap suatu lingkaran memiliki 3 kemungkinan yaitu :



Gambar 4.12. Kedudukan garis terhadap lingkaran

- garis memotong lingkaran,
- garis menyinggung lingkaran dan
- garis tidak menyinggung dan tidak memotong lingkaran.

Ketiga kemungkinan ini memiliki kriteria masing-masing. Berikut diuraikan penentuan kriteria kedudukan garis jika diberikan persamaan llingkaran dan garis singgungnya.Misal suatu garis $G: y = mx + k$ akan ditinjau kedudukannya terhadap suatu lingkaran $L: x^2 + y^2 = r^2$. Subtitusi nilai $y = mx + k$ ke dalam persamaan $x^2 + y^2 = r^2$ sehingga diperoleh :

$$x^2 + (mx + k)^2 = r^2 \quad \text{(IV.10)}$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mkx + k^2 = r^2 \quad \text{(IV.11)}$$

$$(1 + m^2)x^2 + (2mk)x + k^2 - r^2 = 0 \quad \text{(IV.12)}$$

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \text{(IV.13)}$$

$$D = B^2 - 4AC \quad \text{(IV.14)}$$

Dengan konsep nilai diskriminan dari persamaan kuadrat diperoleh ketentuan berikut :

1. Jika $D > 0$, maka dapat dikatakan garis memotong lingkaran
2. Jika $D = 0$, maka dapat dikatakan garis menyinggung lingkaran

3. Jika $D < 0$, maka dapat dikatakan garis tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran.

Permasalahan yang ingin diselesaikan pada bagian ini yaitu mengidentifikasi kedudukan suatu garis terhadap lingkaran. Jika dalam soal memberikan persamaan lingkaran dan persamaan garis singgung maka Model Pertanyaan pada pembelajaran kedudukan garis singgung

Identifikasilah kedudukan garis $y = mx + c$ *terhadap lingkaran* $x^2 + y^2 = r^2$

Contoh 4.3 :

Identifikasilah kedudukan garis-garis berikut terhadap lingkaran :

$$x^2 + y^2 + 2x - 5y + 4 = 0$$

Persamaan garis yang diidentifikasi adalah $x + y = 2 \rightarrow y = 2 - x$

1. Subtitusi persamaan $y = 2 - x$ ke dalam persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 5y + 4 = 0$

$x^2 + (2-x)^2 + 2x - 5(2-x) + 4 = 0$ $x^2 + x^2 - 4x + 4 + 2x - 10 + 5x + 4 = 0$ $2x^2 + 3x - 2 = 0$	Melalui proses subtitusi dan pengelompokan diperoleh suatu persamaan kuadrat

2. Identifikasi nilai Diskriminannya

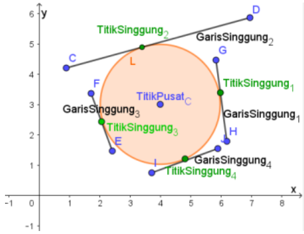
$A = 2; B = 3; C = -2$ $D = B^2 - 4AC$ $D = 3^2 - 4.2.(-2) = 25 > 0$	Dengan nilai Diskriminan 25 maka dapat dikatakan bahwa garis $x + y = 2$ memotong $x^2 + y^2 + 2x - 5y + 4 = 0$

4. G. GARIS SINGGUNG LINGKARAN

Hal mendasar yang perlu dipahami pada pembelajaran garis singgung lingkaran adalah konsep titik, garis, dan lingkaran secara **geometrik** dan juga secara **aljabar**. Dengan ini, kita akan menggunakan konsep dasar dari suatu titik, konsep dasar dari suatu garis lurus dan konsep dasar dari lingkaran.

Secara geometrik, garis singgung pada lingkaran dapat dipandang sebagai titik pertemuan atau persekutuan antara satu garis lurus dengan satu lingkaran tertentu.

Sehingga dapat dikatakan bahwa semua titik yang dilalui oleh lingkaran dapat menjadi persinggungan dengan satu garis tertentu. Perlu untuk dipahami bahwa setiap garis lurus dikatakan menyinggung suatu lingkaran apabila menghasilkan satu dan hanya satu titik pertemuan dengan lingkaran yang dikenal dengan titik singgung. Berikut ilustrasi secara geometris mengenai garis singgung.



Gambar 4.13. Garis Singgung dan titik singgung dari segmen garis terhadap lingkaran

Interpretasi :

Gambar disamping menunjukkan ilustrasi persinggungan garis lurus dengan suatu lingkaran di 4 titik. Titik yang berwarna hijau merupakan satu-satunya hasil titik persinggungan dikenal dengan titik singgung, sedangkan garis yang menyinggung dikenal dengan garis singgung.

Hubungan jari-jari dengan Garis Singgung

Sebelum melangkah ke pembahasan penentuan persamaan garis singgung, kita terlebih dahulu akan menelaah hubungan jari-jari dengan garis singgung. Hubungan jari-jari dan garis singgung dapat dibedakan atas tiga kondisi, yaitu :

1. Sumbu- x menyinggung lingkaran
   Apabila lingkaran yang berpusat di (α, β) dan bersinggungan dengan sumbu-x, maka panjang jari-jarinya adalah $r = |\alpha|$
2. Sumbu- y menyinggung lingkaran
   Apabila lingkaran yang berpusat di (α, β) dan bersinggungan dengan sumbu-y, maka panjang jari-jarinya adlah $r = |\beta|$
3. Suatu garis menyinggung lingkaran
   Apabila lingkaran yang berpusat di (α, β) dan bersinggungan dengan garis $L: ax + by + c = 0$, mka panjang jari-jarinya dapat dituliskan dengan :

$$r = \left|\frac{A\alpha + B\beta + c}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \qquad \textbf{(IV.15)}$$

Rumusan ini, menggunakan konsep yang telah diuraikan pada Bab 3. Hubungan titik dengan garis lurus

Contoh 4.4 :

Tentukan jari-jari lingkaran yang memiliki persamaan $4x - 3y - 50 = 0$ jika pusatnya berada pada titik (4,-8) dan menyinggung garis :
Jawab :
Dengan persamaan $L: 4x - 3y - 50 = 0$, maka panjang jari-jarinya dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan **(IV.15)** :

$$r = \left|\frac{4.4 - 3.-8 - 50}{\sqrt{4^2 + (-5)^2}}\right| = 2$$

Secara aljabar, pada BAB 3 telah menjelaskan konsep tentang garis telah dipahami bersama bahwa suatu garis lurus yang digambarkan pada sistem koodinat kartesius dapat direpresentasikan dengan $y = mx + k$ dimana m merupakan gradien atau koefisien kemiringan garis dan k sebagai konstanta.

Sedangkan pada pembahasan lingkaran pada sub bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa suatu lingkaran yag berpusat pada $(0,0)$ dan memiliki radius r dapat direpresentasikan dengan persamaan $x^2 + y^2 = r^2$. Dari garis dan lingkaran ini dapat kita melihat hubungannya melalui kedudukan garis terhadap lingkaran seperti pada bab sebelumnya.

Pada sub bab ini akan dijelaskan bagaimana membentuk persamaan garis yang menyinggung lingkaran. Penentuan persamaan garis singgung lingkaran dapat dicari berdasarkan beberapa kondisi yaitu :

a. Titik singgungnya diketahui
b. Gradien garis singgungnya diketahui
c. Salah satu titik yang melalui garis di luar lingkaran diketahui

❖ **Titik singgungnya diketahui**

Persamaan Garis Singgung dengan mengetahui titik singgung dapat dicari melalui uraian rumusan berikut. Misal suatu garis $y = mx + k$ menyinggung llingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik (x_1, y_1) . Jika kedudukan (x_1, y_1) diketahui maka persamaan garis singgung lingkaran dapat ditentukan dengan cara :

Apabila lingkarannya berpusat pada $(0,0)$, maka persamaan garis singgungnya adalah :

$$x_1x + y_1y = r^2 \Rightarrow y = -\frac{x_1x}{y_1} + \frac{r^2}{y_1} \qquad \textbf{(IV.16)}$$

Sedangkan untuk lingkaran yang berpusat di (α, β), persamaan garis singgung lingkarannya dapat ditulis dengan :

$$(x_1 - \alpha)(x - \alpha) + (y_1 - \beta)(y - \beta) = r^2 \qquad \text{(IV.17)}$$

Untuk memahami penggunaan rumusan di atas dapat kita lihat pada beberapa contoh soal berikut :

Contoh 4.5 :

a. Tentukan persamaan garis singgung dari lingkaran $L: x^2 + y^2 = 13$ di titik $(2,3)$

$x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = 13$
$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$
$2x + 3y = 13$

b. Tentukan persamaan garis singgung dari lingkaran : $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 17$ di titik $(3,1)$.

$L: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 17$
$(x_1 - 2)(x-2) + (y_1 + 3)(y+3) = 17$
$(3-2)(x-2) + (1+3)(y+3) = 17$
$1(x-2) + 4(y+3) = 17$
$x - 2 + 4y + 12 = 17$
$x + 4y = 17 - 10$
$x + 4y = 7$

c. Tentukan persamaan garis singgung dari lingkaran : $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 17$ di titik $(3,1)$.

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$
$x_1 \cdot x + y_1 \cdot y + \frac{A}{2}(x_1 + x) - \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$
$1 \cdot x + 2 \cdot y + \frac{4}{2}(1 + x) - \frac{6}{2}(2 + y) + 3 = 0$
$1 \cdot x + 2 \cdot y + \frac{4}{2}(1 + x) - \frac{6}{2}(2 + y) + 3 = 0$
$x + 2y + 2 + 2x - 6 - 3y + 3 = 0$
$3x - y - 1 = 0$
$y = 3x - 1$

Garis $y = mx + k$ dikatakan sebagai garis singgung terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ jika dan hanya jika memenuhi $k^2 = r^2(m^2 + 1)$. Dengan adanya garis singgung dan lingkaran diperoleh titik singgung atau titik temu pada $\left(-\frac{mr^2}{k}, \frac{r^2}{k}\right)$. Namun dalam situasi yang lain, apabila garis dinyatakan dalam bentuk $ax + by + k = 0$ dan lingkarannya tetap berpusat pada $(0{,}0)$ dengan persamaan $x^2 + y^2 = r^2$, maka garis tersebut dapat dikatakan menghasilkan titik singgung jika dan hanya jika memenuhi $k^2 = r^2(a^2 + b^2)$ dan titik singgungnya terletak pada $\left(-\frac{ar^2}{k}, -\frac{br^2}{k}\right)$.

Maka kemudian muncul pertanyaan, dari mana syarat $\boldsymbol{k^2 = r^2(m^2 + 1)}$ dan $\left(-\frac{\boldsymbol{mr^2}}{\boldsymbol{k}}, \frac{\boldsymbol{r^2}}{\boldsymbol{k}}\right)$ diperoleh? Berikut penguraiannya :

Perhatikan bahwa garis $y = mx + k$ akan ditinjau kondisinya agar dapat dikatakan menyinggung lingkaran $C: x^2 + y^2 = r^2$. Subtitusi nilai $y = mx + k$ ke dalam persamaan $x^2 + y^2 = r^2$ sehingga diperoleh

$x^2 + (mx + k)^2 = r^2$ $x^2 + m^2x^2 + 2mkx + k^2 = r^2$ $(1 + m^2)x^2 + (2mk)x + k^2 - r^2 = 0$ $selanjutnya\ dimisalkan:$ $A = (1 + m^2);$ $B = (2mk)\ dan\ C = k^2 - r^2$	Melakukan proses subtitusi dan pengelompokan suku atas variabel yang sejenis, sehingga diperoleh suatu persamaan baru dalam bentuk persamaan kuadrat
$Ax^2 + Bx + C = 0$ $D = B^2 - 4AC$ $D = (2mk)^2 - 4(1 + m^2)(k^2 - r^2)$ $D = 4m^2k^2 - 4(k^2 - r^2 + m^2k^2 - m^2r^2)$ $D = 4m^2r^2 - 4k^2 + 4r^2$ $D = 4(m^2r^2 - k^2 + r^2)$	Karena garis dikehendaki menyinggung lingkaran, maka hanya memiliki satu titik persinggungan sehingga nilai Diskriminan dari persamaan kuadrat yang terbentuk haruslah bernilai nol.
$4(m^2r^2 - k^2 + r^2) = 0$ $m^2r^2 - k^2 + r^2 = 0$ $k^2 = r^2 + m^2r^2$ $k^2 = r^2(m^2 + 1)$ $k = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$	Dengan $D = B^2 - 4AC = 0$, maka diperoleh bahwa garis menyinggung lingkaran apabila nilai konstanta $\mathbf{k}$ pada garis bernilai $\pm r\sqrt{m^2 + 1}$

Dengan nilai konstanta sebagai kriteria garis menyinggung lingkaran, maka diperoleh persamaan garis singgung lingkaran dengan

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1} \quad \text{(IV.18)}$$

$$(y - b) = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1} \quad \text{(IV.19)}$$

Selanjutnya uraian untuk menemukan titik singgung atau titik temu pada $\left(-\frac{mr^2}{k}, \frac{r^2}{k}\right)$

Penjabaran rumus di atas diminta kepada pembaca untuk tetap tenang dan tidak perlu panik.

❖ Gradien Garis Singgung Diketahui

Kondisi yang lain adalah persamaan garis singgung dapat ditentukan dengan adanya gradien yang diketahui. Misal suatu garis $y = mx + k$ dengan gradien m menyinggung lingkarandi titik (x_1, y_1) . Jika kedudukan gradien garis singgung diketahui maka persamaan garis singgung lingkaran dapat ditentukan dengan cara :

1. Untuk lingkaran yang berpusat pada $(0,0)$, maka persamaan garis singgungnya adalah :

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1} \quad \text{(IV.20)}$$

2. Sedangkan untuk lingkaran yang berpusat di (α, β), persamaan garis singgung lingkarannya dapat ditulis dengan :

$$(y - \beta) = m(x - \alpha) \pm r\sqrt{m^2 + 1} \quad \text{(IV.21)}$$

Pada kasus ini menggunakan tanda $\pm$ sebab dengan satu gradien yang sama dapat membentuk dua garis yang sejajar atau memiliki arah dan kemiringan yang sama namun menyinggung di titik yang berbeda. Untuk memahami penggunaan rumusan di atas dapat kita lihat pada beberapa contoh soal berikut :

Contoh 4.6 :

a. Jika diketahui persamaan lingkaran $L: x^2 + y^2 = 5$. Carilah persamaan garis singgungnya dengan gradien $m = 2$.

$$r^2 = 5 \rightarrow r = \sqrt{5}$$

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$
$$y = 2x \pm \sqrt{5}\sqrt{1 + 2^2}$$
$$y = 2x \pm \sqrt{5}\sqrt{5}$$
$$y = 2x \pm 5$$
$$y = 2x + 5$$
$$y = 2x - 5$$

b. Tentukan persamaan garis singgung dari lingkaran$L: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$dengan gradien $m = 3$.

$$(y+1) = 3(x-2) \pm \sqrt{10}\sqrt{1+3^2}$$
$$(y+1) = 3x-6 \pm \sqrt{10}\sqrt{10}$$
$$(y+1) = 3x-6 \pm 10$$
$$y = 3x-7 \pm 10$$
$$y = 3x+3 \ (+)$$
$$y = 3x-17 \ (-)$$

c. Tentukan garis singgung lingkaran $x^2+y^2+4x-6y+8=0$ dengan gradien $m=3$.

$x^2+y^2+4x-6y+8=0$ $A=4; B=-6; C=8$ $P(\alpha,\beta)=P\left(-\frac{4}{2},\frac{6}{2}\right)$ $P(-2,3)$ $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-C}$ $r=\sqrt{2^2+(-3)^2-8}$ $r=\sqrt{5}$ $L: (x+2)^2+(y-3)^2=\sqrt{5}$	$(y-\alpha)=m(x-\alpha)\pm r\sqrt{1+m^2}$ $(y+1)=3(x-2)\pm\sqrt{10}\sqrt{1+3^2}$ $(y+1)=3x-6\pm\sqrt{10}\sqrt{10}$ $(y+1)=3x-6\pm 10$ $y=3x-7\pm 10$ $y=3x+3\ (+)$ $y=3x-17\ (-)$

Dengan diperolehnya bentuk baku dari lingkaran yang tak standar dengan ini persmaan garis singgungnya dapat di tentukan

❖ Titik yang melewati garis singgung di luar lingkaran diketahui

Kondisi yang ketiga dalam menentukan persamaan garis lingkaran adalah adanya titik yang dietahui, yaitu titik yang dilalui oleh garis singgung yang berada di luar lingkaran. Penentuan persamaan garis singgung pada kondisi ini sedikit berbeda dengan cara sebelumnya. Pada bagian ini ada beberapa konsep garis yang diselesaikan secara terpisah.

Misal suatu garis $y=mx+k$ dengan gradien m menyinggung suatu lingkaran. Misalkan pula suatu titik di luar lingkaran dilalui oleh garis singgung misal titik (x_1,y_1) . Untuk menentukan garis singgungnya terlebih dahulu perlu untuk mengetahui bentuk persamaan garis yang melalui satu titik seperti pada pembahasan pada bab sebelumnya. Jika kedudukan gradien garis singgung diketahui maka persamaan garis singgung lingkaran dapat ditentukan dengan menggunakan pendekatan satu titik misal (x_1,y_1) adalah :

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \tag{IV.22}$$

$$y = m(x - x_1) + y_1 \tag{IV.23}$$

$$y = mx - mx_1 + y_1 \tag{IV.24}$$

$$L: mx - y - x_1 m + y_1 = 0 \tag{IV.25}$$

Dari persamaan ini, kemudian jika $L: mx - y - x_1 m + y_1 = 0$ dipandang sebagai persamaan garis singgungnya maka mestilah tegak lurus dengan jari-jari lingkaran. Sebagaimana konsep hubungan jari-jari dan garis singgung dapat dijelaskan bahwa, apabila lingkaran yang berpusat di (α, β) dan bersinggungan dengan garis $L: mx - y - x_1 m + y_1 = 0$, maka panjang jari-jarinya dapat dituliskan dengan :

$$r = \left|\frac{m\alpha - 1\beta - x_1 m + y_1}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}\right| = \left|\frac{m\alpha - 1\beta - x_1 m + y_1}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| \tag{IV.26}$$

Jika kedua ruas dikuadratkan akan diperoleh :

$$r^2 = \left|\frac{m\alpha - 1\beta - x_1 m + y_1}{\sqrt{m^2 + 1}}\right|^2 \tag{IV.27}$$

$$(m^2 + 1)r^2 = (m\alpha - \beta - x_1 m + y_1)^2 \tag{IV.28}$$

$$r^2 m^2 + r^2 = \big((\alpha - x_1)m + (y_1 - \beta)\big)^2 \tag{IV.29}$$

$$(r^2 - (\alpha - x_1)^2)\boldsymbol{m^2} - 2(\alpha - x_1)(y_1 - \beta)\boldsymbol{m} + r^2 - +(y_1 - \beta)^2 = 0 \tag{IV.30}$$

Persamaan (IV.30) dapat dilihat bahwa identik dengan persamaan kuadrat yang akar-akarnya adalah m_1 dan m_2. Melalui nilai gradien ini disubtitusi kembali ke dalam persamaan garis $L: mx - y - x_1 m + y_1 = 0$ atau ke dalam $(y - y_1) = m(x - x_1)$.

Sehingga dapat dikatakan bahwa garis singgung yang dihasilkan ada dua yang masing-masing mempunyai kemiringan m_1 dan m_2. Untuk memahami penggunaan rumusan di atas dapat kita lihat pada beberapa contoh soal berikut :

Contoh 4.7 :

a. Jika diketahui persamaan lingkaran $L: x^2 + y^2 = 25$. Carilah persamaan garis singgungnya diketahui garis singgung melalui titik $(7,1)$

Dari soal di atas dapat diidentifikasi bahwa lingkarannya berpusat di titik $(0,0)$ dan garis singgungnya melalui titik $(8,1)$ dengan ini dapat ditulis bahwa nilai $r = 5; \alpha = 0; \beta =$

$0; x_1 = 7; y_1 = 1$.Melalui parameter parameter tersebut selanjutnya dapat ditentukan nilai dari m_1 dan m_2.

$$(r^2 - (\alpha - x_1)^2)\boldsymbol{m^2} - 2(\alpha - x_1)(y_1 - \beta)\boldsymbol{m} + r^2 - (y_1 - \beta)^2 = 0$$

$$(25 - (0-7)^2)\boldsymbol{m^2} - 2(0-7)(1-0)\boldsymbol{m} + 25 - (1-0)^2 = 0$$
$$-24\boldsymbol{m^2} + 14\boldsymbol{m} + 24 = 0$$
$$24\boldsymbol{m^2} - 14\boldsymbol{m} - 24 = 0$$
$$12\boldsymbol{m^2} - 7\boldsymbol{m} - 12 = 0$$

Dengan metode pemfaktoran diperoleh

$$\frac{1}{12}(12m - 16)(12m + 9) = 0$$

Sehingga akar-akarnya adalah

$$(12m - 16) = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$
$$(12m + 9) = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{-9}{12} = -\frac{3}{4}$$

Dari gradien-gradien di atas di peroleh dua persaman garis singgung yaitu :

Untuk $m_1 = \frac{4}{3}$

$$(y - y_1) = m_1(x - x_1) \Rightarrow (y - 1) = \frac{4}{3}x - \frac{28}{3} \Rightarrow \mathrm{y} = -\frac{4}{3}x - \frac{25}{3} \Rightarrow 3y = -4x - 25$$

Untuk $m_2 = -\frac{3}{4}$

$$(y - 1) = -\frac{3}{4}x - \frac{28}{4} \Rightarrow \mathrm{y} = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4} \Rightarrow 4y = -3x - 25$$

Jadi persamaan garis yang diperoleh, adalah

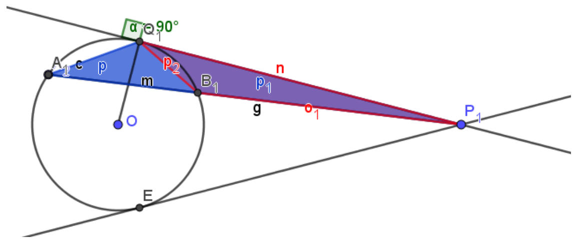
$$L1: 3y = -4x - 25$$

$$L2: 4y = -3x - 25$$

4. H. KUASA SUATU TITIK TERADAP LINGKARAN

Kuasa titik terhadap suatu lingkaran dapat dipandang sebagai kedudukan titik sembarang yang berada di luar lingkaran. Dengan titik sembarang tersebut, dapat dibuat sejumlah segmen garis sedemikian sehingga memotong atau menyinggung lingkaran. Dari kedua kondisi tersebut, dapat dibuat rumusan mengenai hubungan antara panjang segmen garis titik kuasa terhadap kedua titik potong, dan panjang titik kuasa terhadap titik singgung.

Misalkan diberikan suatu lingkaran $C \coloneqq (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$yang berpusat di titik $O(\alpha,\beta)$. Selanjutnya diletakkan sembarang titik, yang berada di luar lingkaran Cyaitu titik P. Dari titik P ini dapat dibuat sejumlah segmen garis yang memotong lingkarang, setiap segmen garis membentuk dua titik potong.Misal pada segmen garis 1 memotong lingkaran di titikA_1dan B_1, selanjutnya suatu titik singgung Q dan E yang melalui titik P. Kedudukan titik sembarang P, titik singgung Q dan kedua titik potong A_1dan B_1, dapat dilihat pada gambar berikut :



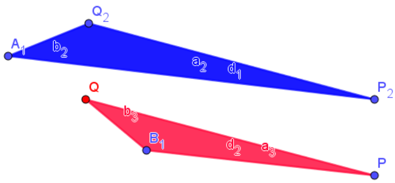
Gambar 4.14. Kedudukan titik kuasa, titik singgung dan titik potong

---

Pada gambar di atas : Titik P sembarang dikatakan sebagai titik kuasa terhadap lingkaran C. Titik kuasa P didefinisikan sebagai perkalian panjang dari segmen garis A_1P dengan B_1P, dalam hal ini dinyatakan dengan :$Kuasa(P) = |A_1P||B_1P|$

Komponen titik P, titik singgung Q dan titik titik potong A_1dan B_1 dapat dibentuk dua buah segitiga yang sebangun Perhatikan, $\Delta A_1P\,Q$ berwarna biru dan $\Delta B_1P\,Q$ berwarna merah, membentuk sudut yang sama besar antara $\angle A_1P\,Q$ dengan $\angle B_1P\,Q$, dalam hal ini dapat dituliskan :

$$\angle A_1P\,Q = \angle B_1P\,Q$$
$$\angle PA_1\,Q = \angle P\,QB_1 = \frac{1}{2}A_1OQ$$



Gambar 4.15. Dua segitiga sebangun

Melalui konsep kesebangunan, $\Delta A_1 P\ Q$ dan $\Delta B_1 P\ Q$ mempunyai sudut yang sama yaitu $\angle P$, dengan ini kedua segitiga tersebut sebangun. Akibatnya terbentuk hubungan perbandingan sisi yang setara oleh sifat kesebangunan dari kedua segitiga tersebut, diperoleh :

$$\frac{|A_1P|}{|QP|} = \frac{|QP|}{|B_1P|}$$
$$\Rightarrow |A_1P||B_1P| = |QP||QP|$$
$$\Rightarrow |A_1P||B_1P| = |QP|^2$$

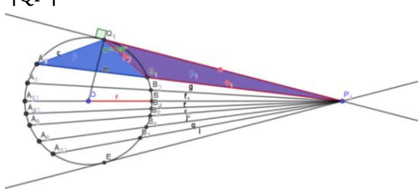
Dengan memandang bahwa $|QP|$ adalah panjang titik kuasa P terhadap titik singgung Q yang melalui titik P itu sendiri, maka dapat dikatakan bahwa Kuasa Titik P terhadap lingkaran Cmerupakan kuadrat dari panjang garis singgung $|QP|$

$$Kuasa(P) = |QP|^2$$

Selanjutnya dapat pula dibuat sejumlah segmen garis lain yang memotong Lingkaran C dan berujung pada titik kuasa P(selain garis yang memotong A_1dan B_1).Misal pasangan titik potong yang lain adalah A_2dan B_2, A_3dan B_3 dan seterusnya. Bagaimana dengan kuasa titik P terhadap titik titik potong lainnya?.

Hubungan antara kuasa titik P, terhadap titik titik potong pada lingkaran C juga berlaku

$$K(P) = |A_1P||B_1P| = |A_2P||B_2P| = |A_3P||B_3P| = \cdots = |A_nP||B_nP| = |QP|^2 \qquad \text{(IV.31)}$$



Gambar 4.16. Hubungan titik kuasa dengan titik potong lainnya

Dari sejumlah titik potong yang dibentuk dari segmen segmen garis tersebut, ada hal yang menarik pada salah satu titik potongnya yaitu titik potong yang juga melewati titik pusat O. Dengan ini, kita bisa melihat hubungan antara jarak titik kuasa terhadap titik pusat dengan panjang jari-jari lingkaran :

Misalkan jari-jari lingkaran C dinotasikan denagn r, jika suatu segmen garis yang menghubungkan titik P dan titik pusat O, sekaligus memotong lingkaran Cmisal di titik $A_k$dan B_k. Maka dapat pula dibuat dua segitiga yang sebangun yaitu $\Delta A_k P\ Q$ dan $\Delta B_k P\ Q$ yang juga membentuk sudut yang sama yaitu $\angle P_k$ (penggunaan indeks k pada $P_k$karena masing masing segmen membentuk sudut dengan besar yang berbeda). Dengan ini dapat dituliskan

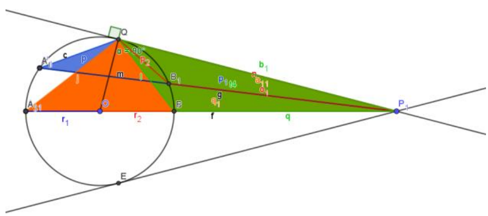
$$\frac{|A_k P|}{|QP|} = \frac{|QP|}{|B_k P|} \Rightarrow |A_k P||B_k P| = |QP|^2 \quad \text{(IV.32)}$$

Jarak antara A_k dengan P, serta B_k dengan P dapat dinyatakan sebagai penambahan atau pengurangan panjang jari-jari pada jarak titik pusat O ke titik kuasa P. Dalam hal ini dapat ditulis menjadi :

$$(|OP| - r)(|OP| + r) = |OP|^2 - r^2 \quad \text{(IV.33)}$$

Dengan demikian hal ini dapat diartikan bahwa $|OP|^2 - r^2$ merupakan kuasa titik P terhadap lingkaran C. Dalam hal ini dapat ditulis menjadi :

$$Kuasa(P) = |OP|^2 - r^2 \quad \text{(IV.34)}$$



Gambar 4.17. Segmen garis yang menghubung titik kuasa dan pusat lingkaran

Melalui penjabaran hubungan antara titik kuasa, titik singgung, serta segmen-segmen garis yang melalui titik kuasa dan titik potong lingkaran, kuasa titik terhadap lingkaran dapat ditentukan, sebagai selisih antara kuadrat jarak titik Kuasa ke pusat lingkaran dengan kuadrat jai-jari. Dalam hal ini dituliskan dengan $Kuasa(P) = |OP|^2 - r^2$.

Kuasa titik terhadap suatu lingkaran juga dapat dikonstruksi, melalui hubungan antara kedudukan titik kuasa dengan persamaan lingkaran.Misal titik P berkedudukan di(x_1, y_1) sebagai kuasa titik terhadap lingkaran$\mathbb{C} \coloneqq x^2 + y^2 + Ax + By + C$ yang berpusat di $O\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ dengan jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$. Kuasa titik dari P terhadap $\mathbb{C}$ dapat diuraikan dalam bentuk berikut:

$$Kuasa(P) = |OP|^2 - r^2$$

Jarak $P(x_1, y_1)$ ke $O\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, dengan menggunakan rumus jarak diperoleh bahwa :

$$|OP| = \sqrt{\left(x_1 - \left(-\frac{AA}{2}\right)\right)^2 + \left(y_1 - \left(-\frac{AB}{2}\right)\right)^2} \quad \textbf{(IV.35)}$$

$$|OP|^2 = \left(x_1 - \left(-\frac{AA}{2}\right)\right)^2 + \left(y_1 - \left(-\frac{AB}{2}\right)\right)^2$$

$$|OP|^2 = {x_1}^2 + Ax_1 + \left(\frac{AA}{2}\right)^2 + {y_1}^2 + By_1 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$$

$$|OP|^2 - r^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + Ax_1 + By_1 + C$$

(IV.36)

Dari sini menunjukkan bahwa kuasa titik terhadap lingkaran, dapat pula ditentukan dengan mensubtitusi nilai x_1 dan $y_1$ke dalam nilai x dan y yang termuat didalam persamaan lingkaran $\mathbb{C} \coloneqq x^2 + y^2 + Ax + By + C$

4. I. LATIHAN SOAL

Pemahaman Konsep

1. Kemukakan penjelasan anda mengenai hubungan konsep Teorema Pythagoras dalam pembentukan persamaan dasar lingkaran!
2. Dari telaah definisi lingkaran, berikanlah contoh fenomena yang memenuhi kriteria lingkaran. Dari fenomena tersebut, eksplorasilah unsur-unsur yang ada di dalamnya yang memenuhi unsur-unsur yang ada pada lingkaran!
3. Kemukakan penjelasan naratif mengenai kedudukan titik terhadap lingkaran!
4. Kemukakan penjelasan naratif mengenai konsep kedudukan garis terhadap lingkaran!

Penyelesaian Soal Secara Prosedural

5. Diketahui sebuah titik pusat lingkaran berada pada titik $(1,2)$ dan titik $(3\,,6)$ tepat berada pada lingkaran. Tentukanlah persamaan umum lingkaran tersebut !
6. Diketahui suatu lingkaran berpusat di titik O, dan suatu titik A berada di luar lingkaran, di mana titik tersebut mempunyai jarak minimum dengan lingkaran sepanjang 1 satuan dan jarak maksimumnya 5 satuan yang terletak di $(5\,,-1)$ Jika titik A berkedudukan di $(5\,,-6)$. Tentukan letak titik pusat dan persamaannya!
7. Sebuah lingkaran memiliki titik pusat di titik $(\mathbf{1},\mathbf{3})$cm dengan diameter 14 cm, kemudian titik pusat lingkaran tersebut digeser sejauh 5 cm, tentukan persamaan lingkaran dan sketsakan persamaan tersebut kedalam kordinat kartesius !
8. Buktikan bahwa titik $(8,2),(8,6),(6,4)\ dan\ (10,4)$berkedudukan pada lingkaran yang sama!
9. Jika diberikan suatu persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 12\,x - 8\,y + 43 = 0$, dan salah satu titik ujung dari diameter lingkaran tersebut terletak di titik $(-9,4)$, tentukan letak titik ujung dari diameter tersebut!
10. Tentukan kedudukan Garis $4\,x - 2\,y - 16 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 6\,x + 4\,y - 12 = 0$ dan sketsakan dalam koordinat kartesius !
11. Perpotongan dua buah lingkaran lingkaran $L1 \coloneqq x^2 + y^2 - 6\,x + 4\,y - 12 = 0$ dan $\boldsymbol{L2}\,;\ \boldsymbol{x^2 + y^2 + 4x + 6y + 8 = 0}$ membentuk sebuah tali busur pada kedua perpotongannya, tentukan panjang tali bususr hasil perpotongan dua lingkaran yang dimaksud !
12. Suatu lingkaran memiliki titik pusat yang terletak di (2,3) dan menyinggung sumbu y maka berapakah panjang jari-jarinya?
13. Suatu lingkaran memiliki titik pusat yang berada di (4,5) dan menyinggung sumbu – x maka berapakah panjang jari-jarinya
14. Tentukan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ di titik $(1,2)$.
15. Jika diketahui persamaan lingkaran $L\colon x^2 + y^2 = 25$. Carilah persamaan garis singgungnya diketahui garis singgung melalui titik $(6,5)$

16. Diketahui sebuah garis menyinggung lingkaran $(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}=\mathbf{12,98}$ dan melalui titik $(-\mathbf{4},\mathbf{2})$ diluar ligkaran. Tentukan
    a. Gradien-gradien garis yang dimaksud.
    b. Persamaan garis singgungnya masing masing.
    c. Titik yang menyinggung lingkaran yang dilewati oleh salah satu garis yaqng dimaksud
17. Dua buah lingkaran saling berpotongan$\boldsymbol{L1}$; $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}-\mathbf{8}\,\boldsymbol{x}-\mathbf{10}\,\boldsymbol{y}-\mathbf{12}=\mathbf{0}$ dan $\boldsymbol{L2}$; $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}=\mathbf{36}$. Tentukanlah:
    a. Persamaan garis kuasanya
    b. Titik kuasanya pada sumbu-x dan sumbu-y
    c. Kuasa titik pada kedua lingkaran tersebut.
18. Diketahui sebuah lingkaran melalui titik perpotongan $\boldsymbol{L1}$; $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}-\mathbf{6}\,\boldsymbol{x}-\mathbf{4}\,\boldsymbol{y}+\mathbf{4}=\mathbf{0}$ dan $\boldsymbol{L2}$; $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y}-\mathbf{11}=\mathbf{0}$. Tentukan persamaan lingkaran
    a. Jika melalui titik $\boldsymbol{P}(\mathbf{0.5}\,,\mathbf{1.5})$
    b. Jika melaui titik $\boldsymbol{Q}\ (\mathbf{1},\mathbf{1})$

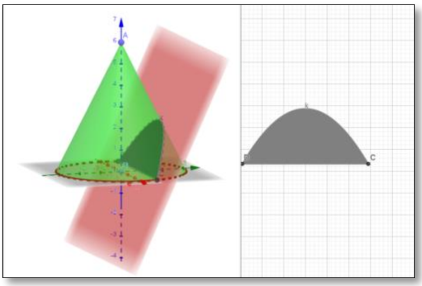
BAB V. PARABOLA

Kemampuan akhir yang diharapkan

- ❖ Menjelaskan definisi parabola secara verbal dan dapat menyesuaikan definsi parabola dalam tinjauan aljabar dan geometri
- ❖ Membentuk persamaan parabola standar
- ❖ Menurunkan rumus persamaan parabola tak standar
- ❖ Menurunkan dan menggunakan rumus tinjauan kedudukan titik terhadap parabola
- ❖ Menurunkan persamaan dan menggunakan rumus tinjauan kedudukan garis terhadap parabola.
- ❖ Mampu menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan Parabola baik secara kelompok maupun secara individu
- ❖ Mengeksplorasi parabola pada aplikasi geogebra

5. A. PARABOLA SEBAGAI IRISAN KERUCUT

Salah satu bentuk yang dihasilkan oleh irisan bidang datar terhadap bangun ruang kerucut adalah potongan yang sisinya membentuk ruas parabola. Secara visual dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 5.1.Irisan Bangun Ruang Kerucut oleh Bidang datar secara tegak

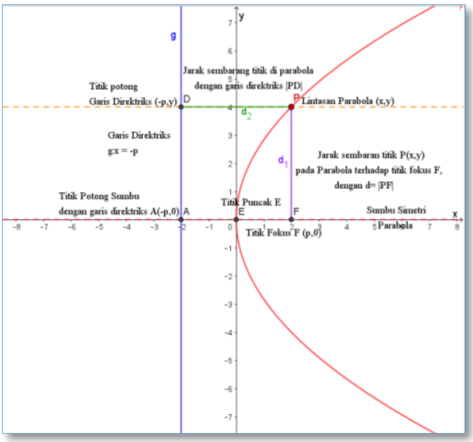
Dari gambar di atas secara visual dapat diamati bahwa ruang kerucut yang menempati $\mathbb{R}^3$ dan dipotong oleh bidang datar yang menempati $\mathbb{R}^2$ menghasilkan parabola yang menempati $\mathbb{R}^2$. Secara standar dapat dikombinasikan menjadi empat jenis posisi kerucut dan bidang datar yang menghasilkan parabola yang vertikal ke atas, vertikal ke bawah , horizontal ke kiri dan horizontal kek kanan.

Pada bab ini, akan diuraikan secara mendalam irisan kerucut yang berbentuk parabola dengan meninjau definisi, unsur-unsur, persamaan dasar, persamaan tak standar, kedudukan titik dan garis terhadap parabola yang mengintegrasikan visualisai geometris dan representasi aljabarnya dengan bantuan perangkat lnak GeoGebra.

5. B. DEFINISI PARABOLA DAN UNSUR-UNSUR PARABOLA

Parabola didefinsikan sebagai kumpulan titik titik yang mempunyai jarak yang sama terhadap satu titik khusus dan terhadap satu garis tertentu. Titik khusus ini dikenal sebagai koordinat titik fokus parabola sedangkan garis tertentu yang dimaksud adalah garis *direktris*. Semua titik-titik yang dilewati oleh parabola mempunyai jarak yang sama terhadap titik fokus dan garis direktris. Parameter posisi yang lain adalah posisi puncak parabola, jarak antara titik fokus dengan puncak parabola mempunyai jarak yang sama dengan jarak antara puncak parabola ke garis direktris (p). Unsur lain pada parabola adalah sumbu simetri yang membagi dua parabola dengan ukuran dan bentuk yang sama. Selain itu parabola akan melalui titik fokus dan titik puncak parabola, sekaligus memotong secara tegak lurus garis direktris. Dari uraian definisi tersebut maka kita mulai mengenal unsur utama dalam parabola, yaitu :

1. Lintasan parabola, yang membentuk kumpulan titik yang memenuhi persamaan parabola dalam hal ini dapat dinotasikan dengan $\boldsymbol{P_i(x, y)}$.
2. Titik Fokus yang bergantung pada parameter parabola denngan notasi $\boldsymbol{F}$.
3. Garis direktriks : garis yang tegak lurus dengan sumbu simetri parabola.
4. Titik Puncak :
5. Sumbu simetri parabola : garis yang tegak lurus dengan garis direktriks dan melalui titik fokus dan titik puncak.



Gambar 5.2.Parabola standar dan unsurnya

5. C. PERSAMAAN PARABOLA STANDAR

Dalam membentuk persamaan standar parabola, terlebih dahulu perlu untuk kembali memahami makna dari istilah standar. Penggunaan istilah standar merujuk pada titik puncak dari parabola. Titik puncak parabola yang berada di $(0,0)$ dianggap sebagai parabola standar. Sedangkan untuk pengembangan, terdapat pula parabola tak standar yang titik puncaknya bergeser pada (α, β). Pembentukan persamaan standar parabola tidak terlepas dari definisi parabola itu sendiri. Dalam hal ini persamaan parabola yang digambarkan pada sumbu koordinat kartesius akan melewati lintasan titik-titik tertentu. Untuk lebih jelasnya, mari perhatikan konsep pembentukan persamaan dasar dari parabola :

1. Dengan menggunakan dalil bahwa jika kita mengambil satu titik yang dilalui oleh parabola misal titik (x, y) maka mestilah titik ini mempunyai jarak yang sama ke garis diaretriks dan ke titik Fokus.
2. Dengan menggunakan konsep jarak maka penurunan persaman parabola untuk masing-masing tipe dapat dilihat pada tabel berikut :

Sehingga untuk penurunan persamaan, titik fokus, garis direktriks dan sumbu simetrinya diperoleh 4 jenis parabola standar, berikut untuk parabola horizontal

Penurunan persamaan :

$d_1 = d_2 \Rightarrow |PF| = |PD|$

$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$

$= \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2}$

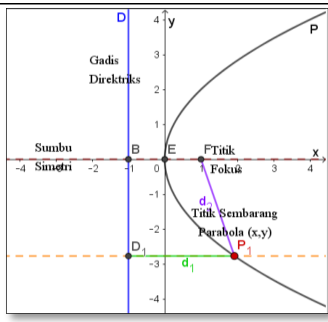
$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$

$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$

$-2px + y^2 = 2px \Longrightarrow y^2 = 4px$

(V.1)

Persamaan	$y^2 = 4px$
Titik Fokus	$F(p, 0)$
Garis direktriks	$D \coloneqq x = -p$
Titik Puncak	$E(0,0)$
Sumbu Simetri	$y = 0$



Gambar 5.3.Parabola horizontal
Gambar 5.4.ke kanan

Penurunan persamaan :

$d_1 = d_2 \Rightarrow |PF| = |PD|$

$\sqrt{(x-(-p))^2 + (y-0)^2}$

$= \sqrt{(x-p)^2}$

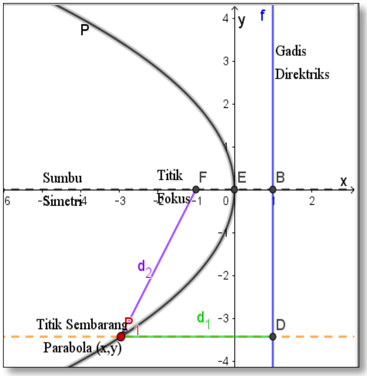
$(x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2$

$x^2 + 2xp + p^2 + y^2 = x^2 - 2xp + p^2$

$-2px + y^2 = -2px$

$y^2 = -4px$

(V.2)



Gambar 5.5.Parabola horizontal ke Kiri

Persamaan	$y^2 = -4px$
Titik Fokus	$F(-p, 0)$
Garis direktriks	$D \coloneqq x = p$
Titik Puncak	$E(0,0)$
Sumbu Simetri	$y = 0$
Bentuk Parabola	Horizontal cekung ke Kiri

Selanjutnya untuk Parabola Vertikal Penurunan persamaan, titik fokus, garis direktriks

Penurunan persamaan :

$d_1 = d_2 \Rightarrow |PF| = |PD|$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}$

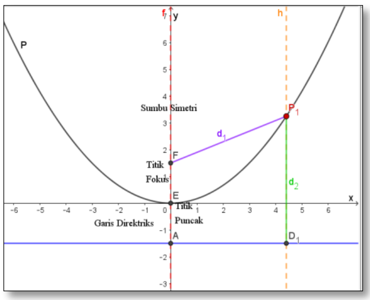
$= \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}$

$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$

$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$

$x^2 - 2py = 2py \Longrightarrow x^2 = 4py$

(V.3)



Gambar 5.6.Vertikal cekung ke atas

Persamaan	$x^2 = 4py$
Titik Fokus	$F(0, p)$
Garis direktriks	$g \coloneqq y = -p$
Titik Puncak	$E(0,0)$
Sumbu Simetri	$x = 0$
Bentuk Parabola	Vertikal cekung ke atas

Penurunan persamaan :

$d_1 = d_2 \Rightarrow |PF| = |PD|$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2}$

$= \sqrt{(x-x)^2 + (y-p)^2}$

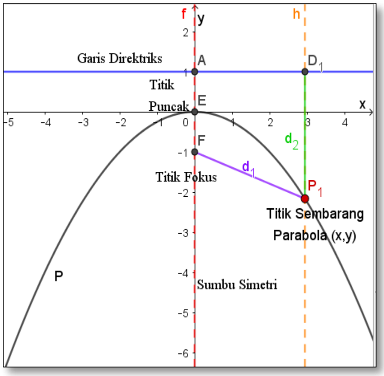
$x^2 (y+p)^2 = (y-p)^2$

$x^2 + y^2 + 2py + p^2 = y^2 - 2py + p^2$

$x^2 + 2py = -2py$

$x^2 = -4py$

(V.4)



Gambar 5.7.Vertikal cekung ke bawah

Persamaan	$y^2 = -4px$
Titik Fokus	$F(0, p)$
Garis direktriks	$g \coloneqq y = p$
Titik Puncak	$E(0,0)$
Sumbu Simetri	$x = 0$
Bentuk Parabola	Vertikal cekung ke bawah

Dari keempat jenis persamaan parabola di atas dapat di lihat pada tabel berikut, hubungannya terhadap garis direktriks, koordinat titik fokus, titik puncak, dan sumbu simetri

Persamaan	Titik Fokus	Garis direktriks	Titik Puncak	Sumbu Simetri	Bentuk Parabola
$y^2 = 4px$	$F(p, 0)$	$g \coloneqq x = -p$	$(0,0)$	$y = 0$	Horizontal cekung ke kanan
$y^2 = -4px$	$F(-p, 0)$	$g \coloneqq x = p$	$(0,0)$	$y = 0$	Horizontal cekung ke kiri
$x^2 = 4py$	$F(0, p)$	$g \coloneqq y = -p$	$(0,0)$	$x = 0$	Vertikal cekung ke atas
$x^2 = -4py$	$F(0, -p)$	$g \coloneqq y = p$	$(0,0)$	$x = 0$	Vertikal cekung ke bawah

Berikut diberikan contoh soal yang dimaksudkan untuk memberikan gambaran mengotak atik persamaan parabola untuk mengidentifikasi unsur-unsurnya.

Contoh Soal 5.1 :

Tentukan koordinat dari titik puncak, titik fokus, persamaan garis direktriks dan persamaan sumbu simetri serta bentuk parabolanya dari beberapa persamaan parabola $\boldsymbol{x^2 = -16y}$.

Persamaan: $x^2 = -16y \Longrightarrow 4p = -16 \Longrightarrow p = -4$

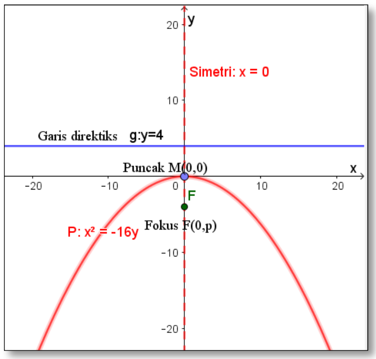
Titik Fokus: $F(0, p) \Longrightarrow F(0, -4)$

Garis direktriks: $g \coloneqq y = -p \Longrightarrow y = 4$

Titik Puncak: $M(0,0)$

Sumbu Simetri: $x = 0$

Bentuk Parabola: Vertikal cekung ke bawah



Gambar 5.8.Penggambaran soal 1

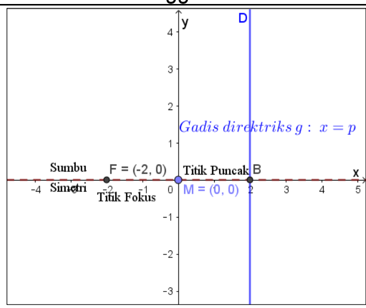
Misalkan suatu parabola memiliki titik puncak yang terletak di $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ dan titik fokusnya terletak di titik $\boldsymbol{F}(-\mathbf{2}, \mathbf{0})$, tentukanlah persamaan parabolanya !

Diketahui:

Titik Fokusnya adalah $\boldsymbol{F}(-\mathbf{2}, \mathbf{0})$

Titik Puncak $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

Ditanyakan: Persamaan parabolanya ?



Gambar 5.9.Garis direktrik

Penyelesaian :

Jarak tiik fokus ke puncak

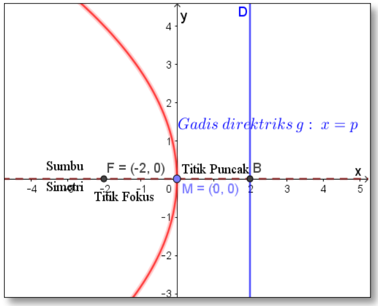
$$p = 0 - (-2) = 2$$

Garis direktriksnya

$$g \coloneqq x = -(p) = 2$$

Persamaannya :

$$\begin{aligned} &y^2 = -4px \\ &\Rightarrow y^2 = -4 \cdot p \cdot x \\ &\Rightarrow y^2 = -4 \cdot 2 \cdot x \\ &\Rightarrow y^2 = -8x \end{aligned}$$



Gambar 5.10. Parabola standar

5. D. PERSAMAAN PARABOLA TAK STANDAR

Parabola tak standar yang dimaksudkan pada bagian ini dapat dibedakan atas pengembangan karena pergeseran titik puncak dan yang kedua adalah dengan menggunakan sumbu simetris yang tidak lagi sejajar dengan sumbu utama yakni sumbu x dan sumbu y.

❖ Persamaan Parabola Tak Standar oleh Pergeseran Titik Puncak

Dalam pengembangan parabola standar melalui pergeseran titik puncak $(0,0)$ ke titik $(\alpha.\beta)$ pada dasarnya mengikuti dan mempertahankan bentuk persamaan dasar. Perubahan mendasarnya yaitu variabel x pada persamaan dasar berubah menjadi $(x - \alpha)$ sedangkan variabel y berubah menjadi $(y - \beta)$. Dapat dimaknai bahwa $x \rightarrow (x - \alpha)$, titik pusatnya secara horizontal bergeser ke kanan sejauh α, sedangkan $y \rightarrow (y - \beta)$titik pusatnya bergeser secara vertikal ke atas sejauh β. Perubahan titik puncak dari $(0,0)$ ke titik $(\alpha.\beta)$ juga berakibat pada perubahan pada persamaan, titik fokus, garis direktriks, dan sumbu simetri parabola. Berikut hubungan-hubungan yang dimaksudkan :

Persamaan	Titik Fokus	Garis direktriks	Titik Puncak	Sumbu Simetri
$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$	$F(\alpha, p+\beta)$	$g \coloneqq x = \beta - p$	$(\alpha.\beta)$	$y = \beta$
$(y-\beta)^2 = -4p(x-\alpha)$	$F(\alpha, -p+\beta)$	$g \coloneqq x = \beta + p$	$(\alpha.\beta)$	$y = \beta$

$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$	$F(p+\alpha,\beta)$	$g \coloneqq y = \alpha - p$	$(\alpha.\beta)$	$x = \alpha$
$(x-\alpha)^2 = -4p(y-\beta)$	$F(-p+\alpha,\beta)$	$g \coloneqq y = \alpha + p$	$(\alpha.\beta)$	$x = \alpha$

Sebagai catatan, bahwa jika titik puncak $(\alpha \neq 0.\beta \neq 0)$ maka akan menempati 4 kuadran. Sehingga nilai-nilainya ikut menyesuaikan.

❖ **Perubahan Sumbu Utama dan Pergeseran Titik Puncak**

Persamaan parabola jenis berikutnya adalah persamaan yang dikembangkan melalui perubahan sumbu utama. Pada pergeseran titik puncak juga mengakibatkan pergeseran sumbu utama, namun pergeseran yang dihasilkan tetap sejajar dengan sumbu-x atau sumbu-y. Selanjutnya pada bagian ini, pergeseran yang dimaksudkan adalah pergeseran yang diakibatkan sumbu simetris parabola tidak lagi sejajar dengan sumbu-x atau sumbu-y. Dengan demikian sumbu parabola yang baru, memiliki dua sumbu yang saling tegak lurus namun memiliki kemiringan terhadap sumbu-x dan sumbu-y.

Pada bagian ini, perlu kembali diingat konsep dari bentuk normal persamaan garis dan bagaimana karakteristik dari dua garis yang saling tegak lurus. Misalkan diberikan persamaan garis sebagai sumbu simetris dari parabola misal $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, denagn kemiringan m_1. Dengan ini bentuk normalnya dapat dituliskan dengan :

$$\pm\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}} = 0 \qquad \text{(V.5)}$$

Berdasarkan konsep dua garis yang saling tegak lurus maka pasangan sumbu simetri dari parabola mestilah memiliki kemiringan $m_2 = \frac{-1}{m_1}$, sehingga persamaan garisnya adalah :

$$b_1x - a_1y + c_2 = 0 \qquad \text{(V.6)}$$

Dari persamaan garis ini, bentuk normalnya dapat dituliskan menjadi : $\pm\frac{b_1x - a_1y + c_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}} = 0$

Jika kita ingin mempertahankan bentuk parabola standar pada pasangan sumbu simetris ini yangTitik puncaknya adalah $(\alpha.\beta)$ dan misalkan titik sembarang yang dilewati oleh lintasan parabola adalah (x, y), maka dapat ditulis menjadi :

$$y^2 = 4px \qquad \text{(V.7)}$$

$$\left(\pm\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}}\right)^2=4p\left(\frac{b_1x-a_1y+c_2}{\sqrt{{b_1}^2+{b_1}^2}}\right) \quad \text{(V.8)}$$

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2=4p\left(\frac{b_1x-a_1y+c_2}{\sqrt{{b_1}^2+{b_1}^2}}\right)\left(\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}\right)^2 \quad \text{(V.9)}$$

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2=4p(b_1x-a_1y+c_2)\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2} \quad \text{(V.10)}$$

Dari persamaan parabola di atas, dapat ditentukan persamaan parabola lainnya :

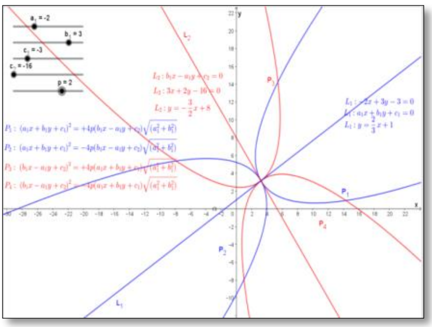
$$P_1 \coloneqq (a_1x+b_1y+c_1)^2=4p(b_1x-a_1y+c_2)\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2} \quad \text{(V.11)}$$

$$P_2 \coloneqq (a_1x+b_1y+c_1)^2=-4p(b_1x-a_1y+c_2)\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2} \quad \text{(V.12)}$$

$$P_3 \coloneqq (b_1x-a_1y+c_2)^2=4p(a_1x+b_1y+c_1)\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2} \quad \text{(V.13)}$$

$$P_4 \coloneqq (b_1x-a_1y+c_2)^2=-4p(a_1x+b_1y+c_1)\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2} \quad \text{(V.14)}$$

Berikut visualisasi parabola tak standar akibat pergeseran titik puncak parabola dan perubahan sumbu simetris parabola. Sumbu simetris parabola menggunakan persamaan garis lurus



Gambar 5.11. Kombinasi 4 parabola tak standar akibat rotasi sumbu simetri dan pergeseran titik puncak

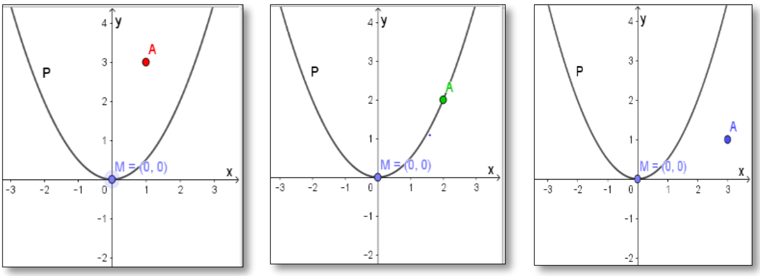
5. E. KEDUDUKAN TITIK TERHADAP PARABOLA.

Pada bagian ini akan diuraikan bagaimana kedudukan titik terhadap parabola. Sebagaimana pada bab sebelumnya kita telah mengetahui cara mengidentifikasi kedudukan titik terhadap garis dilakukan dengan mensubtitusi titik koordinat yang ditinjau ke dalam persamaan garis. Hal serupa juga dilakukan dalam mengidentifikasi kedudukan titik tehadap parabola. Secara visual kedudukan titik terhadap parabola terdapat tiga jenis, yaitu titik berada diluar parabola, titik berada di dalam parabola dan titik berada pada lintasan parabola.

Misal titik (x_1, y_1) akan diamati kedudukannya terhadap parabola vertikal ke atas dan berpusat di $(0,0)$ dengan persamaan $x^2 = 4py$, kemungkinan posisi titik tersebut terhadap parabola adalah sebagai berikut :

1. Jika $x_1{}^2 - 4py_1 < 0$, titik (x_1, y_1) berada di dalam parabola.
2. Jika $x_1{}^2 - 4py_1 = 0$, titik (x_1, y_1) berada tepat di lintasan parabola
3. Jika $x_1{}^2 - 4py_1 > 0$, titik (x_1, y_1) berada di luar parabola.

Berikut gambar yang memvisualisasikan tiga posisi titik terhadap parabola :



Gambar 5.12. Kedudukan titik terhadap parabola a) di dalam , b) di lintasan,) di luar

Hal yang sama untuk parabola jenis vertikal cekung ke bawah, serta parabola horizontal kiri dan kanan. Posisi titik dapat ditinjau dengan menguji titik-titik dengan persamaan karakteristiknya masing-masing. Sedangkan untuk parabola yang berpusat di $(\alpha. \beta)$ dan vertikal ke atas dengan persamaan $(x - \alpha)^2 = 4p(y - \beta)$, , kemungkinan kedudukan titik (x_1, y_1) terhadap parabola adalah sebagai berikut :

Misalkan dipilih jenis parabola yang vertikal dan cekung ke atas.

1. Jika $(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) < 0$, titik $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ berada di dalam parabola.

2. Jika $(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) = 0$, titik $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ berada tepat di lintasan parabola
3. Jika $(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) > 0$, titik $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ berada di luar parabola.

Untuk lebih jelasnya persamaan parabola dapat dilihat dari contoh soal berikut :

Contoh soal 5.2 :

Diberikan persamaan parabola $P: 4(y-1) = (x-1)^2$ identifikasilah kedudukan titik-titik $A(3,1), B(3,2)$ dan $C(3,3)$

Jawab :

Diketahui persamaan parabola $P: 4(y-1) = (x-1)^2$, untuk mengidentifikasi kedudukan titik $A(3,1), B(3,2)$dan $C(3,3)$ dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan karakteristik berikut

1. Jika $(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) < 0$, titik (x_1, y_1) berada di dalam parabola.
2. Jika $(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) = 0$, titik (x_1, y_1) berada pada parabola
3. Jika $(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) > 0$, titik (x_1, y_1) berada di luar parabola.

$$A(3,1) \Longrightarrow x_1 = 3; y_1 = 1$$

$$(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) \Longrightarrow (3-1)^2 - 4.1.(1-1) = 4$$

Karena, $(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) = 4 > 0$. Maka, Titik $A(3,1)$ berada di luar parabola. Secara visual gambar disamping menunjukkan titik $A(3,1)$ berada di luar parabola

$$B(3,2) \Longrightarrow x_1 = 3; y_1 = 2$$

$$(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) \Longrightarrow (3-1)^2 - 4.1.(2-1) = 0$$

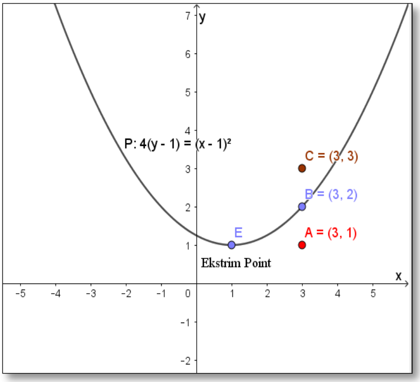
Karena, $(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) = 0$, Maka, Titik $A(3,1)$ berada tepat di lintasan parabola. Secara visual gambar disamping menunjukkan titik $B(3,1)$ berada di luar parabola

$$C(3,3) \Longrightarrow x_1 = 3; y_1 = 3$$

$$(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) \Longrightarrow (3-1)^2 - 4.1.(3-1) = -4 < 0$$

Karena $(x_1 - \alpha)^2 - 4p(y_1 - \beta) = 0$, Maka, Titik $C(3,1)$ berada tepat di lintasan parabola. Secara visual gambar disamping menunjukkan titik $C(3,1)$ berada dalam lintasan parabola

Untuk memperjelas contoh soal di atas dapat dilihat pada visualisasi gambar kedudukan titik terhadap parabola berikut :

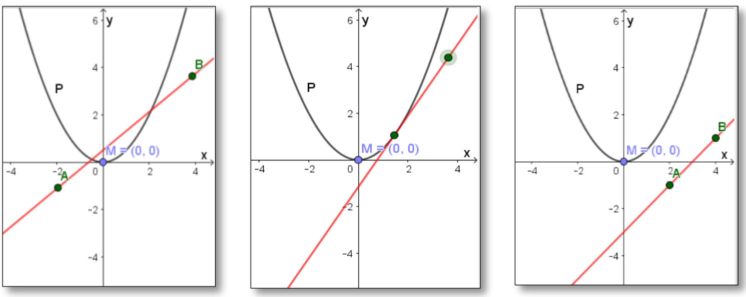


Gambar 5.13. Pengujian kedudukan titik terhadap parabola

Secara visual, secara jelas dapat dikatakan bahwa titik A berada di luar parabola, titik B berada tepat di lintasan parabola sedangkan titik C berada di dalam parabola.

5. F. KEDUDUKAN GARIS TERHADAP PARABOLA

Seperti pada kedudukan titik terhadap parabola pada sub bab sebelumnya, kedudukan garis terhadap parabola juga dapat dibedakan menjadi 3 jenis yaitu garis memotong parabola, garis menyinggung parabola, garis tidak memotong dan tidank menyinggung parabola. Secara visual dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 5.14. Kedudukan garis terhadap parabola

Pada bagian ini, tujuan yang akan dicapai tidak hanya mengenal visualisasi geometris namun diharapkan mampu memahami representasi persamaan karakteristinya dan bagaimana interpretasi persamaannya. Berikut cara pembentukan persamaan karakteristik yang digunakan dalam mengidentifikasi kedudukan garis terhadap parabola.

Pandang persamaan parabola yang digunaka adalah persamaan bola standar yang bentuknya vertikal dan cekung ke atas berpusat di $(0,0)$ dengan persamaan $x^2 = 4py$. Selanjutnya akan ditinjau kedudukan garis misal garis $y = mx + c$. Dari kedua unsur tersebut kemudian dapat digabungkan dengan mensubtitusi persamaan garis ke dalam persamaan parabola, seperti berikut :

$$x^2 = 4p(mx + c) \qquad \text{(V.15)}$$

$$x^2 = 4pmx + 4pc \qquad \text{(V.16)}$$

$$x^2 - 4pmx - 4pc = 0 \qquad \text{(V.17)}$$

Bentuk di atas sudah identik dengan persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$ dengan ini dapat ditulis bahwa $A = 1; B = -4pmx; C = -4pc$ dari nilai-nilai diperoleh nilai Diskriminan (D) melalui rumusan $D = B^2 - 4AC$ sehingga diperoleh :

$$D = (-4pm)^2 - 4(1)(-4pc) = 16((pm)^2 + (pc)) \qquad \text{(V.18)}$$

Dari rumusan ini dapat diperoleh kedudukan titik terhadap parabola sebagai berikut

1. Jika $D = 16\big((pm)^2 + (pc)\big) > 0$, maka memotong dua titik di parabola
2. Jika $D = 16\big((pm)^2 + (pc)\big) = 0$, maka menyinggung satu titik di parabola
3. Jika $D = 16\big((pm)^2 + (pc)\big) < 0$, maka tidak memotong dan menyinggung titik di parabola.

Contoh soal 5.3 :

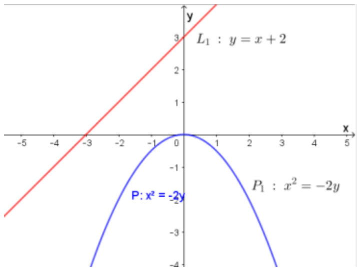
Tunjukkan bahwa garis yang direpresentasikan oleh persamaan $y = x + 2$ tidak memotong dan menyinggung parabola yang memiliki persamaan $x^2 = -2y$!

Jawab :

Melalui persamaan garis $y = x + 2$ dan parabola $x^2 = -2y$ diperoleh parameter koefisien dan konstantanya masing-masing adalah $m = 1$ dan $c = 2$, sedangkan pada parabola $p = -0.5$. Sedangkan nilai Diskriminannya

$$D = 16\big(0.25 + (-1)\big)$$
$$D = 16(-0.75) = -12$$

Karena nilai $D = -12 < 0$ maka dapat dikatakan bahwa garis $y = x + 2$ tidak menyinggung dan memotong parabola $x^2 = -2y$



Gambar 5.15. Garis tidak menyinggung dan memotong parabola

Cara di atas mengharuskan kita untuk menghafalkan rumusan dari nilai diskriminannya. Cara yang lain adalah dengan memahami hubungan antara dua persamaan yang membentuk persamaan karakteristiknya yaitu persamaan $y = x + 2$ disubtitusi ke dalam persamaan $x^2 = -2y$ diperoleh :

$$x^2 = -2(x + 2) \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$$

Dari $x^2 + 2x + 4 = 0$ diperoleh nilai

$$D = B^2 - 4(A \cdot C) = 2^2 - 4(4 \cdot 1) = 4 - 16 = -12$$

Karena nilai $D = -12 < 0$ maka hal ini menunjukkan bahwa garis $y = x + 2$ tidak menyinggung dan memotong parabola $x^2 = -2y$.

Sedangkan parabola yang horizontal dan cekung ke kanan dan berpusat di $(0,0)$ dengan persamaan $y^2 = 4px$. Selanjutnya akan ditinjau kedudukan garis misal garis $y = mx + c$ terhadap parabola. Dari kedua unsur tersebut kemudian dapat digabungkan dengan mensubtitusi persamaan garis ke dalam persamaan parabola, seperti berikut :

$$(mx + c)^2 = 4px \qquad \text{(V.19)}$$

$$m^2x^2 + 2mcx + c^2 - 4px = 0 \qquad \text{(V.20)}$$

$$m^2x^2 + 2mcx + c^2 - 4px = 0 \qquad \text{(V.21)}$$

$$m^2x^2 + (2mc - 4p)x + c^2 = 0 \tag{V.22}$$

Bentuk persamaan (V.22), identik dengan persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$ dan dikenal sebagai persamaan karakteristik untuk parabola horizontal cekung kanan. Dengan ini dapat ditulis bahwa $A = m^2; B = 2mc - 4p; C = c^2$ dari nilai-nilai diperoleh nilai Diskriminan (D) melalui rumusan, diperoleh :

$$D = B^2 - 4AC \tag{V.23}$$

$$D = (2mc - 4p)^2 - 4(m^2)(c^2) \tag{V.24}$$

Dari rumusan ini dapat diperoleh kedudukan titik terhadap parabola sebagai berikut

1. Jika $D > 0$, maka memotong dua titik di parabola
2. Jika $D = 0$, maka menyinggung satu titik di parabola
3. Jika $D < 0$, maka tidak memotong dan menyinggung titik di parabola.

Sehingga dalam mengidentifikasi kedudukan suatu garis terhadap parabola, cukup dengan mengidentifikasi parameter-parameternya Seperti $m, c,$ dan $p$kemudian tentukan nilai Diskriminannya. Dari nilai diskriminan , kedudukan garis terhadap parabola sudah dapat diketahui.

5. G. GARIS SINGUNG PARABOLA

Pada sub bab sebelumnya mengenai kedudukan garis terhadap parabola telah kita lihat bahwa salah satu kedudukan garis adalah menyinggung parabola. Secara imajinatif, dapat kita bayangkan bahwa garis tersebut menyentuh tepat di satu titik yang melintasi parabola, meskipun garisnya diperpanjang pada kedua ujungnya. Kedudukan garis yang menyinggung parabola ditentukan melalui nilai Diskriminan dari persamaan karakteristiknya.

Pada bagian ini, kita akan mendalami bagaimana menentukan persamaan garis yang menyinggung parabola. Dalam penentuan persamaan garis yang menyinggung parabola maka, terdapat dua kondisi yang dapat membantu kita menentukan persamaan garis singgung yaitu titik persinggungannya diketahui. $S(x_1, y_1)$ dan gradien dari garis singgungnya diketahui misal m. Rumusan untuk membentuk persamaan garis singgung parabola standar yang berpusat di $(0,0)$berdasarkan dua kondisi di atas dapat dilihat pada tabel berikut :

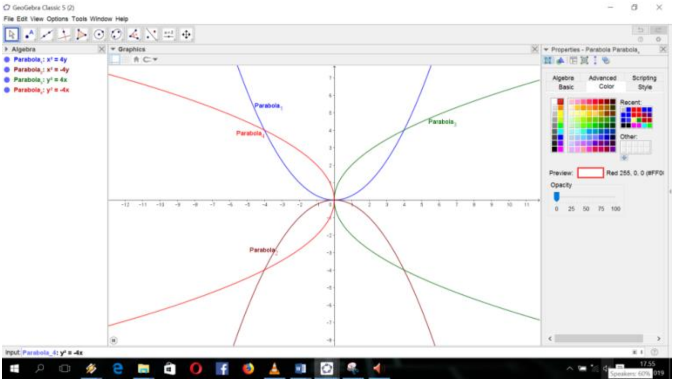
Persamaan	Persamaan Garis Singgung	
	Titik singgung diketahui $S(x_1, y_1)$	Gradien diketahui m
$y^2 = 4px$	$yy_1 = 4p(x + x_1)$	$y = mx + \frac{p}{m}$
$y^2 = -4px$	$yy_1 = -4p(x + x_1)$	$y = mx - \frac{p}{m}$
$x^2 = 4py$	$xx_1 = 4p(y + y_1)$	$y = mx - pm^2$
$x^2 = -4py$	$xx_1 = -4p(x + y_1)$	$y = mx + pm^2$

Sedangkan parabola tak standar yang berpusat $(\alpha.\beta)$ dan titik singggung yang dipilih adalah $S(x_1, y_1)$, maka persamaan garis singgungnya adalah :

Persamaan	Persamaan Garis Singgung	
	Titik singgung diketahui	Gradien diketahui m
$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$	$(y-\beta)(y_1-\beta)$ $= 2p(x + x_1 - 2\alpha)$	$(y-\beta) = m(x-\alpha) + \frac{p}{m}$
$(y-\beta)^2 = -4p(x-\alpha)$	$(y-\beta)(y_1-\beta)$ $= -2p(x + x_1 - 2\alpha)$	$(y-\beta) = m(x-\alpha) - \frac{p}{m}$
$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$	$(x-\alpha)(x_1-\alpha)$ $= 2p(y + y_1 - 2\beta)$	$(y-\beta) = m(x-\alpha) - pm^2$
$(x-\alpha)^2 = -4p(y-\beta)$	$(x-\alpha)(x_1-\alpha)$ $= -2p(y + y_1 - 2\beta)$	$(y-\beta) = m(x-\alpha) + pm^2$

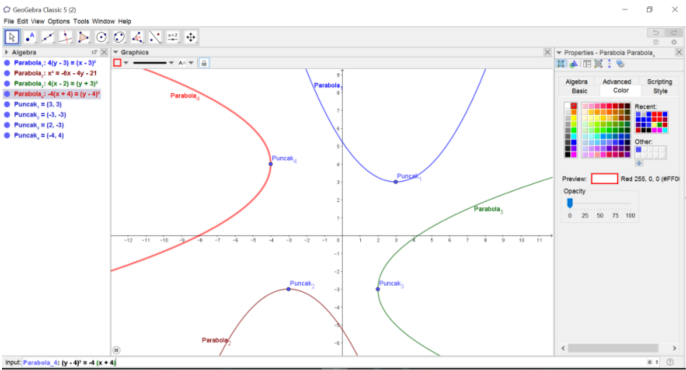
5. H. EKSPLORASI PARABOLA DALAM TINJAUAN GEOGEBRA

Eksplorasi parabola dalam program geogebra dapat dilakukan melalui beberapa cara. Teknik yang paling umum digunakan adalah dengan menginput langsung persamaan parabola, beserta dengan parameter-parameternya. Berikut visualisasi penggunaan kotak input persamaan dalam membuat parabola standar.



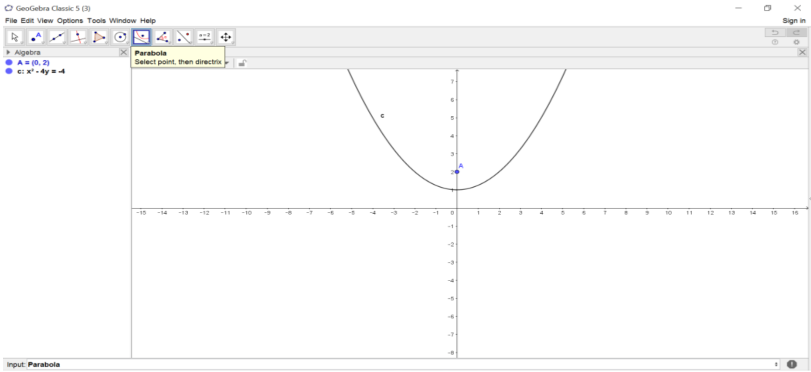
Gambar 5.16. Input persamaan parabola pada geogebra

Demikian halnya untuk parabola tak standar oleh pergeseran titik puncak, cukup dengan memasukkan persamaannya pada kolom input persamaan, berikut contohnya :



Gambar 5.17. Pembuatan parabola tak standar melalui penginputan langsung

Selain input persamaan, penggambaran parabola juga dapat dilakukan dengan menggunakan tools parabola, yang berada dalam kelompok irisan kerucut. Dengan memilih parabola, maka kita diminta untuk memilih titik fokus dan garis direktriks secara langsung. Berikut contohnya :



Gambar 5.18. Penggunaan tools parabola dalam geogebra

5. I. LATIHAN SOAL

Soal Pemahaman Konsep

1. Buatlah grand design dari pembelajaran Parabola, untuk melihat hubungan antar konsep yang dipelajari dalam parabola berdasarkan isi dari buku ini di Bab Parabola!
2. Tuliskan kembali pembentukan 4 persamaan parabola tak standar dengan mengacu pada definisi parabola serta istilah tak standar dimaksudkan sebagai pergeseran titik puncak (0.0) ke $(\alpha.\beta)$!
3. Tuliskan kembali pembentukan persamaan parabola yang sumbu utamanya tidak lagi sejajar sumbu x dan sumbu-y, dalam hal ini terjadi rotasi sumbu!
4. Lakukan eksplorasi GeoGebra dalam membedakan jenis-jenis GeoGebra

Soal Prosedural

1. Diketahui suatu parabola memiliki persamaan $(3y)^2 = 288x$, dari parabola tersebut tentukan kedudukan titik fokus dan persamaan garis direktriksnya !
2. Sketsakanlah satu grafik parabola yang titik fokusnya berkedudukan di titik $\mathbf{(2, 0)}$ dan garis direktriksnya memotong secara tegak lurus di $\boldsymbol{x = 4}$!
3. Sebuah garis direktriks dari suatu parabola memiliki persamaan $y = 6$ Jika diberikan persamaan parabola $y^2 = -2x$ tentukanlah titik fokus dan persamaan garis direktriksnya!

4. Suatu parabola memilik titik puncaknya di $O(3,4)$ memiliki persamaan garis direktriks yaitu $y = 3.5$ dan salah satu titik yang dilalui parabola berada pada titik $P(1,6)$, :
   a. Tentukanlah kedudukan titik Fokusnya !
   b. Tentukan persamaan parabola tersebut !
5. Tentukan titik puncak, titik fokus dan persamaan garis direktriknya dari suatu parabola tak standar yang memiliki persamaan $y^2 + 0.25x + 8y = -15.5$!
6. Diberikan persamaan parabola $P \coloneqq x^2 - 4x - 12y - 20 = 0$ identifikasilah kedudukan titik-titik $A(5,-2), B(6,1)$ dan $C(8,1)$!
7. Tunjukkan bahwa garis yang direpresentasikan oleh persamaan $y = x + 2$ tidak memotong dan menyinggung parabola yang memiliki persamaan $x^2 = -2y$!
8. Tentukan persamaan garis singgung parabola yang memiliki persamaan $(y + 8) = 0.4(x - 4)^2$, dimana titik singgungnya terletak di titik $(14, -6)$!

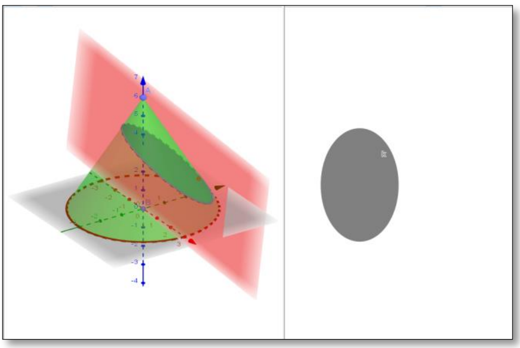
BAB VI. ELIPS

Kemampuan akhir yang diharapkan

- Memahami definisi elips secara geometris
- Menujukkan unsur-unsur dan parameter elips
- Menurunkan persamaan dasar elips berdasarkan definisi
- Menurunkan persamaan elips tak standar karena pergeseran titik pusat
- Menurunkan persamaan elips tak standar karena perputaran sumbu utama
- Menurunkan rumus dalam meninjau kedudukan titik terhadap elips
- Menurunkan rumus dalam meninjau kedudukan garis terhadap elips.
- Menerapkan rumusan-rumusan elips dalam menyelesaikan soal.
- Mengeksplorasi geogebra dalam melihat hubungan aljabar dan geometris elips.

6. A. ELIPS SEBAGAI IRISAN KERUCUT

Setelah melihat lingkaran dan parabola pada bab-bab sebelumnya, kita kemudian dapat memahami bahwa irisan suatu bidang datar terhadap bangun kerucut secara mendatar akan menghasilkan bidang lingkaran. Sedangakan apabila diiriskan secara tegak, maka akan membentuk bangun parabola. Pada bab ini, bidang datar yang diiriskan terhadap kerucut pada tingkat kemiringan tertentu menghasilkan elips. Ilustrasi secara geometris, dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 6. 1. Elips sebagai irisan bidang datar terhadap kerucut

Gambar 6.1 di atas mengilustrasikan bidang elips yang diperoleh dari hasil irisan bidang datar terhadap bangun ruang kerucut. Pembuatan gambar di atas dapat dieksplorasi dengan menggunakan aplikasi GeoGebra dengan mengintegrasikan bidang datar melalui persamaan $ax + by + cz + d = 0$ dengan parameter a, b, c dan d tertentu.

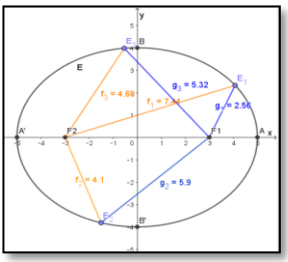
6. B. DEFINISI ELIPS

Elips secara intuitif, dapat dipandang sebagai 2 bidang parabola yang digabungkan secara berhadapan, dimana kedua tititik puncaknya saling berjauhan dan membentuk jarak yang maksimal. Namun jika kita ingin mendefinisikan secara lengkap dan representatif, maka kita harus memperhatikan himpunan titik-titik yang membentuk elips, kedudukan titik fokusnya, dan yang terpenting bagaimana sifat matematisnya yang sedemikian hingga menggeneralisir karakteristik dari elips.

Elips dapat dideskripsikan sebagai himpunan semua titik dimana jika kita mengambil titik dari sembarang himpunan titik tersebut, dan dihubungkan terhadap kedua titik tertentu, maka jumlah jarak setiap titik dari himpuan tersebut terhadap 2 titik tertentu yang bukan elemen himpunan tersebut adalah tetap. 2 titik tertentu yang dimaksud dikenal sebagai titik fokus / titik api.

Secara matematis, elips dapat didefinisikan dalam dua cara, yaitu yang pertama :

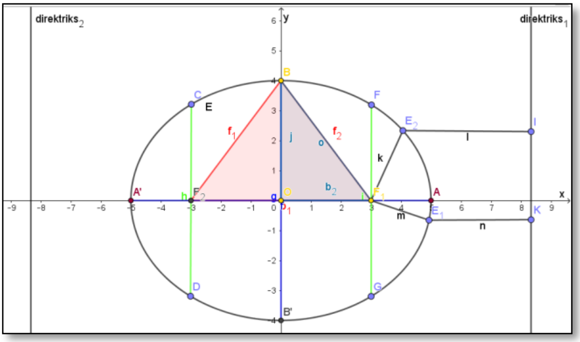
1. Elips dipandang sebagai himpunan titik, misalkan $E = \{E_1, E_2, E_3, \cdots\}$, jika diambil satu dari sembarang titik dan dihubungkan dengan dua titik tertentu yaitu F_1 dan F_2 yang berada diluar himpunan titik elips, maka jumlah jarak antara titik sembarang dengan kedua titik tertentu tersebut akan selalu sama dengan jumlah jarak titik sembarang terhadap kedua titik tentu tersebut. Dengan ini dapat dinotasikan dengan $\overline{E_1F_1} + \overline{E_1F_2} = \overline{E_2F_1} + \overline{E_2F_2} = \overline{E_3F_1} + \overline{E_3F_2} = \cdots$. Titik tertentu tersebut dikenal sebagai titik fokus. Untuk memahaminya, maka visualisasi secara geometris dapat diilustrasikan pada gambar berikut .



Gambar 6. 2. Gambar Definisi Elips 1

Gambar diatas dibuat pada aplikasi geogebra, yang jika divisualisasikan pada aplikasi geogebra secara langsung, maka kita akan melihat animasi perpindahan titik-titik yang dilalui elips pada posisi manapun akan mempunyai jumlah jarak yang tetap dengan kedua titik fokus yang melewati sumbu-*x*.

2. Definisi kedua, elips dipandang sebagai kedudukan-kedudukan titik yang berkumpul dalam satu lintasan, dimana titik-titik ini mempunyai perbandingan tetap, antara jarak titik ke titik fokus, dengan titik ke garis direktrik secara tegak lurus.



Gambar 6. 3. Definisi Elips 2

Dari gambar di atas dapat dijelaskan bahwa diambil 2 titik sembarang yaitu E_1 dan E_2, dimana masing masing titik dihubungkan ke titik fokus F_1 dan ke garis direktrik secara tegak lurus.

Misal $\overline{E_1F_1} = m$; $\overline{E_1K} = n$ dan $\overline{E_2F_1} = k$; $\overline{E_2I} = l$, perbandingan yang dimaksudkan adalah $\frac{m}{n} = \frac{k}{l} < 1$.

Masing-masing definsi memberi pendekatan yang berbeda, dan memberikan cara pembentukan persamaan dasar elips secara berbeda pula meskipun memberikan hasil yang sama.

Tutorial pembuatan gambar pada Geogebra dapat diakses melalui channel youtube TADRIS MATEMATIKA yang telah dibuat oleh tim penyusun.

Unsur-unsur yang terdapat pada elips dapat diuraikan pada poin-point berikut :

a. Titik pusat elips yang secara standar berada pada pusat peroptonagn sumbu-x dan sumbu-y dalam hal ini $O(0,0)$.

b. Titik fokus elips standar dinotasikan dengan F_1 dan F_2 yang berada pada $F_1(c,0)$ dan $F_2(-c,0)$ atau $F_1(0,c)$ dan $F_2(0,-c)$

c. Sumbu mayor dan sumbu minor elips :
   - Sumbu mayor dan sumbu minor selalu dalam posisi saling tegak lurus, perpotongan sumbu mayor
   - Penentuan sumbu mayor dan sumbu minor bergantung pada panjangnya.Berdasarkan ukuran, sumbu mayor selalu lebih panjang dari sumbu minor.
   - Jika sumbu mayornya berimpit dengan sumbu-x, maka titik fokus elips berada pada sumbu-x yaitu $F_1(c,0)$ dan $F_2(-c,0)$ dan sumbu lainnya adalah sumbu minor yang melewati sumbu- y.
   - Demikian sebaliknya,jika sumbu mayornya berimpit dengan sumbu-y, maka titik fokus elips berada pada sumbu-y yaitu $F_1(0,c)$ dan $F_2(0,-c)$, dan sumbu lainnya adalah sumbu minor yang melewati sumbu- x.

d. Sumbu utama adalah sumbu simetri yang melewati titik fokus elips atau sumbu yang berimit dengan sumbu mayor :
   - Jika sumbu mayornya berimpit dengan sumbu-x, maka sumbu-$x$bertindak sebagai sumbu utama.
   - Sedangkan jika sumbu minornya berimpit dengan sumbu-x, maka sumbu-$y$bertindak sebagai sumbu utama.

e. Titik puncak elips standar, berada pada $a = x_{max}$ dan $-a = x_{min}$ seta $b = y_{max}$ dan $-b = y_{min}$. Dengan ini dapat dituliskan dalam notasi berikut:
   - Titik $A(a,0)$ dan $A'(-a,0)$, adalah titik potong antara elips dengan sumbu mayor, jika sumbu mayornya berimpit dengan sumbu- x
   - Titik $B(0,b)$ dan $B'(0,-b)$, adalah titik potong antara elips dengan sumbu minor, jika sumbu mayornya berimpit dengan sumbu- y

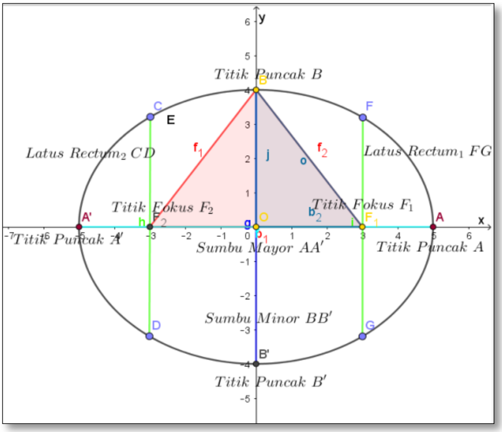
f. Latus Rectum merupakan garis yang memototong elips dan titik fokus F_1 dan F_2, yang saling tegak lurus dengan sumbu mayor.

g. Segitiga BOF_1merupakan segitiga siku-siku yang hubungan antar sisinya dapat dituliskan sebagai :$c^2 = a^2 - b^2$.

h. Eksentrisitas adalah perbandingan jarak 2 titik fokus dan panjang sumbu mayornya. Rumusnya adalah $e = \frac{c}{a}$.

i. Garis direktriks, yaitu garis yang memotong sumbu x, dengan persamaan $x = \frac{a}{e}$ dan $x = \frac{-a}{e}$.

Untuk lebih memahami, unsur-unsur pada elips, berikut diberikan visualisasi geometris mengenai elips yang dibuat pada aplikasi geogebra :



Gambar 6. 4. Unsur-unsur Elips

6. C. PERSAMAAN DASAR ELIPS

Tinjauan analitis geometri bidang ditunjukkan pada penurunan persamaan-persamaan dasar. Persamaan dasar elips dapat diturunkan melalui dua pendekatan definisi. Berikut diuraikan suatu penurunan persamaan dengan menggunakan definisi pertama dan definsi kedua. Pada definisi pertama, diuraikan secara detail penurunan persamaan dilengkapi dengan uraian konstruksi ide, identifikasi saran dan penyesuaian kaidah yang berlaku. Berikut uraiannya

Misal dipilih salah satu titik pada elips yaitu titik $E(x, y)$, berdasarkan definisi elips, maka kita bisa menyatakan bahwa jarak titik E ke titik F_1

Uraian penurunan Rumus secara Detail	Sasaran, Ide, dan Kaidah
Pemilihan titik $E(x,y)$sembarang sebagai representasi titik yang akan diuji sehingga dapat berlaku secara umum dan berlaku pada titik titik yang lain. Pemilihan titik $\mathbf{A}$ karena panjangnya ke F_1 dan F_2 telah diketahui. Pilih titik : $$E(x,y), F_1(c,0), F_2(-c,0), A(a,0)$$	
$\overline{EF_1} + \overline{EF_1} = \overline{AF_1} + \overline{AF_2}$ $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$	Berdaarkan definisi, maka penjumlahan jarak sembarang titik

	ke kedua titik fokus selalu sama. Titik yang diambil adalah $\mathbf{E}$ dan $\mathbf{A}$
$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$	Dengan menggunakan konsep jarak dua titik antara $\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ke titik $\mathbf{F_1}(\mathbf{c},\mathbf{0})$dan $\mathbf{F_2}(-\mathbf{c},\mathbf{0})$
$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$	Dibuat pindah ruas, akar memudahkan dalam menghilangkan akar.
$(x-c)^2+y^2$ $=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ $+(x+c)^2+y^2$	Kedua ruas dikuadratkan untuk mengurangi unsur akar.
$x^2-2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2$ $+2cx+c^2$ $-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ $4cx+4a^2=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$	Kedua ruas mempunyai unsur yang sama dan dapat dihilangkan, lalu dengan mudah dilakukan penyederhanaan
$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\frac{4cx+4a^2}{4a}$ $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\frac{cx}{a}+a$	Disederhanakan dan dipindah ruaskan untuk memisahkan akar
$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2$ $x^2+c^2+y^2=a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}$ $\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2$	Mengkuadratkan kedua ruas untuk menghilangkan unsur akar. Selanjtnya dilakukan pengelompokan dengan memisahkan konstanta, koefisien dan variabel
dengan $a^2-c^2=b^2$ $\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x^2+y^2=b^2$ $\left(\frac{a^2-a^2+b^2}{a^2}\right)x^2+y^2=b^2$	Kembali ke definisi titik fokus, selanjutnya dilakukan penjabaran dengan mengelompokkan parameter, dan variabel.
$\left(\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+y^2=b^2$	Kedua ruas dikali dengan $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b^2}}$

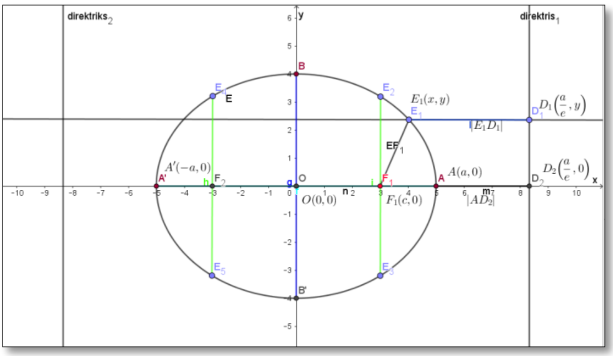
Diperolehlah persamaan umum elips standar tipe horizontal.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{(VI.1)}$$

Penurunan rumus diatas dilakukan dengan menggunakan definisi elips yang pertama. Selanjutnya, penurunan elips yang kedua mempertimbangkan keberadaan nilai eksentrisitas elips, garis direktrik dan jarak masing-masing titik yang ditinjau yaitu titik fokus, titik puncak, titik pusat. Dalam pembentukan persamaannya dengan definisi kedua, ada beberapa hal yang diperhatikan yaitu :

1. Titik yang ditinjau adalah $E(x,y)$ adalah salah satu titik sembarang pada elips yang merepresentasikan titik yang lain.
2. Titik Puncak $A(a,0)$ dan $A'(-a,0)$ sebagai titik bantu yang mempunyai ukuran pasti.
3. Titik fokus $F_1(c,0)$ dan titik pusat $O(0,0)$
4. Garis direktrik elips yang memotong sumbu x secara tegak lurus.
5. Titik potong sumbu utama dengan garis direktrik
6. Nilai eksentrisitas e yang secara umum berlaku sebagai nilai perbandingan antara titik $E(x,y)$ sembarang ke titik fokus F_1 dengan titik $E(x,y)$ ke garis direktris secara horizontal. $|E_1F_1|=m$; $|E_1K|=n$ dan $|E_2F_1|=k$; $|E_2I|=l$, perbandingan yang dimaksudkan adalah $\frac{m}{n}=\frac{k}{l}<1$

Ilustrasi gambarnya, perlu diberikan secara lengkap untuk menvisualisasikan notasi-notasi yang ada serta hubungannya satu sama lain :



Gambar 6. 5. Persamaan elips dengan pendekatan definisi 2

Berikut diberikan secara detail penurunan persamaan yang dilengkapi dengan konstruksi ide, dan kaidah yang dipenuhi pada setiap langkahnya :

Tinjau $E_1(x,y), F_1(c,0)$ dan persamaan garis direktriks $x = \frac{a}{e}$	$\mathbf{F_1}$ sebagai salah satu titik fokus, $\mathbf{E_1}$ adalah sebarang titik elips, dan $\mathbf{D_1}$ adalah titik potong garis direktrik
$\|E_1F_1\| < \|E_1D_1\| \Leftrightarrow \frac{\|E_1F_1\|}{\|E_1D_1\|} = e < 1$ $\|AF_1\| < \|AD_2\| \Leftrightarrow \frac{\|AF_1\|}{\|AD_2\|} = e < 1$ $\|A'F_1\| < \|A'D_2\| \Leftrightarrow \frac{\|A'F_1\|}{\|A'D_2\|} = e < 1$	panjang antara titik sembarang dengan titik fokus akan selalu lebih kecil dari dari panjang antara titik sembarang ke garis direktrik secara tegak lurus. Perbandingan keduanya disebut eksentrisitas
$\frac{\|AF_1\|}{\|AD_2\|} = e \Leftrightarrow \|AF_1\| = e\|AD_2\|$ $\frac{\|A'F_1\|}{\|A'D_2\|} = e \Leftrightarrow \|A'F_1\| = e\|A'D_2\|$	Penjabaran perbandingan jarak diatas dapat dinyatakan bahwa eksentrisitas adalah skala atau pengali jarak titik puncak ke garis direktrik. Hal ini juga berlaku pada titik puncak $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{A'}$
$\|AA'\| = 2a$ $\|A'O\| + \|AO\| = 2a$ $\|A'O\| = \|AO\| = a$	Dengan memandang, panjang titik puncak $\mathbf{A}$ ke titik pusat $\mathbf{O}$ dengan panjang titik puncak $\mathbf{A'}$ ke titik pusat $\mathbf{O}$
$\|AF_1\| + \|A'F_1\| = e\|AD_2\| + e\|A'D_2\|$ $\|AF_1\| + \|A'F_1\| = e(\|AD_2\| + \|A'D_2\|)$ $\|AF_1\| + \|A'F_1\| = e(\|AD_2\| + \|A'D_2\|)$	Pada bagian ini diberikan kembali dijumlahkan kedua segmen garis antara titik puncak $\mathbf{A}$ ke titik fokus $\mathbf{F_1}$ dan $\mathbf{A'}$ ke $\mathbf{F_1}$
$\|AD_2\| = \|OD_2\| - \|AO\|$ $\|A'D_2\| = \|OA'\| + \|OD_2\|$ $2a = e(\|OD_2\| - \|AO\| + \|OA'\| + \|OD_2\|)$ $2a = 2e\|OD_2\| \Longrightarrow \|OD_2\| = \frac{a}{e}$	Kita pun akan mengurai bentuk jarak titik puncak ke garis direktrik sebagai selisih antara titik pusat $\mathbf{O}$ ke titik puncak $\mathbf{A}$. Demikian pula dengan total jarak dari titik puncak $\mathbf{A'}$ ke garis direktrik
$\|A'F_1\| - \|AF_1\| = e\|AD_2\| - e\|A'D_2\|$ $\|A'O\| + \|OF_1\| - (\|AO\| - \|OF_1\|) = e\|AA'\|$ $\|A'O\| + \|OF_1\| - (\|AO\| - \|OF_1\|) = e\|AA'\|$ $\|OF_1\| + \|OF_1\| = e\|AA'\|$ $2\|OF_1\| = e(2a) \Longrightarrow \|OF_1\| = ea$	Pada bagian ini akan ditunjukkan jarak titik pusat ke titik fokus dengan menggunakan parameter nilai eksentrisitas $\mathbf{e}$, diperoleh bahwa letaknya berada pada $\mathbf{F_1(ea, 0)}$
$\frac{\|E_1F_1\|}{\|E_1D_1\|} = e \Longrightarrow \|E_1F_1\| = e\|E_1D_1\|$	Kembali pada nilai eksentrisitas , dari sini kita bisa menghitung jarak $\mathbf{E_1(x,y)}$ ke $\mathbf{F_1(ea,0)}$, dan jarak $\mathbf{E_1(x,y)}$ ke titk

$\lvert E_1D_1\rvert = \sqrt{\left(\frac{a}{e}-x\right)^2+(y-y)^2}$ $\lvert E_1D_1\rvert = \left(\frac{a}{e}-x\right)$	potong garis direktriks secara tegak lurus $\mathbf{D_1}(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{e}},\mathbf{y})$
$\sqrt{(x-ae)^2+(y-0)^2} = e\left(\frac{a}{e}-x\right)$ $(x-ae)^2+y^2 = e^2\left(\frac{a}{e}-x\right)^2$ $x^2-2xae+(ae)^2+y^2$ $= e^2\left(\left(\frac{a}{e}\right)^2-2\frac{a}{e}x+x^2\right)$	Nilai $\lvert\mathbf{E_1F_1}\rvert$dan $\lvert\mathbf{E_1D_1}\rvert$disubtitusi ke $\lvert\mathbf{E_1F_1}\rvert = \mathbf{e}\lvert\mathbf{E_1D_1}\rvert$. Selanjutnya kedua ruas dikuadratkan untuk menghilangkan unsur akar.
$x^2-2xae+(ae)^2+y^2$ $= a^2-2eax+e^2x^2$ $x^2-e^2x^2+y^2 = a^2-(ae)^2$ $x^2(1-e^2)+y^2 = a^2(1-e^2)$	Dilakukan pengelompokan pada kedua ruas, memisahkan antara konstanta dn variabel.
$\frac{x^2(1-e^2)}{a^2(1-e^2)}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$	Selanjutnya pada bagian ini kedua ruas dibagi dengan $\mathbf{a^2(1-e^2)}$, dari sini terlihat bahwa bentuknya menuju ke persamaan elips standar
$b^2 = a^2(1-e^2)$	Dengan memisalkan $\mathbf{b^2}$maka diperolehlah persamaan dasar elips standar

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(VI.2)}$$

Adapun persamaan – persamaan dasar untuk tipe standar yang lain dapat ditentukan dengan cara yang sama.

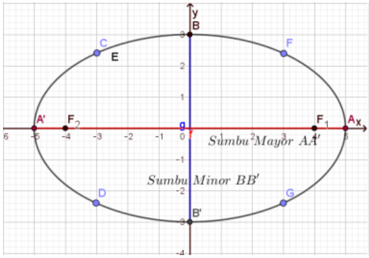
6. D. KLASIFIKASI JENIS-JENIS ELIPS

Pada bagian sebelumnya telah diuraikan secara jelas unsur-unsur utama yang terdapat pada elips. Boleh jadi, penjelasan unsur-unsur elips masih membingungkan dengan adanya sumbu mayor dan sumbu minor yang bergantung pada ukurannya masing-masing. Pada sub bab ini, diklasifkiasikan secara jelas jenis-jenis elips yang ditinjau berdasarkan kedudukan sumbu mayor, kedudukan titik pusat, dan kemiringan sumbu mayor dan minor.Selain menvisualisasikan bentuknya masing masing, juga diberikan bentuk persamaan umumnya.

1. Berdasarkan kedudukan sumbu mayor, elips dibedakan atas elips horizntal dan elips vertikal, dengan visualisasi dan penjelasan sebagai berikut :

Elips horizontal yaitu elips yang sumbu mayornya berimpit atau sejajar dengan sumbu- $\mathbf{x}$. Dengan persamaan

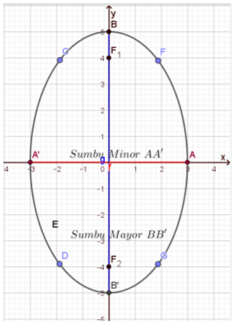
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, dimana\ a > b$$



Gambar 6. 6. Elips standar horizontal

Elips vertikal yaitu elips yang sumbu mayornya berimpit atau sejajar dengan sumbu- $\mathbf{y}$. Dengan persamaan

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, dimana\ a > b$$

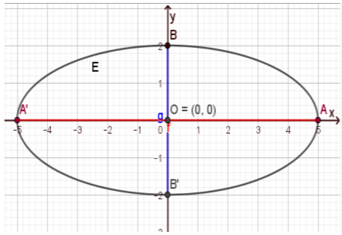


Gambar 6. 7. Elips Standar Vertikal

2. Berdasarkan kedudukan titik fokus, elips dibedakan atas elips standar, dengan penjelasan sebagai berikut :

Elips standar horizontal, yang titik pusatnya berada tepat di pusat sumbu koordinat yaitu berpusat $\mathbf{O}(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Persamaannya :

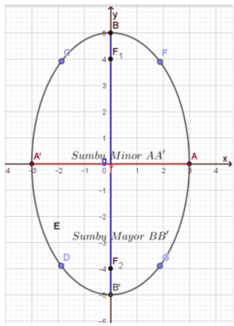
$$\frac{(x-0)^2}{a^2}+\frac{(y-0)^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Gambar 6. 8. Elips standar horizontal

Elips standar vertikal, yang titik pusatnya berada tepat di pusat sumbu koordinat yaitu berpusat $O(0,0)$. Persamaannya :

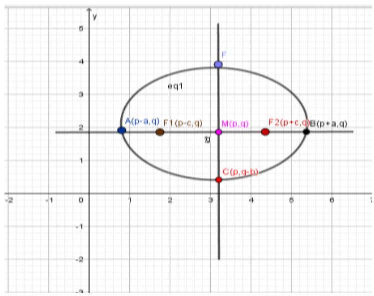
$$\frac{(x-0)^2}{a^2}+\frac{(y-0)^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Gambar 6. 9. Elips Standar Vertikal

Elips tak standar horizontal, yitu elips yang titik pusatnya tidak berada di pusat sumbu koordinat, melainkan bergeser di titik $\mathbf{O'}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ atau $\mathbf{O'}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

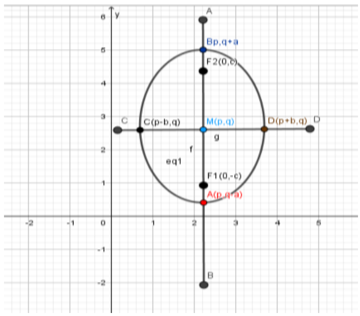
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$



Gambar 6. 10. Elips tak standar horizontal

Elips tak standar vertikal, yitu elips yang titik pusatnya tidak berada di pusat sumbu koordinat, melainkan bergeser di titik $\mathrm{O}'(\mathrm{p},\mathrm{q})$ atau $\mathrm{O}'(\alpha,\beta)$.

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$$



Gambar 6. 11. Elips tak standar vertikal

Untuk memahami, hubungan antar unsur-unsur eips dengan persamaan-persamaannya dapat dieksplorasi melalui contoh soal dan pembahasannya.

Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh Soal 6.1

Tentukan persamaan elips dengan pusat (0,0) dan diketahui salah satu titik puncaknya (0,13) dan salah satu titik fokusnya (0,12)!

Jawab:

Pada bagian ini, melalui titik pusat, titik fokus dan titik puncak, kita akan mengidentifikasi persamaannya . Dari titik pusat $(0,0)$ berarti jenis persamaanya adalah persamaan standar. Dari titik puncaknya $(0,13)$ dan titik fokusnya $(0,12)$, berarti jenis elipsnya adalah elips standar vertikal, dalam hal ini . $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$

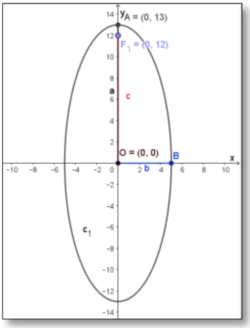
Selanjutnya diperoleh panjang titik fokus ke titik pusat $c=12$, dan panjang sumbu utamanya $2a=26$, diperoleh $a=13$

Dari $c^2=a^2-b^2$,

Diperoleh $b^2=a^2-c^2 \Longrightarrow b^2=13^2-12^2 \Longrightarrow b=5$

Sehingga diperoleh

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{13^2}=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$$



Gambar 6. 12. Ilustrasi soal untuk memperjelas soal

Contoh Soal da Pembahasan bab Elips

Contoh Soal 6.2

Sketsalah kurva $3x^2 - 5y^2 - 6x + 20y + 8 = 0$!

Untuk mengsketsakan persamaan di atas sebenarnya dapat dilakuakn dengan menggunakan geogebra. Namun untuk meningkatkan kemampuan analitis, dan kemampuan berpikir sistematis, perlu kita untuk meninjaunya secara manual. Adapun metode penyelesaiannya secara sistematis dapat dilakukan dengan memperhatikan :

Bentuk polynomnya, perlu diubah ke dalam bentuk bakunya.

Dari bentuk baku, kemudian kita akan mengidentifikasi kedudukan titik pusat, titik puncat, titik fokus, dan panjang sumbu mayor dan minor.

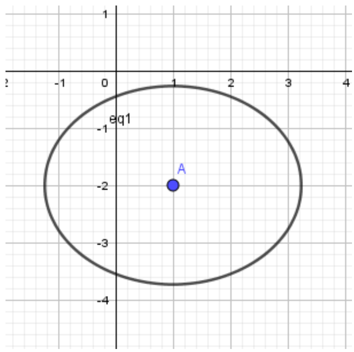
Jawab: $3x^2 - 5y^2 - 6x + 20y + 8 = 0$ Persamaan harus diubah kebentuk yang baku	Dalam pembentukan persamaan bakunya dapat dilakukan dengan manipulasi aljabar dengan mempertahankan, koefisien pada suku yang memuat $\mathbf{x^2}$ dan $\mathbf{y^2}$.
$3x^2 - 5y^2 - 6x + 20y = -8$ $3(x^2 - 2x) - 5(y^2 + 4y) = -8$ $3(x^2 - 2x) - 5(y^2 + 4y) + 23 = -8 + 23$ $3(x^2 - 2x) + 3 - 5(y^2 + 4y) + 20 = 15$ $3(x^2 - 2x + 1) - 5(y^2 + 4y + 4) = 15$ $3(x - 1)^2 - 5(y + 2)^2 = 15$	Pada bagian ini dapat dijelaskan bahwa, ada penambahan suku baru $+\big((3 \times 5) + 8\big)$ di kedua ruas dipilih berdasarkan, koefisien variabel kuadratnya dan konstanta yang ada di ruas kanan.

$$\frac{3(x-1)^2}{15}+\frac{5(y+2)^2}{15}=\frac{15}{15}$$
$$\frac{(x-1)^2}{5}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$$

Berdasarkan persamaan $\frac{(x-1)^2}{5}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$, Dapat diketahui bahwa :

- Titik pusatnya yaitu $(1,-2)$ dan $a^2=5$ dan $b^2=3 \Longrightarrow a=\sqrt{5}$ dan $b=\sqrt{3}$
- Panjang Sumbu mayor $2a=2\sqrt{5}$ yang sejajar sumbu x, sedangkan sumbu minor $2b=2\sqrt{3}$. Kedudukan titik fokus dengan mencari nilai c
- dari $c^2=a^2-b^2 \Longrightarrow \mathrm{c}=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$
- Karena elipsnya berpusat di $(1,-2)$, maka Koordinat titik fokusnya $\left(1\pm\sqrt{2},-2\right)$
- Titik puncaknya yaitu titik potong dengan sumbu mayor di (1±$\sqrt{5}$,-2) dan titik potong dengan sumbu minor dititik (1,-2±$\sqrt{3}$)

Berikut sketsa gambar, yang dibuat dari aplikasi geogebra namun dengan mengetahui unsur-unsur di atas , kita dapat mensketsanya secara manual.



Gambar 6. 13. Sketsa elips tak standar contoh soal 2

3. Berdasarkan kemiringan sumbu mayor dan sumbu minor

   Seperti halnya pada bab irisan kerucut parabola, salah satu bentuk pengembangan dari persamaan standarnya yaitu dengan memandang bahwa sumbu mayor dan minor tidak lagi sejajar dengan sumbu-x atau sumbu-y. Dengan kata lain, garis direktriknya tidak memotong sumbu-x secara tegak lurus, sehingga arah kedudukan elips tidak laga horizontal ataupun vertikal. Dalam membangun persamaan tak standar jenis ini ada beberapa hal yang perlu untuk diperhatikan sebagai sifat keumuman dari elips diantaranya :

1. Sumbu mayor dan sumbu minor selalu saling tegak lurus.
2. Sumbu mayor dan sumbu minor dapat direpresentasikan masing masing sebagai suatu persamaan garis lurus
3. Titik fokus selalu berada pada sumbu mayor
4. Kedudukan titik pada elips, misal $E(x, y)$merupakan jarak horizontal atau jarak vertikal dari sumbu mayor atau sumbu minor. Dalam hal ini untuk menentukan jarak minimum dari suatu titik terhadap suau garis menggunakan rumus kedudukan titik terhadap garis.

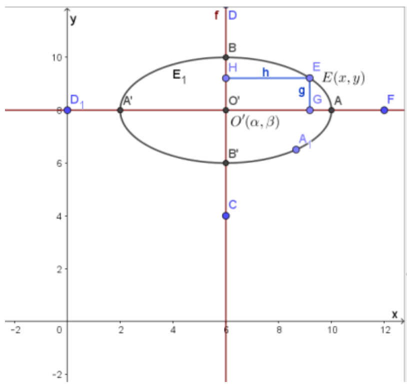
Petunjuk-petunjuk di atas menjadi bagian dasar dalam mengembangkan jenis elips tak standar ini :Agar pembentukan persamaan elips tak standar ini, dapat dipahami secara utuh maka kita akan memulainya dengan konsep elips tak standar horizontal :

Pada gambar di samping akan dijadikan sebagai dasar dalam mengembangkan persamaan elips tak standar miring. Pandang : $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

Selanjutnya :

Bagian $x - \alpha$ tidak lain merupakan jarak titik $E(x, y)$ ke titik $\mathbf{H}$ atau $|\boldsymbol{EH}|$. Jarak titik terhadap garis vertikal secara horizontal. Bagian $y - \beta$ tidak lain merupakan jarak titik $E(x, y)$ ke titik $\mathbf{G}$ atau $|\mathbf{EG}|$.

Jarak titik terhadap garis horizontal secara vertikal.



Gambar 6. 14. Elips tak standar horizontal

$$\frac{|EH|^2}{a^2} + \frac{|EG|^2}{b^2} = 1$$

Sekarang, kita memandang sumbu mayor dan sumbu minor sebagai persamaan garis dalam bentuk umum yang saling tegak lurus :

sumbu mayor :

$$L_1 \coloneqq m_1 x + n_1 y + c_1 = 0$$

sumbu minor :

$$L_2 \coloneqq n_1x - m_1y + c_2 = 0$$

Dengan persamaan garis tersebut maka kita dapat menuliskan jarak titik $E(x, y)$ ke garis L_1 dan L_2. Atau dengan kata lain jarak titik E ke titik H dan jarak titik E ke titik G.

$$|EH| = \frac{|m_1x - n_1y + c_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}}$$

$$|EG| = \frac{|n_1x + m_1y + c_1|}{\sqrt{n_1^2 + m_1^2}}$$

Dari jarak tersebut, dapat kita gunakan untuk membentuk persamaan elips yang baru dengan melibatkan parameter gradien dan konstanta dari persamaan garis.

$$\frac{\left(\frac{|m_1x-n_1y+c_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{|n_1x+m_1y+c_1|}{\sqrt{n_1^2+m_1^2}}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(m_1x - n_1y + c_1)^2}{a^2(m_1^2 + n_1^2)} + \frac{(n_1x + m_1y + c_2)^2}{b^2(n_1^2 + m_1^2)} = 1$$

Sehingga diperoleh persamaan elips tak standarnya dalam bentuk berikut :

$$\frac{(m_1x - n_1y + c_2)^2}{a^2} + \frac{(n_1x + m_1y + c_1)^2}{b^2} = (m_1^2 + n_1^2)$$

Dari persamaan umum yang diperoleh, selanjutnya kita dapat menentukan kembali unsur-unsur dan kedudukannya dari elips tak standar miring tersebut :

Hubungan sumbu mayor dan minor terhadap nilai eksentrisitas	$b^2 = a^2(1 - e^2)$
Panjang sumbu mayor	$2a$
Panjang sumbu minor	$2b$
Dua persamaan garis yang diberikan	$L_1 \coloneqq m_1x + n_1y + c_1 = 0$ $L_2 \coloneqq n_1x - m_1y + c_2 = 0$
Dari kedua persamaan di atas memberikan penyelesaian dalam bentuk yang dapat digunakan dalam menentukan titik pusat	$\frac{x}{m_1c_2 + n_1c_1} = \frac{y}{m_1c_1 - n_1c_2} = \frac{1}{-(m_1^2 + n_1^2)}$

Sehingga diperoleh titik potong kedua garis, dengan menggunakan teknik kali silang.	$(x,y)=\left(\frac{m_1c_2+n_1c_1}{-(m_1^2+n_1^2)},\frac{m_1c_1-n_1c_2}{-(m_1^2+n_1^2)}\right)$ $(x,y)=\left(\frac{-(m_1c_2+n_1c_1)}{(m_1^2+n_1^2)},\frac{n_1c_2-m_1c_1}{(m_1^2+n_1^2)}\right)$
Kedudukan titik fokus dari elips ini dapat dibentuk dengan mempertimbangkan panjang sumbu mayor dan sumbu minor	$a^2-c^2=b^2$
Misalkan titik fokusnya berada di $F_1(p.q)$ dan dilalui oleh sumbu mayor, maka jaraknya ke sumbu minor adalah	$\frac{\lvert m_1p-n_1q+c_2\rvert}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}}=\pm ae$
Sebagaimna yang diketahui, bahwa titik fokus dilalui oleh sumbu mayor, sehingga jika sumbu mayornya berada pada $F_1(p.q)$, maka jaraknya adalah 0	$\frac{m_1p+n_1q+c_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}}=0$
Persamaan garis direktriksnya adalah	$\frac{\lvert m_1x-n_1y+c_2\rvert}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}}=\pm\frac{a}{e}$
Titik pusatnya berarti berada pada titik potong sumbu mayor dan sumbu minor dalam hal ini himpunan penye;esaian dari dua persamaan garis.	

Dalam memahami cara kerja persamaan di atas maka berikut dapat dilihat suatu contoh soal yang membahas persamaan elips tak standar dengan sumbu utama mempunyai kemiringan yang saling tegak lurus.

Contoh soal 6.3

Misal suatu persamaan elips $4(x-3y+2)^2+9(3x+y+1)^2=54$. Tentukan persamaan sumbu Mayor, sumbu minor, panjang sumbu mayor, panjang sumbu minortitik fokus, titik pusat dan garis diarektriksnya !

Dapat diperhatikan bahwa $4(x-3y+2)^2+9(3x+y+1)^2=54.$

Agar unsur-unsurnya mudah diidentifikasi maka persamaan tersebut akan kita arahkan ke dalam bentuk :

$$\frac{\left(\frac{|m_1x-n_1y+c_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{|n_1x+m_1y+c_1|}{\sqrt{n_1^2+m_1^2}}\right)^2}{b^2}=1$$

Dengan melihat koefisien-koefisien dari masing-masing suku pada soal maka, dapat dinyatakan $m_1=3$ dan $n_1=1$, sehingga ide pertamanya yaitu nilai $\sqrt{m_1^2+n_1^2}$ =$\sqrt{3^2+1^2}=10$ harus dapat dimunculkan dalam manipulasi soal.

Perhatikan, tanpa merubah nilai persaman $4(x-3y+2)^2+9(3x+y+1)^2=54$ dapat dinyatakan dengan :

$$4\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{3^2+1^2}}\sqrt{3^2+1^2}\right)^2+9\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{3^2+1^2}}\sqrt{3^2+1^2}\right)^2=54$$
$$4\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}\sqrt{10}\right)^2+9\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}}\sqrt{10}\right)^2=54$$
$$4\cdot 10\cdot\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}\right)^2+9\cdot 10\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}}\right)^2=54$$
$$40\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}\right)^2+90\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}}\right)^2=54$$

Dengan mempertahankan bentuk persamaan yang akan dituju, maka nilai 54 pada ruas kanan dijadikan 1, denag cara kedua rua dibagi 54

$$\frac{40}{54}\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}\right)^2+\frac{90}{54}\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}}\right)^2=1$$

Agar mengikuti kembali bentuk umum yang dituju maka kita harus mencari bentuk yang memenuhi a^2 dan b^2 dan tidak merubah nilai dengan cara :

$$\frac{\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}\right)^2}{\frac{54}{40}}+\frac{\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}}\right)^2}{\frac{54}{90}}=1$$

$$\frac{\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}\right)^2}{\frac{27}{20}}+\frac{\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}}\right)^2}{\frac{3}{5}}=1$$

$$\frac{\left(\frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{27}{20}}\right)^2}+\frac{\left(\frac{3x+y+1}{\sqrt{10}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}=1$$

Dari persamaan ini diperoleh :

$a^2=\left(\sqrt{\frac{27}{20}}\right)^2 \Rightarrow a=\sqrt{\frac{27}{20}}$ sedangkan $b^2=\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 \Rightarrow b=\sqrt{\frac{3}{5}}$

dengan melihat $\sqrt{\frac{27}{20}}>\sqrt{\frac{3}{5}}$, maka:

a. sumbu mayornya adalah $3x+y+1=0$ dengan panjang : $2a=2\sqrt{\frac{27}{20}}=\sqrt{\frac{108}{20}}=\sqrt{\frac{12(9)}{20}}=3\sqrt{\frac{3}{5}}$, sedangkan

b. Sumbu minornya adalah $x-3y+2=0$ dengan panjang $2b=2\sqrt{\frac{3}{5}}$

c. Titik pusatnya, perpotongan antara $3x+y+1=0$ dengan $x-3y+2=0$ diperoleh dengan menggunakan

$$(x,y)=\left(\frac{-(m_1c_2+n_1c_1)}{(m_1^2+n_1^2)},\frac{n_1c_2-m_1c_1}{(m_1^2+n_1^2)}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

d. Nilai eksentrisitas : $b^2=a^2(1-e^2)\Rightarrow e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$

$$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow e^2=1-\frac{3}{5}\cdot\frac{20}{27}=\frac{5}{9}\Rightarrow e=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

e. Koordinat titik fokus, misal $F(p,q)$ maka dapat ditentukan dengan membuat dua persamaan yang melibatkan nilai eksentrisitas dan koordinat titik fokus : $\frac{|m_1p-n_1q+c_2|}{\sqrt{1+9}}=\pm ae$, sehingga diperoleh :

$$\frac{|3p - q + 2|}{\sqrt{10}} = \pm\sqrt{\frac{27}{20}} \cdot \sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$|3p - q + 2| = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{10} = \pm\frac{\sqrt{30}}{2}$$

Selanjutnya dengan memandang bahwa jarak titik fokus dengan sumbunya adalah 0, maka rumusannya dapat menggunakan : $\frac{m_1 p + n_1 q + c_1}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}} = 0$, diperoleh :

$$3p + q + 1 = 0$$

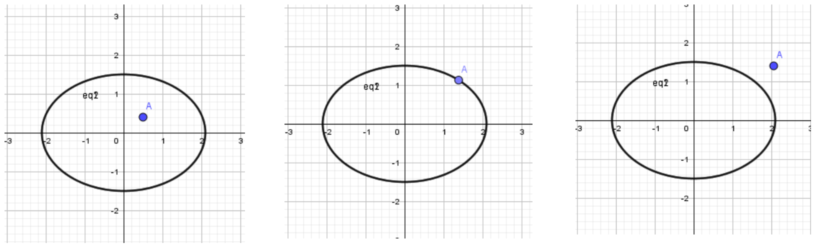
Dengan menggunakan $|3p - q + 2| = \pm\frac{\sqrt{30}}{2}$ dan $3p + q + 1 = 0$, diperoleh :

$$F(p, q) = \left(\frac{\sqrt{30} - 10}{20}, \frac{10 - 3\sqrt{30}}{20}\right) dan \left(\frac{-\sqrt{30} - 10}{20}, \frac{3\sqrt{30} + 10}{20}\right)$$

6. E. KEDUDUKAN TITIK TERHADAP ELIPS

Seperti halnya, dengan lingkaran dan parabola pada bab bab sebelumnya. Pada irisan kerucut elips pun kita akan meninjau kedudukan titik terhadap bidang elips. Pada prinsipnya, kedudukan titik terhadap elips dilakuan denga menguji titik yang diberikan pada persamaan elips yang diberikan.

Sebelumnya bayangkan sebuah elips dan sebuah titik yang terletak pada bidang kartesius yang sama. Kedudukan titik pada elips tersebut pastinya akan membentuk sebuah hubungan. Hubungan tersebut dapat berubah kedudukan titik di dalam elips, kedudukan titik pada elips, dan kedudukan titik di luar elips. Sepertinya terlihat pada gambar di bawah.



(a) (b) (c)

Gambar 6. 15. Kedudukan titik terhadap elips (a) berada di dalam elips , (b) berada pada elips (c) berada di luar elips

Misalkan diberikan titik (x_1, y_1) sebagai titik tinjauan terhdap bidang elips, misalkan dengan persamaan elips standar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau persamaan elips tak standar $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$.Dengan ini kedudukan titik (x_1, y_1)secara aljabar, kedudkan titik terhadap elips dapat dinyatakan dengn 3 ketentuan berikut :

Kedudukan titik tehadap elips	Elips Standar	Elips Tak Standar
Titik terletak dalam kurva elips	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} < 1$
Titik terletak pada kurva elips	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$
Titik terletak di luar kurva elips	$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} > 1$

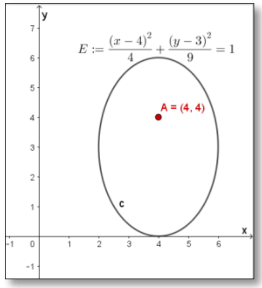
Contoh soal 6.4 : **menentukan kedudukan titik terhadap elips**

1. Tentukan kedudukan titik (1,1) pada elips dengan persamaan

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

Subtitusi titik $(4{,}4)$ pada persamaan elips, sehingga akan diperoleh perhitungan sebagai berikut.

$$= \frac{(4-4)^2}{4} + \frac{(4-3)^2}{9}$$
$$= \frac{0}{4} + \frac{1}{9}$$
$$= \frac{1}{25}$$



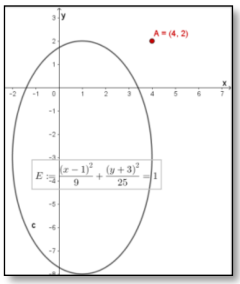
Pemahaman yang perlu dibangun pada contoh soal ini adalah adanya titik yang akan diuji kedudukannya terhadap suatu parabola yang persamaannya diberikan pada soal. Diporeh hasil perhitungannyadiperoleh $\frac{16}{25}$ nilainya kurang dari satu (<1). Sehingga tanpa menggambar terlebih dahulu, dapat disimpulkan bahwa titik (1,1) teretak di dalam elips.Untuk melihat kebenarannya perhatikan gambar elips dan letak titik sesuai pada soal yang diberikan.

2. Tentukan kedudukan titik (4, 3) pada elips dengan persamaan

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

Subtitusi titik (4,2) pada persamaan elips, sehingga akan diperoleh perhitungan sebagai berikut.

$$\frac{(4-1)^2}{9} + \frac{((2)+3)^2}{25}$$
$$= \frac{(3)^2}{9} + \frac{(5)^2}{25}$$
$$= \frac{9}{9} + \frac{25}{25}$$
$$= 2$$



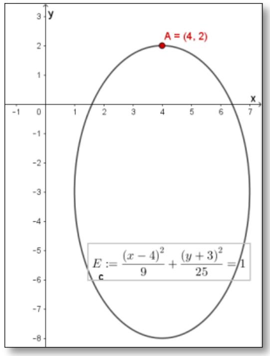
Pada bagian ini, titik yang diuji yaitu $(4{,}2)$ pada elips yang $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$. Setelah disubtitusikan ke dalam persamaan parabola, menunjukkan bahwa nilainya $2 > 1$. Dengan ini dapat dikatakan bahwa titik yang diberikan berada diluar elips.

3. Tentukan terhadap titik $(4{,}2)$pada elips dengan persamaan

$$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$$

Pembahasan

Subtitusi titilk $(4{,}2)$pada persamaan elips, sehingga akan diporeh perhitungan sebagai berikut.



$$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{25}$$
$$=\frac{(4-4)^2}{9}+\frac{(2+3)^2}{25}$$
$$=\frac{5^2}{25}$$
$$=1$$

Diperoleh hasil perhitungan adalah tepat 1dengan ini dapat dijelaksana bahwa, tanpa menggambarkan terlebih dahulu, dapat disimpulkan bahwa titik $(4{,}2)$ terletak pada elips tak standar dengan persamaan $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$.

4. Tentukan kedudukan titik (4,-3) terhadap persamaan elips $5x^2+7y^2=140$!

Pemababahasan :

Akan ditinjau Kedudukan titik (4,-3), pada elips dengan persamaan :

$$5x^2+7y^2=140$$

Pada bentuk persamaan elips di atas, mestilah dimodifikasi ke dalam bentuk umum :

$$\frac{5x^2}{140}+\frac{7y^2}{140}=1$$
$$\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{20}=1$$

Dari bentuk standar tersebut, selanjutnya nilai pada kedudukan titik disubtitusi dan dievaluasi ke dalam : $\frac{x_1^2}{28}+\frac{y_1^2}{20}$

Diperoleh :

$$\frac{4^2}{28}+\frac{-3^2}{20}=\frac{16}{28}+\frac{9}{20}=1{,}02$$
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$$

Kesimpulan : titik berada diluar elips karena hasil hitung dari subtitusi nilai titik kepers elips menghasilkan nilai lebih dari 1

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$$

Sehingga, Terletak diluar elips

6. F. KEDUDUKAN GARIS TERHADAP ELIPS

Setelah mengetahui ketentuan kedudukan titik terhadap elips, sekarang kita akan melihat kedudukan garis terhadap elips. Pada bagian ini akan diawali dengan penurunan rumus, bagaimana menentukan parameter kedudukan garis terhadap elips tanpa menggambarkannya. Misal diberikan persamaan elips standar horizontal $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dansebuah garis lurus dengan persamaan $y = mx + c$. Dengan melakukan proses subtitusi diperoleh :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(VI.3)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2 + 2mxc + c^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(VI.4)}$$

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + a^2 2mxc + a^2c^2 = a^2b^2 \qquad \text{(VI.5)}$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + (2a^2mc)x + a^2c^2 - a^2b^2 = 0 \qquad \text{(VI.6)}$$

misal :$(b^2 + a^2m^2) = \mathrm{A}; 2a^2mc = B; a^2c^2 - a^2b^2 = \mathrm{C}$

Maka dapat ditulis

$$\mathrm{A}x^2 + Bx + \mathrm{C} = 0 \qquad \text{(VI.7)}$$

Persamaan di atas merupakan persamaan kuadaratik. Selanjutnya untuk menentukan apakah garis lurus tersebut memotong kurva di dua titik berbeda, menyinggung kurva, atau tidak menyentuh kurva, dapat diperiksa nilai diskriminan dari persamaan kuadratik di atas. Diskriminan adalah hubungan antara koefisien dalam persamaan kuadrat untuk mencari hubungan kedudukan garis terhadap elips.

Jika diketahui persamaan kuadrat $y = Ax^2 + Bx + C$ maka nilai diskriminannya dapat diperoleh rumus $D = B^2 - 4AC$.

$D = B^2 - 4\mathrm{AC}$ Rumus Diskriminan

$D = (2a^2mc)^2 - 4(b^2 + a^2m^2)(a^2c^2 - a^2b^2)$ Subtitusi kembali

$$D = 4a^4m^2c^2 + (-4b^2a^2c^2 - 4a^4m^2c^2 + 4a^2b^4 + 4a^4b^2m^2)$$ Expanding

$$D = 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - c^2)$$ Simplify

Sehingga diperoleh bentuk yang paling sederhana dari nilai diskriminan yaitu :

$$D = 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - c^2)$$

Melalui bentuk sederhana nilai diskriminan di atas, kedudukan garis terhadap elips dapat dilakukan dengan melihat nilai Diskriminanya, pada 3 kondisi berikut :

1. Jika nilai $D > 0$, maka garis memotong elips, hal ini berarti

$$4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - c^2) > 0 \quad \text{(VI.8)}$$

$$a^2m^2 + b^2 - c^2 > 0 \quad \text{(VI.9)}$$

2. Jika nilai $D = 0$, maka garis menyinggung elips, hal ini berarti

$$4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - c^2) = 0 \quad \text{(VI.10)}$$

$$a^2m^2 + b^2 - c^2 = 0 \quad \text{(VI.11)}$$

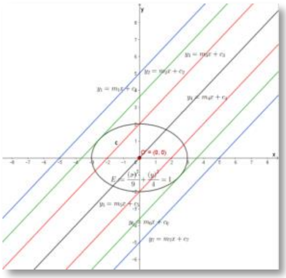
3. Jika nilai $D < 0$, maka garis tidak memotong dan menyinggung elips

$$4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - c^2) < 0 \quad \text{(VI.12)}$$

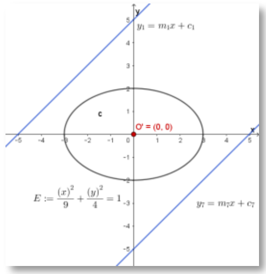
$$a^2m^2 + b^2 - c^2 < 0 \quad \text{(VI.13)}$$

Ketentuan di atas , juga dapat dibuat pada tipe elips standar vertikal, dengan elips tak standar lainnya. Namun demikian perlu untuk menyesuaikan bentuk persamaannya masing.

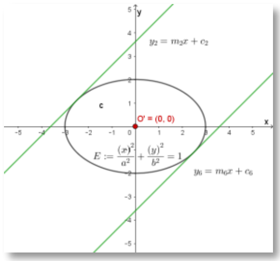
Berikut ilustrasi geometris mengenai kedudukan garis terhadap elips standar horizontal



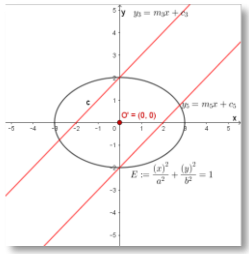
(a)



(b)



(c)



(d)

Gambar 4.18. (a) Ilustrasi Kedudukan garis terhadap elips (b) tidak melalui elips , (c) menyinggung elips dan (d) memotong elips

Untuk memahami penggunaan rumursa-rumusan di atas, berikut diberikan beberapa conoh soal disetai dengan penguraian langkah-langkahnya :

Contoh soal 6.5 : kedudukan garis terhadap elips untuk garis tidak memotong elips.

1. Tentukan kedudukan garis $2y - x = -10$ pada elips dengan persamaan

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Dalam mengidentifikasi kedudukan garisnya, maka dapat kita lakukan dengan mensubtitusi persamaan garis ke dalam persamaan elips.

Cara penyederhanaan nilai Diskriman :

Adanya rumusan meninjau nilai$D$, maka cukup kita mengidentifikasi nilai dari $a^2m^2 + b^2 - c^2$, dengan ini kita dapat dengan mudah mengidentifikasi kedudukan

Cara subtitusi :

- Nyatakan garis dalam persamaan standar

$$2y - x = -10 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 5$$
$$m = \frac{1}{2}; c = -5$$

- Subtitusi y ke dalam persamaan elips

$$\frac{x^2}{25} + \frac{\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^2}{9} = 1$$
$$9x^2 + 25\left(\frac{1}{4}x^2 - 5x + 25\right) = 225$$
$$9x^2 + \left(\frac{25}{4}x^2 - 125x + 625\right) = 225$$
$$36x^2 + (25x^2 - 500x + 2500) = 900$$
$$61x^2 - 500x + 1600 = 0$$

- Tentukan nilai Diskriminannya :

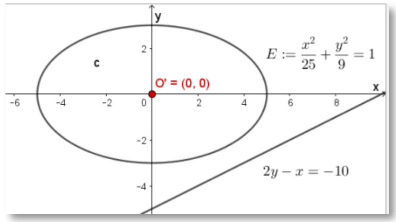
$$D = 500^2 - 4 \cdot 61 \cdot 1600 = -140400$$

Dengan ini nilai $D < 0$, hal ini berarti garis tidak memotong dan menyinggung elips.

garis, tanpa harus membentuk persamaan kuadratnya. Untuk kasus di atas diperoleh :

$$a^2m^2 + b^2 - c^2 = (25) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (9) - 25$$
$$\frac{25}{4} + (9) - 25 = \frac{25 + 36 - 100}{4} = -\frac{39}{4}$$

Karena $-\frac{39}{4} < 0$, maka dapat dinyatakan bahwa garis $2y - x = -10$ tidak menyentuh (memotong dan menyinggung) elips $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$



Gambar 6. 16. Ilustrasi gambar garis tidak menyentuh elips

2. Tentukan kedudukan garis $2x + 3y = 25$ pada elips dengan persamaan

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Cara Simple : menidentifikasi nilai $a^2m^2 + 4b^2 - c^2$

Dimana :

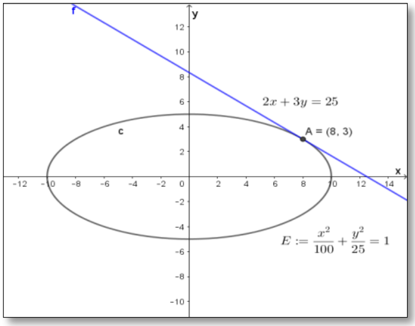
$$a^2 = 100;\ b^2 = 25; m = -\frac{2}{3}; c = \frac{25}{3}$$

Sehingga diperleh secara simpel :

$$(100) \cdot \frac{4}{9} + (25) - \frac{625}{9} =$$

$$\frac{400}{9} + \frac{225}{9} - \frac{625}{9} = 0$$

Karena nilai $a^2m^2 + 4b^2 - c^2 = 0$, maka dapat dinyatakan bahwa garis $2x + 3y = 25$ menyinggung elips $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$



Gambar 6. 17. Garis menyinggung elips

3. Tentukan kedudukan garis $3y - 2x - 27 = 0$ pada elips dengan persamaan

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$$

i. Ubah kedalam bentuk standar persamaan garis, dan mengidentifikasi parameter parameternya :

$$3y - 2x - 27 = 0 \Longrightarrow$$
$$y = \frac{2}{3}x + 9$$
$$m = \frac{2}{3}; c = 9$$
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$$

berarti $a^2 = 25; b^2 = 64$

ii. Karena elipsnya berupa elips vertikal sehingga ketentuan yang diidentifikasi adalah $b^2m^2 + a^2 - c^2$, dengan ini kita dapat

$$b^2m^2 + a^2 - c^2 = 64\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (25) - 9^2$$

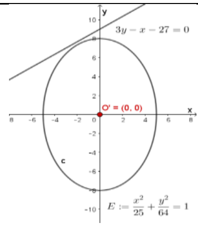
$$\frac{256}{9} + \frac{225}{9} - \frac{729}{9} = -\frac{248}{9}$$

Karena $-\frac{248}{9} < 0$, maka dapat dinyatakan bahwa garis $3y - 2x - 27 = 0$ tidak menyentuh (memotong dan menyinggung) elips

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$$

dengan mudah mengidentifikasi kedudukan garis.

iii. Dari penampakan gambar, dapat dilihat bahwa garis nampak menyinggung elips, namun demikian apabila diperbesar, garis tidak menyentuh elips



4. Tentukan kedudukan garis $y = x + 5$ pada elips dengan persamaan seperti berikut.

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Pertama, kita akan menentukan kedudukan garis $y = x + 5$ terhadap elips dengan melihat nilai diskriminannya. Selanjutnya, kita akan melihat kedudukan garis terhadap elips.

Subtitusi persamaan garis $y = x + 5$ pada persamaan elips

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(x+5-4)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2 - 4\mathrm{x} + 4}{9} + \frac{x^2 + 2\mathrm{x} + +1}{4} = 1$$

$$4(x^2 - 4\mathrm{x} + 4) + 9(x^2 + 2\mathrm{x} + 1) = 36$$

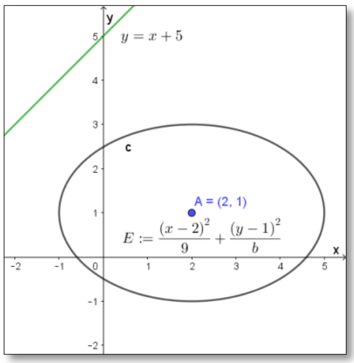
$$13x^2 + 2x + 25 = 36$$

$$13x^2 + 2x - 11 = 0$$

Dari persamaan kuadrat yang didapat di atas, diperoleh nilai $A = 13, B = 2, C = -11$ Selanjutnya akan ditentukan nilai diskriminanya.

$D = B^2 - 4\mathrm{AC} = 2^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-11)$

$D = 436$, ***Karena*** $\mathrm{D} > 0$. ***Jadi kesimpulannya adalah garis memotong kurva elips.***



Gambar 6. 18. Garis tidak menyinggung dan memtong elips

Dari gambar yang diperoleh, garis tidak menyentuh elips, hal ini berbeda dengan hasil penentuan nilai Diskriminan. Sebagai bahan diskusi, identifikasi perbedaan hasil tersebut.

Secara umum, langkah-langkah menentukan kedudukan garis pada elips ada tiga langkah. Berikut ini adalah langkah-langkah menentukan kedudukan garis terhadap elips.

1. Subtitusi persamaan garis lurus ke dalam persamaan elips sehingga diperoleh persamaan kuadrat.
2. Menentukan nilai diskriminan dari hasil persamaan kuadrat yang diperoleh.
3. Menyimpulkan hasilnya, apakah garis tidak memotong elips, garis memotong elips di satu titik, atau garis memotong elips di dua titik.

Tentukan bentuk persamaan kuadrat dan bentuk nilai diskriminan pada :

a. Tipe elips standar vertikal
b. Tipe elips tak standar horizontal
c. Tipe elips tak standar vertikal
d. Tipe elips tak standar miring

6. G. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG ELIPS

Seperti pada bab lingkaran dan parabola, pada bab elips ini, kita juga akan mengeksplorasi persamaan garis singgung elips. Pada bagian ini, kita tidak hanya menggunakan rumus-rumus yang ada, namun kita akan mencoba menguraikan penjabaran pembentukan persamaan garis singgung.

Konsep dasar persamaan garis singgung garis tangen (menyentuh) titik pada elips artinya garis dan elips sama-sama melalui satu titik koordinat yang sama atau garis memotong elips pada satu titik.Dengan demikian dapat dikatakan bahwa, semua titik pada elips dapat menjadi titik singgung, dalam hal ini dapat kita maknai bahwa, akan ada tak berhingga banyaknya garis singgung. Konsep garis singgung pada elips dapat ditinjau dengan pada beberapa kondisi :

1. Titik pada kurva elips diketahui, sebagai titik singgung.
2. Satu titik di luar elips diberikan, sebagai titik yang dilalui garis singgung.

Berikut kita akan mengkonstruksi rumusan penentuan garis singgung pada elips yang bertipe standar horizontal, dimana titik singgung dan persamaan elipsnya diberikan. Misalkan diberikan persamaan elips standar horizontal yaitu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dan titik singgungnya (x_1, y_1).

Manipulasi bentuk persamaan garis dengan satu titik yang diberikan, dan dinyatakan dalam nilai **y**.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y=y+m(x-x_1)$$

Selanjutnya, subtitusi nilai **y** ke dalam persamaan elips standar

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y_1+m(x-x_1))^2}{b^2}=1$$

Penyederhanaan dilakukan dengan menyamakan penyebut. Selanjtnya dilakukan pengelompokan ke dalam bentuk persamaan kuadrat.

$$b^2x^2+a^2(y_1+m(x-x_1))^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2+a^2(y_1+2y_1m(x-x_1))^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2+a^2(y_1^2+2y_1m(x-x_1)+m^2+m^2x^2-m^2 2xx_1+m^2x_1^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2+(a^2y_1^2+a^2 2y_1m(x-x_1)+a^2m^2x^2-a^2m^2 2xx_1+a^2m^2x_1^2=a^2b^2$$

Diperoleh bentuk persamaan kuadrat :

$$(b^2+a^2m^2)x^2+(a^2 2y_1m-2a^2m^2x_1)x-a^2 2x_1y_1+a^2m^2x_1^2=a^2b^2$$

Dari persamaan kuardat tersebut, koefisie-koefisiennya digunakan

$$A=(b^2+a^2m^2)$$
$$B=(a^2 2y_1m-2a^2m^2x_1)$$
$$C=-a^2 2x_1y_1+a^2m^2x_1^2-a^2b^2$$

Syarat agar garis menyinggung elips yaitu dengan membuat nilai D = 0, hal ini berarti persamaan kuadrat diatas memiliki dua akar sama (kembar),yaitu

$$x_1=x_2$$
$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$
$$2x_1=-\frac{b}{a}$$
$$2x_1=-\frac{(2a^2y_1m-2a^2m^2x_1)}{(a^2m^2+b^2)}$$

Selanjutnya dapat disederhnakan melalui pengelompokan, dan sistem coret pada dua suku sama berbeda tanda. Sehingga di peroleh bentuk $\mathbf{m}$.

$$2x_1(a^2m^2+b^2) = -(2a^2y_1m - 2a^2m^2x_1)$$

$$2x_1a^2m^2 + 2b^2x_1 = -2a^2y_1m + 2a^2m^2x_1$$

$$2b^2x_1 = -2a^2y_1m$$

$$m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Selanjutnya nilai $\mathbf{m}$ disubtitusi ke dalam persamaaan garis:

$$y - y_1 = -\left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)(x - x_1)$$

$$(y-y_1)a^2y_1 = -(b^2x_1)(x-x_1)$$

Dengan mensubtitusi nilai $\mathbf{m}$ ke dalam persamaan garis, kita dapat mengarahkannya menjadi persamaan yang identik dengan persamaan elips

$$a^2y_1y - a^2y_1^2 = -b^2x_1x + b^2y^2{}_1$$

$$\frac{y_1y - y_1^2}{b^2} = \frac{-x_1x + x_1^2}{a^2}$$

$$\frac{y_1y}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{-x_1x}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2}$$

Dari bentuk ini, diperolehlah rumusan yang merepresentasikan persamaan garis singgung dari satu titik singgung yang diberikan

$$\frac{y_1y}{b^2} + \frac{x_1x}{a^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

Diperoleh Persamaan garis singgung elips :

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1 \qquad \text{(VI.14)}$$

Dari pembentukan rumus yang telah diuraikan, selanjutnya dapat kita tuliskan formula penentuan persamaan garis singgungjika diketahui satu titik pada elips sebagai titik singgung, misal (x_1, y_1)pada elips standar dan tak standar

a. Elips standar vertikal, dalam hal ini persamaannya $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, persamaan garis singgungnya $\frac{x_1x}{b^2} + \frac{y_1y}{a^2}$.
b. Elips tak standar horizontal, dalam hal ini $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$, persamaan garis singgungnya dapa dituliskan dengan : $\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{a^2} + \frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{b^2} = 1$

c. Elips tak standar vertikal, dalam hal ini $\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$, persamaan garis singgungnya $\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{b^2}+\frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{a^2}=1$

Untuk memahami rumusan persamaan garis singgung yang diperoleh, dapat kita eksplorasi lebih lanjut dalam beberapa contoh soal berikut :

Contoh soal 6.6 :

Tentukan persmaan garis singgung elips, dari suatu titik singgung yang berkedudukan di melalui titik (6,-2)dan elips tersebut memiliki persamaan$\frac{(x-2)^2}{20}+\frac{(y+3)^2}{5}=1$!

Dari persamaannya, tipe elipsnya adalah elips tak standar horizontal.

$$\frac{(x-2)^2}{20}+\frac{(y+3)^2}{5}=1$$

Titik singgungnya (6,-2).

Penyelesaian : Melalui persamaan elips dengan maka

$$\frac{(x-2)^2}{20}+\frac{(y+3)^2}{5}=\frac{16}{20}+\frac{1}{5}=1$$

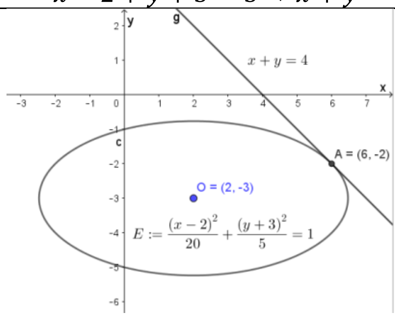
Karena tipenya adalah elips tak standar horizontal, maka :

$$\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}+\frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$$

$$\frac{(6-2)(x-2)}{20}+\frac{(-2+3)(y-3)}{5}=1$$

$$\frac{4(x-2)}{20}+\frac{(y-3)}{5}=1$$

$$x-2+y+3=5 \Rightarrow x+y=4$$



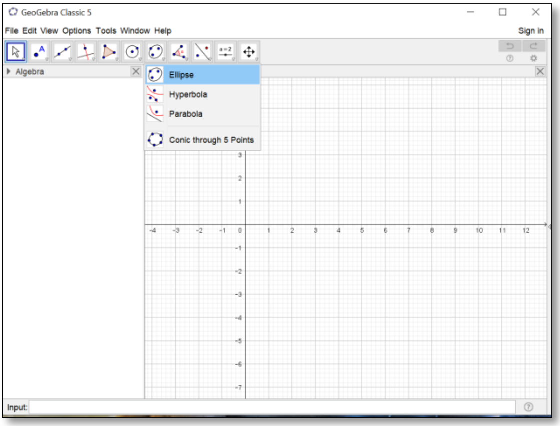
Gambar 6. 19. Garis menyinggung elips

Penggunaan rumus untuk menentukan persamaan garis singgung relatif mudah, hanya perlu untuk mengenal rumusnya dan mengimplemetasikannya

6. H. TINJAUAN ELIPS PADA GEOGEBRA

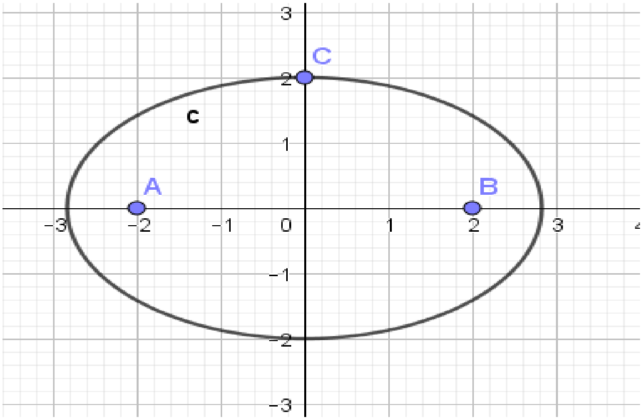
Tinjauan elips dalam aplikasi geogebra dapat dilihat dalam beberapa cara , diantaranya :

1. Penggambaran elips dapat dilakukan secara langsung dengan menggunakan tools pada munu bar :



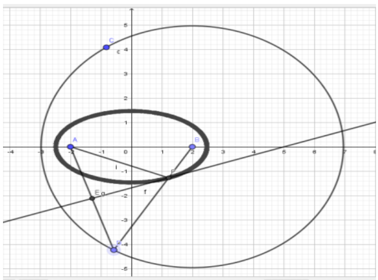
Gambar 6. 20. Penggambaran elips pada geogebra menggunakan tools

Hanya dengan mengklik tombol elips, maka kita akan diminta untuk memilih dua titik sebagai titik fokus, dan satu titik sebagai titik yang dilalui lintasan elips :



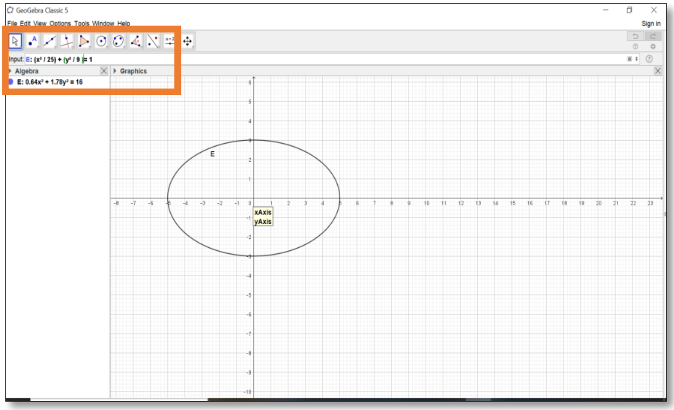
Gambar 6. 21. Hasil penggambaran elips dengan menggunakan tools pada GeoGebra

2. Penggambaran elips juga dapat dibuat dengan mengiktuti alur definsi. Penggambaran elips pada bagian ini, menggunakan tools animasi dengan membuat dua titik fokus, dan pergerakan garis yang menghubungkan satu titik pada elips dengan kedua titik fokus. Dengan menggunakan fitur animasi pada geogebra, dengan ini akan pergerakan titik membentuk lintasan elips dengan dua titik fokus yang tetap.



Gambar 6. 22. Menggambar elips dengan definisi

3. Penggambaran elips dengan menuliskan persamaannya, bada box input function :



Gambar 6. 23. Menggambar elips dengan menginput persamaan

6. I. LATIHAN SOAL

Tujuan Pemahaman Konsep :

1. Buatlah satu bagan yang menjelaskan kerangka materi dari bab Elips!, tuliskan sebagai satu pemahaman komprehensif pada materi elips dalam tinjauan geometri analitik bidang !
2. Dari pembentukan persamaan elips tipe standar horizontal berdsarkan 2 pendekatan definisi, lakukan hal serupa juga dengan menggunakan 2 pendekatan definisi untuk menentukan persamaan elips tipe :
   a. Tipe standar vertikal
   b. Tipe tak standar horizontal
   c. Tipe tak standar vertikal
3. Narasikan konsep penentuan kedudukan titik terhadap elips dengan memetakan masalah yang diberikan dan bentuk solusi yang dikehendaki!
4. Narasikan kembali konsep penentuan kedudukan garis terhadap elips dengan memetakan masalah kedudddukan garis dan bentuk solusi yang dikehendaki!
5. Narasikan hubungan garis singgung, titik singgung dan titik yang dilalui garis singgung terhadap elips!

Tujuan Penyelesaian soal prosedural :

6. Tentukan persamaan elips dengan pusat (0,0) dan diketahui salah satu titik puncaknya (0,13) dan salah satu titik fokusnya (0,12)!
7. Sketsalah kurva $3x^2 + 5y^2 - 6x + 20y + 8 = 0$!
8. Tentukan persamaan elips jika titik puncaknya di (0,-8) dan (0,8) dan jika diketahui titik-titik yang ujung sumbu minornya di (-3,0) dan (3,0)!
9. Tentukan persamaan elips jika diketahui memiliki titik pusat (2,4)dengan panjang sumbu mayornya adalah 4 dan panjang sumbu minornya 3!
10. Tentukan persamaan elips jika diketahui titik ujung sumbu minornya di (-2,8) dan (-2,-16) dan salah satu fokusnya adalah (3,-4)!
11. Tentukan persmaan garis singgung elips yaitu $\frac{(x-2)^2}{20} + \frac{(y+3)^2}{5} = 1$ dengan melalui titik (6,-2) dan gambarkan sketsanya.
12. Tentukan á sedemikian hingga titik p (a,-a) berada didalam kurva elips
13. Tentukan kedudukan titik (4,-3) terhadap persamaan elips $5x^2 + 7y^2 = 140$!

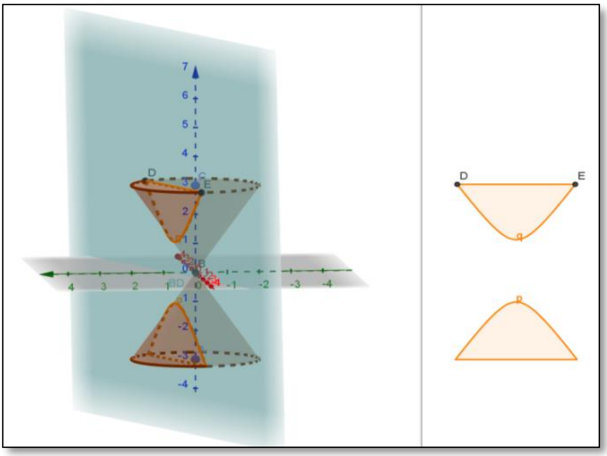
BAB VII. HIPERBOLA

Kemampuan Akhir Yang Diharapkan

- Memahami definisi hiperbola secara geometris
- Menujukkan unsur-unsur dan parameter hiperbola
- Menurunkan persamaan dasar hiperbola berdasarkan definisi
- Menurunkan persamaan hiperbola tak standar
- Menurunkan rumus dalam meninjau kedudukan titik terhadap hiperbola
- Menurunkan rumus dalam meninjau kedudukan garis terhadap hiperbola.
- Menerapkan rumusan-rumusan hiperbola dalam menyelesaikan soal.
- Mengeksplorasi geogebra dalam melihat hubungan aljabar dan geometris hiperbola.

7. A. HIPERBOLA SEBAGAI IRISAN KERUCUT

Pada bab 4,5 dan 6 telah kita lihat bagaimana irisan bidang datar terhadap kerucut menghasilkan bidang-bidang khusus yang unik. Pada bab 7 ini, kita akan melihat bahwa salah satu irisan kerucut yang lain adalah Hiperbola. Berikut ilustrasi Gambar hiperbola sebagai hasil dari irisan bidang datar dengan dua buah kerucut yang saling bertolak belakang :



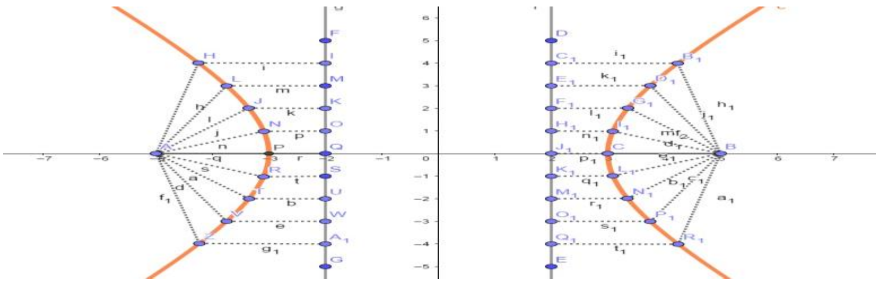
Gambar 7.1. Hiperbola sebagai irisan keucut

Ketika kerucut di potong, maka akan menghasilkan potongan potongan yang berbagai macam bentuk. Bentuk tersebut meliputi lingkaran, eliips , parabola, dan hiperbola yang biasa kita kenal dengan istilah irisan kerucut. Pada bab ini kita akan mempelajari salah satu irisan kerucut tersebut yaitu hiperbola. Bentuk hiperbola menyerupai irisan kerucut parabola dengan hasil pencerminannya. Pada bab ini kita akan menelaah konsep dari hiperbola yang meliputi definisi, unsur-unsur, persamaan standard dan tak standar, kedudukan titik dan garis terhadap hiperbola, serta hiperbola dalam tinjauan Geogebra.

7. B. DEFINISI HIPERBOLA DAN UNSUR-UNSUR HIPERBOLA

Pada pemahaman kita sebelumnya bahwa hiperbola merupkan salah satu irisan kerucut yang dibentuk akibat irisan bidang yang tegak lurus dengan selimut kerucut, dimana memiliki 2 buah bagian yang simetris yang disebut cabang, masing masing terbuka ke arah yang saling berlawanan.Suatu kurva kita defenisikan sebagai titik-titik yang memiliki perbandingan antara jarak dengan titik tetap atau kita sebut dengan titik focus dan jarak dengan garis tetap (garis direktris) adalah memiliki eksentrisitaslebih besar dari satu (e>1). Kurvainilah yang kemudian kita sebut sebagai hiperbola.

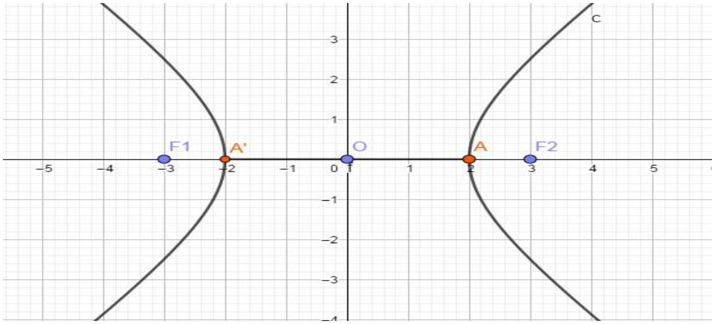
Hiperbola didefenisikan sebagai kumpulan titik-titik yang selisih jarak antara titik tetap (titik focus) dengan garis direktris selalu sama (konstan). Perhatiakan gambar dibawah ini.



Gambar 7.2. Ilustrasi jarak-jarak tetap hiperbola terhadap titik fokus dan garis direktriks

Dalam gambar diatas kita membuat sebuah permisalan bahwa titik C itu adalah titik focus dari hiperbola, perhatikan gambar bahwa CD adalah tegak lurus dengan DE, dengan A dan A’ adalah merupakan titik puncak hiperbola. |CA|= e|AD| begitpun kalau kita memandangnya dari sebelah kiri |CA’|= e|A’D|

Pernyatan tersebut memperjelas akan keberadaan A dan A' terletak pada kurva hiperbola. Selanjutnya kita pandang jarak antara A dan A' adalah 2a (|AA'|=2a) dengan mengambil titik simetris dari segmen garis yang menghubungkan kedua titik puncak tersebut, maka kita katakan a titik tersebut adalah titik asal atau titik pusat hiperbola.



Gambar 7.3. Ilustrasi peentuan jarak tetap 2a

Dengan memisalkan $P(x, y)$ adalah sebarang titik pada hiperbola dan OA terletak pada sumbu x, garis yang tegak lurus dengan OA adalah di titik O adalah sumbu y. dengan menjumlahkan kedua persamaan yang menjelaskan keberadaan dua titik puncak tersebut maka kita peroleh :

$$|CA| + |CA'| = e|AD| + e|A'D| \quad \text{(VII.1)}$$

$$|OC| - |OA| + |OC| + |OA'| = e(|AA'|)asumsi \ (|OA| = |OA'|) \quad \text{(VII.2)}$$

$$2|OC| = e(2a) \quad \text{(VII.3)}$$

$$|OC| = ae \quad \text{(VII.4)}$$

Sehingga diperoleh informasi bahwa titik focus berada pada kordinat $(ae, 0)$. Dengan memanipulasi persamaan persamaan yang ada maka akan membentuk suatu persamaan yang menentukan identitas dari suatu hiperbola, missal kita melalukan operasi pengurangan pada persamaan jarak titk puncak terhadap sumbu direktris.

$$|CA| - |CA'| = e|AD| - e|A'D| \quad \text{(VII.5)}$$

$$|CA| - |CA'| = e(|AD| - |A'D|) \quad \text{(VII.6)}$$

$$|AA'| = e\,[(|OA'| + |OD|) - (|OA| - |OD|) \tag{VII.7}$$

$$|OC| = ae \tag{VII.8}$$

$$2a = e(2|CZ|) \tag{VII.9}$$

$$|CZ| = a/e \tag{VII.10}$$

Dari persamaan tersebu tdiperoleh bahwa persamaan garis direktrik ED adalah garis $x = a/e$. Atau garis$x - \frac{a}{e} = 0$. Perhatikan bahwa :

$$e > 1 \tag{VII.11}$$

$$\frac{a}{e} < a \tag{VII.12}$$

Kemudian kita menggambar segmen garis PE yang tegak lurus dengan ED. Maka dari definisi bahwa $|CP|^2 = \frac{|CP|}{|PE|} = e$, dihasilkan

$$|CP|^2 = e^2|PE|^2 \tag{VII.13}$$

$$(x - ae)^2 + (y - 0)^2 = e^2(x - \frac{a}{e})^2 \tag{VII.14}$$

$$(x - ae)^2 + y^2 = (ae - a)^2 \tag{VII.15}$$

$$x^2 + a^2e^2 - -2aex + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2 \tag{VII.16}$$

$$x^2(e^2 - 1) - y^2 = a^2(e^2 - 1) \tag{VII.17}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1 \tag{VII.18}$$

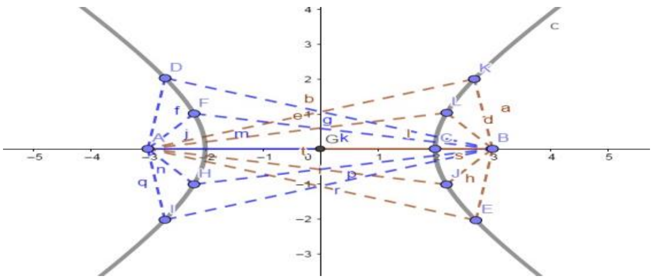
Persamaan hiperbola berpusat di titik asal (0,0) dengan meninjau persamaan $b^2 = a^2(c^2 - 1)$ diperoleh :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{VII.19}$$

Begitu pula garis direktrik dan titik fokusnya masing-masing adalah garis $x = \pm\frac{a}{e}$ dan titik fokusnya adalah titik$(\pm ae, 0)$. Dari persamaman yang diurai diatas kita dapat meninjau komponen kompenen dari parabola yang dinyatakan untuk hiperbola standar jenis pertama kita meninjau bahwa sumbu x adalah sumbu transversal (transverse axis) dari hiperbola standar jenis pertama dan sumbu y disebut sumbu sekawannya (conjugate axes) dalam hal ini,titik fokusnya adalah (C dan C') titikpuncak (A danA') dantitikpusatnya di titik 0 dari hiperbola terletak pada sumbu transversal.

Untuk hiperbola dengan persamaan$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kita menemukan bahwa jarak antar kedua titik puncaknya (sumbu transversal) adalah 2a dan panjang sumbu sekawannya adalah 2b. Jikasumbu y sebagai transversal dansumbu y sebagai sumbu sekawannya ,maka persamaaann yang berbeda menjadi $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, inilah yang kemudian kita sebut sebagai persamaan hiperbola standar tipe 2.Untuk lebih memahami konsep dari hiperbola kita dapat pula memandang definisi hiperbola sebagai :

Himpunan titik-titik yang (x,y) padabidang yang sedemikian hingga selisih jarak titik (x,y) antara dua titik tertentu yang kita sebut titik focus 1 dantitik focus 2, adalah konstan dan bernilai 2 kali jarak titik asal ketitik puncak. Perhatikan gambar dibawah ini :



Gambar 7.4. Ilustrasi Himpunan titik-titik yang membentuk hiperbola

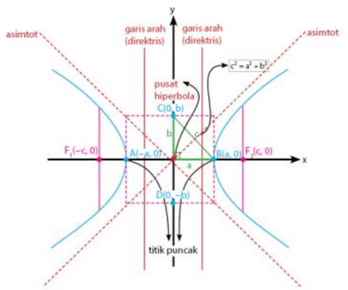
Dinyatakan bahwa :

$$|C_1P| = e|PM| = e\left(h - \frac{a}{e}\right) = eh - a \quad \text{(VII.20)}$$

$$|C_2P| = e|PM'| = e\left(h - \frac{a}{e}\right) = eh - a \quad \text{(VII.21)}$$

$$|C_2P| = e|PM'| = e\left(h - \frac{a}{e}\right) = eh - a \qquad \text{(VII.22)}$$

Kurva yang terbentuk merupakan himpunan titik yang memiliki posisi terhadap selisih masing masing dari dua titik focus tersebut adalah bernilai konstan. Untuk lebih jelas memahami identitas dari Hiperbola perhatikan table di bawah ini

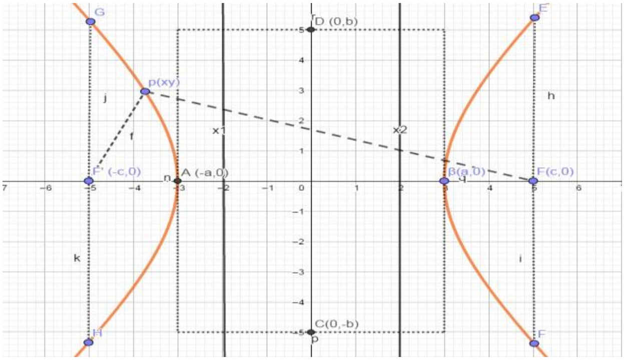


Gambar 7.5. Unsur-unsur hiperbola

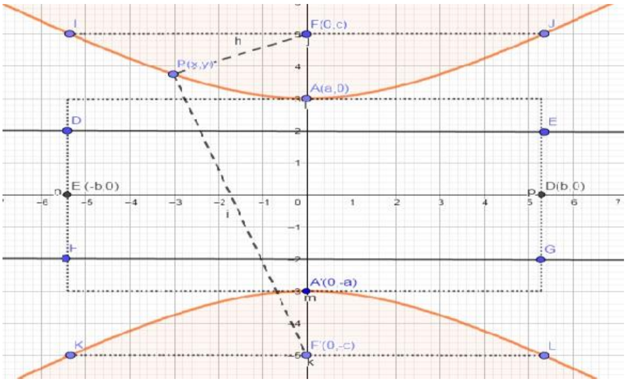
- Titik pusat (0,0)
- Titik fokus $(\pm c, 0)$
- Titik puncak $(\pm a, 0)$
- Rumus perhubungan $(a^2 + b^2 = c^2)$
- Sumbu nyata $(|AB| = 2a)$
- Panjang sumbu imajiner (2b)
- Nilai eksentrisitas $(e = \frac{c}{a})$
- Latus rectum $(\frac{2b^2}{a})$

7. C. PERSAMAAN HIPERBOLA STANDAR

Hiperbola memiliki beberapa jenis persamaan, ada yang standard ada yang bentuknya tak standar , pada dasarnya persamaan dasar hiperbola adalah persamaan yang bentuknya standar yaitu persamaan hiperbola yang berpusat di (0,0). Hiperbola standar terbagi menjadi dua , jenis pertama yaitu hiperbola horizontal dan yang kedua adalah hiperbola vertical. Hiperbola horizontal yaitu hiperbola yang kedua titik fokusnya berada di sumbu absis (x).sedangkan Hiperbola vertical yaitu hiperbola yang kedua titik fokusnya berada di sumbu ordinat (y)



Gambar 7.6. Hiperbola horisontal



Gambar 7.7. Hiperbola vertical

Definisi Hiperbola

Hiperbola didefenisikan sebagai kumpulan titik-titik yang selisih jarak antara titik tetap (titik focus) dengan garis direktris selalu sama (konstan).

Pada persamaan hiperbola kita memandang

$$|d_1 - d_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-y)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-y)^2+y^2}$$

$$(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 = (2a + \sqrt{(x-y)^2+y^2})^2$$

(VII.23)

Kedua ruas dikuardartkan untuk mengurangi unsur akar pada persamaan	$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-y)^2+y^2}+(x-y)^2+y^2$ $x^2+2xc+c^2-4a^2-(x^2-2xc+c^2)=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ **(VII.24)**
Kedua ruas kembali dikuadratkan untuk menghilangkan unsur akar	$4xc-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ $(-a^2+xc)^2=(a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2$
Penyederhaan dengan Penghapusan pada suku suku yang berniali sama tapi berbeda tanda.	$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2((x-c)^2+y^2)$ $a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$ $a^4+c^2x^2=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$ $c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$ $(c^2-a^4)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$ **(VII.25)**
Mempertimbangkan panjang sumbu, dan jarak titik fokus.	Karena $c>a$ diperoleh hubungan $c^2-a^2=b^2$ Sehingga $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2(dibagi\ dengna^2b^2)$ **(VII.26)**
Maka persamaan umum hiperbola horizontal dengan pusat O(0,0) adalah	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ **(VII.27)**
Dengan memperlakukan dengan cara yang sama, diperoleh persamaan umumuntuk hiperbola vertical yaitu berpusat O(0,0) adalah	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **(VII.28)**

7. D. PERSAMAAN HIPERBOLA TAK STANDAR TIPE 1

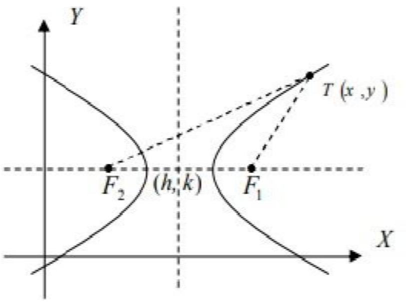
Persamaan hiperbola tak standar yaitu jenis hiperbola yang memiliki posisi bidang kartesius yang bergeser dari posisi titik asal (0,0). Hiperbola tak standar memiliki 2 tipe , yaitu tipe hiperbola tak standar tipe 1 dan tipe 2. Hiperbola tak standar tipe 1 merupakan tipe hiperbola yang memiliki titik pusat (h, k), dimana kedua sumbunya sumbu tranversal dan sumbu sekawan, sejajar dengan sumbu koordinat kartesius.

Sumbu transversal hiperbola ini adalah $y = k$ dengan panjang 2a. sedangkan sumbu sekawannya adalah $x = h$ yang memiliki panjang 2b, titik fokus hiperbola jenis ini adalah ($(h \pm ae, k)$dan memiliki titik ujung $(h \pm a, k)$.

Persamaan hiperbola tipe 1:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(VII.29)}$$

Perhatikan Ilustrasi hiperbola standar tipe 1



Gambar 7.8. Ilustrasi hiperbola yang berpusat di (h, k)

Pembentukan persamaan parabola tak standar

Definisi Hiperbola Hiperbola didefenisikan sebagai kumpulan titik-titik yang selisih jarak antara titik tetap (titik	Persamaan hiperbola di atas dapat diperoleh dengan langkah langkah sebagai berikut : $\lvert TF_2\rvert - \lvert TF_1\rvert = 2a$

focus) dengan garis direktris selalu sama (konstan).	(VII.30)
Hitungan jarak tetap, dengan selisih $2a$	$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} - \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = 2a$ $\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$ (VII.31)
Kedua ruas masing-masing dikuadratkan sehingga , akar pada ruas kiri hilang.	$x^2\text{-}2x(h-c)+(h-c)^2+(y-k)^2$ $= 4a^2+4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}+x^2\text{-}2x(h+c)+(h+c)^2+(y-k)^2$ $4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = -4a^2+4cx-4ch$ $a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = -a^2+c(x-h)$ (VII.32)
Penyederhanaan bentuk, melalui proses pengelompokan, pindah ruas	$a^2(x^2\text{-}2x(h+c)+(h+c)^2+(y-k)^2) = a^4 - 2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$ $a^2x^2-2a^2xh+2a^2xc+a^2h^2-2a^2ch+a^2(y-k)^2 = a^4+2a^2cx-2a^2ch+c^2(x-h)^2$ $a^2x^2-2a^2xh+a^2h^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^4-a^2c^2$

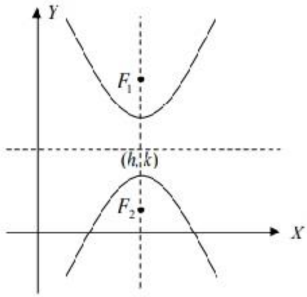
	$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$ $(a^2-c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$ (VII.33)
Perhatikan bahwa nilai $(a^2 - c^2)\ negatif$, sebab $c > a$. Dan kita misalkan nilai tetap tersebut kita ganti dengan nilai $-b^2$ maka persamaan hiperbola tersebut menjadi :	$-b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = -a^2b^2$ $\rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (VII.34)
Sehingga diperoleh persamaan hiperbola tak standar yang bepusat di (h, k)	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (VII.35)

Jadi, persamaan hiperbola yang berpusat di titik (h, k) dengan titik fokus pada sumbu utama yang sejajr dengan sumbu x, $F_1(h + c, k)$ dan $F_2(h - c, k)$adalah :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(VII.36)}$$

Begitu pula untuk hiperbola yang berpusat di titik (h, k) dengan titik fokus pada sumbu utama yang sejajar dengan sumbu y, $F_1(h, k + c)$dan $F_2(h, k - c)$ dengan cara yang sama maka kita akan mendapatkan :

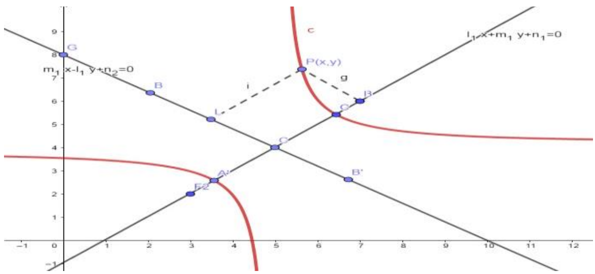
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad \text{(VII.37)}$$



Gambar 7.9. Hiperbola yang berpusat di titik (h, k) dengan titik fokus pada sumbu utama yang sejajar dengan sumbu y

7. E. PERSAMAAN HIPERBOLA TAK STANDAR 2

Hiperbola tak standar tipe 2 merupakan tipe hiperbola yang memiliki titik pusat (h, k) dimana kedua sumbunya yaitu sumbu tranversal dan sumbu sekawan, tidak sejajar dengan sumbu koordinat kartesius. Perhatikan ilustrasi hiperbola tak standar tipe 2



Gambar 7.10. Hiperbola tak standar hasil rotasi sumbu transversal dan sumbu sekawan

Misalkan sumbu transversal hiperbola dengan panjang $|AA'| = 2a$ memiliki persamaan $(l_1x + m_1y + n_1 = 0)$ dan sumbu sekawannya dengan panjang $|BB'| = 2b$ memiliki persamaan $(m_1x - l_1y + n_2 = 0)$ kedua garis tersebut saling tegak lurus. Maka persamaan hiperbola yang diberikan adalah

$$\frac{|PL|^2}{a^2}-\frac{|PL|^2}{b^2}=1 \qquad \text{(VII.38)}$$

$$\frac{\left(\frac{(m_1x-l_1y+n_2)}{\sqrt{m_1^2+l_1^2}}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{(l_1x+m_1y+n_1)}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}\right)^2}{b^2}=1 \qquad \text{(VII.39)}$$

$$\frac{(m_1x-l_1y+n_2)^2}{a^2\left(\sqrt{m_1^2+l_1^2}\right)^2}-\frac{(l_1x+m_1y+n_1)^2}{b^2\left(\sqrt{l_1^2+m_1^2}\right)^2}=1 \qquad \text{(VII.40)}$$

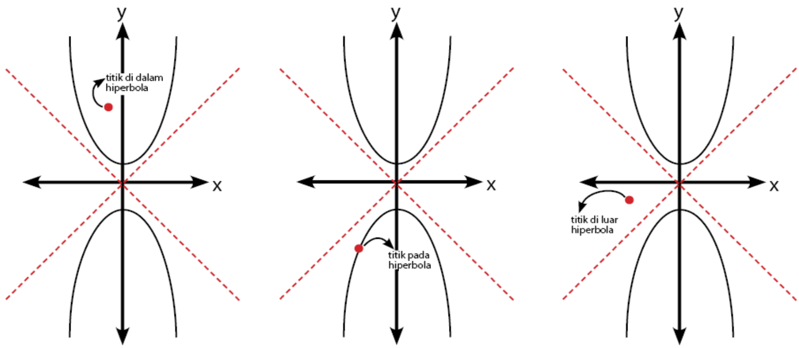
Jadi diperoleh persamaan hiperbola tak standar tipe 2 yaitu

$$\frac{(m_1x-l_1y+n_2)^2}{a^2\left(\sqrt{m_1^2+l_1^2}\right)^2}-\frac{(l_1x+m_1y+n_1)^2}{b^2\left(\sqrt{l_1^2+m_1^2}\right)^2}=1 \qquad \text{(VII.41)}$$

7. F. KEDUDUKAN TITIK TERHADAP HIPERBOLA

Bentuk dari irisan kerucut dapat berupa hiperbola, bentuknya mirip dengan dua parabola yang dicerminkan.Salah satu pembahasan dalam materi hiperbola adalah kedudukan titik terhadap hiperbola.Kedudukan tersebut dapat meliputi titik di dalam hiperbola, titik pada hiperbola, dan titik di luar hiperbola. Melalui halaman ini akan diulas bagaiman cara menentuka kedudukan titik terhadap hiperbola dengan memanfaatkan persamaan umum hiperbola.

Sebuah titik yang terletak satu bidang dengan hiperbola akan mempunyai tiga kemungkinan kedudukan, yaitu titik di dalam parabola, titik pada parabola, atau titik di luar parabola. Ilustrasi tiga kemungkinan kedudukan titik terhadap hiperbola dapat dilihat seperti gambar di bawah.



Gambar 7.11. Ilustrasi kedudukan titik terhadap hiperbola

Dengan melihat kedudukan titik pada hiperbola melalui gambar, akan secara mudah ditentukan kedudukan titik terhadap hiperbola. Namun, jika yang diketahui hanya persamaan hiperbola dan letak koordinat sebuah titik, maka dapat diketahui kedudukan titik pada parabola sebagai berikut.

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1 \qquad \text{(VII.42)}$$

Pembahasan pertama adalah mengetahui letak titik terhadap hiperbola untuk titik di dalam hiperbola. Sebuah titik dikatakan terletak di dalam hiperbola jika titik koordinat tersebut berada di area dalam lengkungan hiperbola.

Kriteria titik di dalam hiperbola dapat ditentukan melalui persamaan yang diberikan di bawah.

a. Hiperbola Horizontal

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>1 \qquad \text{(VII.43)}$$

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} > 1 \qquad \text{(VII.44)}$$

b. Hiperbola Vertikal

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} > -1 \qquad \text{(VII.45)}$$

$$\frac{(x-p)^2}{b^2} - \frac{(y-q)^2}{a^2} > -1 \qquad \text{(VII.46)}$$

Kedua adalah pembahasan mengenai letak titik terhadap hiperbola untuk titik pada hiperbola.Sebuah titik dikatakan terletak pada hiperbola jika titik koordinat tersebut berada garis lengkung hiperbola.Kriteria titik pada hiperbola dapat ditentukan melalui persamaan berikut. :

a. Hiperbola Horizontal

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(VII.47)}$$

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(VII.48)}$$

a. Hiperbola Vertikal

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1 \qquad \text{(VII.49)}$$

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1 \qquad \text{(VII.50)}$$

Pembahasan berikutnya adalah mengetahui letak titik terhadap hiperbola untuk titik di luar hiperbola.Sebuah titik dikatakan terletak di luar hiperbola jika titik koordinat tersebut berada di luar area lengkungan hiperbola.

Kriteria titik di luar hiperbola dapat ditentukan melalui persamaan yang diberikan di bawah.

a. Hiperbola Horizontal

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1 \qquad \text{(VII.51)}$$

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} < 1 \qquad \text{(VII.52)}$$

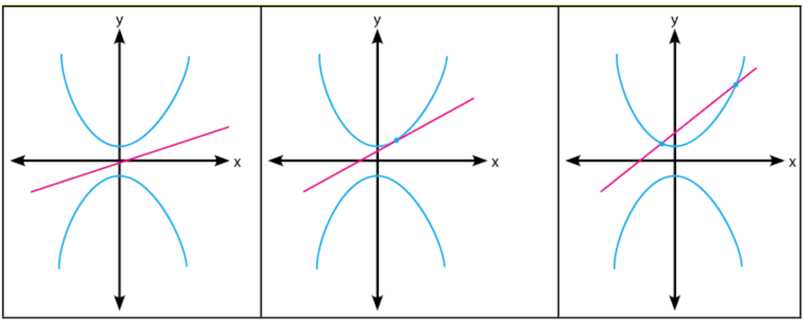
b. Hiperbola Vertikal

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} < -1 \qquad \text{(VII.53)}$$

$$\frac{(x-p)^2}{b^2} - \frac{(y-q)^2}{a^2} < -1 \qquad \text{(VII.54)}$$

7. G. KEDUDUKAN GARIS TERHADAP HIPERBOLA

Hiperbola merupakan salah satu bentuk irisan kerucut. Bentuknya menyerupai kurva persamaan kuadrat dan hasil pencerminannya. Pembahasan hiperbola tentang bentuk persamaan dan kedudukan titik pada hiperbola dibahas di halaman lain. Pada halaman ini, fokus pembahasannya adalah materi kedudukan garis terhadap hiperbola.Kedudukan tersebut meliputi garis tidak memotong hiperbola, garis menyinggung hipebola, dan garis memotong hiperbola di dua titik. Gambar mengenai ketiga kedudukan garis terhadap hiperbola dapat dilihat pada gambar di bawah



Gambar 7.12. Ilustrasi kedudukan garis terhadap hiperbola

Dikenalkan cara lain yang dapat digunakan untuk menentukan kedudukan garis. Cara tersebut diperoleh dengan melihat nilai diskriminan dari persamaan kuadrat, hasil substitusi persamaan garis ke persamaan hiperbola. Diskriminan adalah hubungan antara koefisien dalam persamaan kuadrat untuk mencari hubungan kedudukan garis terhadap parabola. Penentuan kriteria kedudukan garis terhadap hiperbola bergantung pada persamaan hiperbola dan persamaan garisnya. Jika diketahui persamaan kuadrat $y = Ax^2 + Bx + C$ sebagai hasil subtitusi persamaan garis terhadap hiperbola maka nilai diskriminannya dapat diperoleh melalui rumus $D = B^2 - 4AC$.

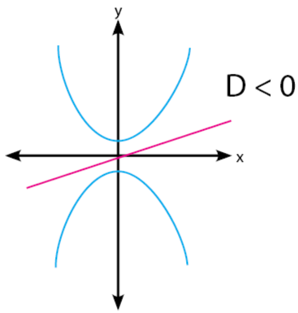
Langkah-langkah menentukan kedudukan garis terhadap hiperbola:

1. Substitusi persamaan garis lurus ke dalam persamaan hiperbola sehingga diperoleh persamaan kuadrat.
2. Menentukan nilai diskriminan dari hasil persamaan kuadrat yang diperoleh.
3. Menyimpulkan hasilnya, apakah garis tidak memotong hiperbola, garis memotong hiperbola di satu titik, atau garis memotong hiperbola di dua titik. Kesimpulan ini diperoleh dari nilai diskriminan yang telah dihitung pada poin ke dua.

Pada bab ini tidak diuraikan pembentukan kriteria kedudukan garis terhadap hiperbola, namun diberikan kesempatan kepada pembaca untuk mengeksplorasi lebih lanjut sebaga bahan latihan

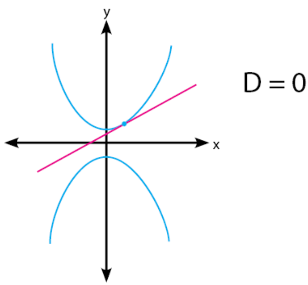
Garis dikatakan tidak memotong hiperbola jika kedudukan garis pada hiperbola tidak memiliki satupun titik potong garis pada hiperbola.Hal ini dipenuhi ketika nilai diskriminan dari persamaan kuadrat hasil substitusi persamaan garis ke persamaan hiperbola memiliki nilai kurang dari nol, $D < 0$.

Perhatikan gambar dan kriteria garis yang tidak memotong hiperbola seperti pada gambar di bawah.



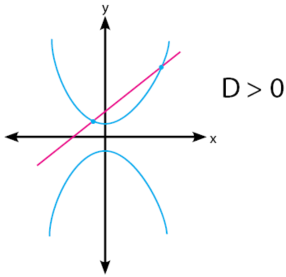
Gambar 7.13. Ilustrasi garis yang tidak memotong dan tidak menyinggung hiperbola

Pembahasan berikutnya adalah kedudukan garis terhadap hiperbola untuk kasus garis memotong hiperbola di satu titik, atau biasa disebut dengan garis menyinggung hiperbola. Kriteria garis memotong hiperbola di satu titik dipenuhi saat nilai determinan sama dengan nol, D = 0. Perhatikan gambar hiperbola dan garis lurus yang menyinggung di satu titik beserta dengan kriterianya.



Gambar 7.14. Ilustrasi garis yang menyinggung hiperbola

Sebuah garis dikatakan memotong hiperbola di dua titik jika memiliki dua titik yang sama-sama dilalui garis lurus dan hiperbola.Kondisi ini dapat dilihat dari nilai diskriminannya yang lebih dari nol, D > 0.Ilustrasi gambar garis lurus yang memotong hiperbola di dua titik berserta kriterianya dapat dilihat pada gambar di bawah.



Gambar 7.15. Ilustrasi garis yang memotong hiperbola

7. H. HIPERBOLA DALAM TINJAUAN GEOGEBRA

Hiperbola adalah himpunan dengan sifat perbandingan jarak ke suatu titik (direktris) dan ke suatu titik (fokus) adalah konstan $(x = e > 1)$. Berdasarkan definisi tersebut maka dapat dilukis grafik hiperbola pada aplikasi geogebra.

Proses membuat hiperbola pada geogebra, sebagai berikut.

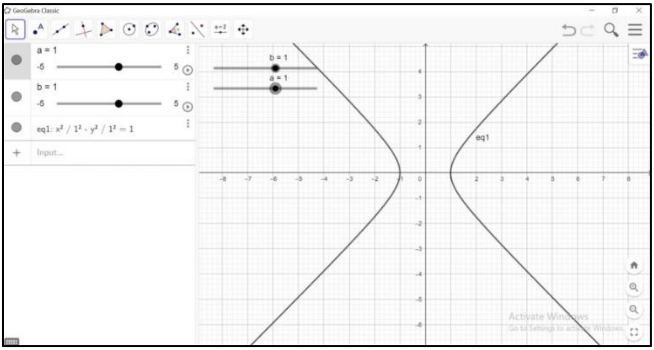
- Pada sumbu *x*, ukurkan $OA = OA_1 =$ *aartinya* $AA_1 = 2a$ (disebut sumbu real).
- Pada sumbu *y*, ukurkan $OB = OB_1 = b$ artinya $BB_1 = 2b$ (disebut sumbu imajiner).
- Lingkaran $OF = OF_1 = BA$
- Tarik garis-garis POR dan QRS.
- Diperoleh persamaan : $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$
- $AA_1 = 2a$ disebut sumbu asal.
- $A(a,0)$ dan $A_1(-a,0)$ disebut titik puncak pada hiperbola.
- $F(c,0)$ dan $F_1(-c,0)$ disebut titik fokus hiperbola.
- Persamaan direktris hiperbola
- $\boldsymbol{x = \pm\frac{a^2}{c}}$
- Persamaan eksentrisitas hiperbola
- $\boldsymbol{e = \frac{c}{a}}$

- **MELUKIS HIPERBOLA BERPUSAT PADA TITIK (0,0)**

Untuk melukis hiperbola yang berpusat pada titik (0,0) pada geogebra maka masukkan persamaan hi[erbola dalam kolom input :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sehingga, grafiknya diperoleh dalam bentuk



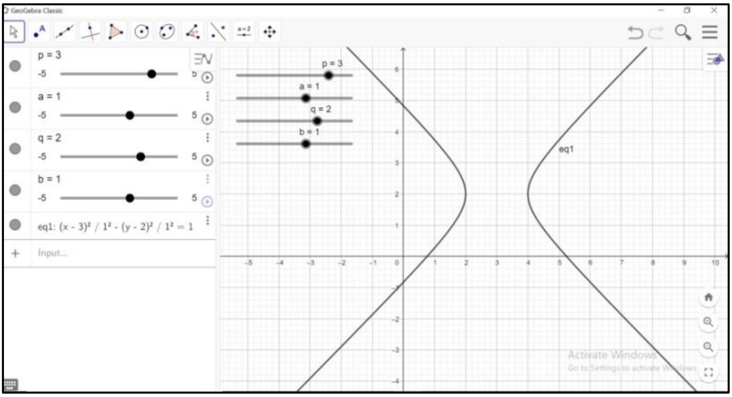
Gambar 7.16. Penggambaran hiperbola standar pada geogebra

❖ Melukis Hiperbola pada titik

Untuk melukis hiperbola yang berpusat pada titik (p,q) pada geogebra, maka persamaan yang digunakan

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

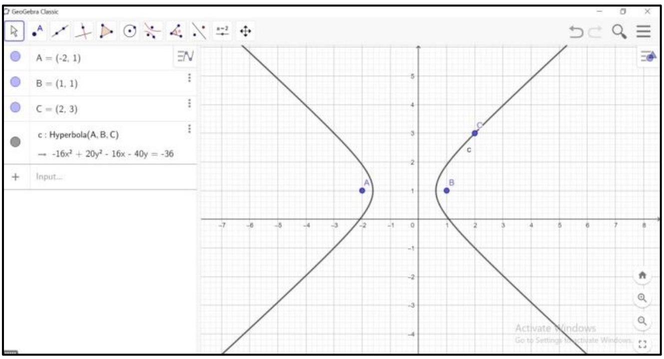
Sehingga grafiknya akan berpindah posisi



Gambar 7.17. Penggambaran hiperbola tak standar pada geogebra

❖ Meninjau kedudukan titik terhadap Hiperbola di Geogebra

Misalkan diketahui suatu hiperbola mempunyai titik fokus A(1,1) dan B(-2,1) serta melalui titik C(3,3). Maka cara menyelesaikannya dengan mengimput terlebih dahulu titik A(1,1) lalu enter. Setelah itu, mengimput lagi titik B(-2,1) kemudian enter. Kemudian mengimput titik C(3.3) lalu enter. Dan yang terakhir mengimput c : Hyperbola(A,B,C) dan enter. Maka grafik hiperbola akan seperti gambar dibawah ini.



Gambar 7.18. Kedudukan titik terhadap hiperbola tak standar pada geogebra

7. I. LATIHAN SOAL

1. Tentukan koordinat titik puncak, titik fokus, panjang latus rektum, persamaan direktriks, eksentrisitas, persamaan asimtot dari hiperbola $16x^2 - 9x^2 = 144$!.
2. Tentukan koordinat titik puncak, titik fokus, panjang latus rektum, persamaan direktriks, eksentrisitas, dan persamaan asimtot darihiperbola $3x^2 - 2y^2 + 4y - 26 = 0$!
3. Hiperbola dengan pusat (0,0) mempunyai asimtot $y = \frac{2}{3}x$dan koordinat fokus $(\sqrt{13}, 0)$. Persamaan hiperbola tersebut adalah ....!
4. Tentukan masing-masing persamaan hiperbola dengan kondisi berikut.
   a. Pusat (2,0), fokus (10,0), dan puncak (6,0).
   b. Puncak (6,5), sumbu khayal pada sumbu X dengan asimtot $5x - 6y - 30 = 0$ dan $5x + 6y - 30$.
5. Tentukan persamaan asimtot hiperbola tersebut.
   a. $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y+4)^2}{25}$
   b. $6x^2 - 15y^2 + 12x + 30y - 99 = 0$
6. Tentukan persamaan hiperbola yang titik-titik apinya terletak pada sumbu Y simetris terhadap O dan memenuhi syarat bahwa jarak kedua titik apinya adalah $2c = 4\sqrt{3}$ dan eksentrisitasnya $e = \sqrt{3}$!
7. Konstruksilah suatu persamaan yang menjadi kriteria kedudukan garis terhadap hiperbola, dengan menggunakan konsep pembentukan persamaan kuadrat pada materi lingkaran, parabola, dan elips!
8. Tentukan luas daerah segitiga yang dibentuk oleh asimtot-asimtot hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ dan garis $9x = +2y - 24 = 0$!
9. Persamaan garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9}$ yang sejajar dengan garis $y - 2x + 4 = 0$ adalah .....
10. Persamaan garis singgung hiperbola $\frac{(y+4)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9}$ yang tegak lurus garis $3x + y + 4 = 0$ adalah..
11. Tentukan persamaan garis singgung hiperbola $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$ yang:
    a. sejajar garis $4x - x + 1 = 0$;
    b. tegak lurus garis $4x + 2y - 7 = 0$

BAB VIII. PERSAMAAN PARAMETRIK

Kemampuan Akhir Yang Diharapkan

- Memahami konsep dasar Persamaan Parameter
- Memahami pembentukan rumusan perhitungan panjang kurva dengan suatu persamaan parameter
- Mengintegrasikan irisan kerucut Parabola dengan bentuk parametriknya
- Mengintegrasikan irisan kerucut Parabola dengan bentuk parametriknya
- Mengintegrasikan irisan kerucut Elips dengan bentuk parametriknya
- Mengintegrasikan irisan kerucut Hiperbola dengan bentuk parametriknya

8. A. PENDAHULUAN PERSAMAAN PARAMETER

Pada 6 bab sebelumnya (Bab 2- bab 7), kita telah mengenal apa yang mendasari penggunaan sistem koordinat kartesius dalam kajian geometri analitik bidang. Unsur-unsur seperti titik, garis, segmen, polyline, polygon, ataupun ruang 3 Dimensi, kedudukannya tidak dapat diidentifikasi tanpa adanya sistem koordinat. Selain kedudukannya, koordinat juga punya peran penting dalam memadukan konsep aljabar dengan geometri. Dalam hal ini, secara grafis objek-objek seperti titik, garis, kurva, bidang dapat dikatakan sebagai hubungan antara titik pada sumbu- x degan titik pada sumbu-y.

Hubungan tersebut dapat berupa suatu aturan yang memenuhi karakteristik fungsi, dapat pula hanya berupa persamaan.

$$y = F(x) \tag{VIII.1}$$

Dalam persamaan parameter kita tidak hanya melihat hubungan antara nilai x dan nilai y saja. Namun nilai-nilai x ini juga dinyatakan sebagai fungsi yang terikat pada suatu parameter baru, demikian dengan nilai-nilai y ini juga dinyatakan sebagai fungsi lain yang terikat pada suatu parameter baru yang sama. Umumnya notasi pada parameter yang digunakan yaitu paramtere $\boldsymbol{t}$. Dengan ini nilai x dan nilai y masing-masing dinyatakan sebagai :

$$x = f(t) \tag{VIII.2}$$

$$y = g(t) \tag{VIII.3}$$

Selain perubahan bentuk fungsi, hal yang menjadi perhatian dalam persamaan paramtrik yaitu perubahan batas pendefinisian. Jika pada fungsi utama $y = F(x)$, batasnya diamati pada domain x, dengan demikian persamaan paramterik $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, batasnya diamati pada parameter t. Proses tersebut dikenal dengan transformasi parameter. Sehingga dapat dikatakan bahwa persamaan parametrik dapat dianggap sebagai suatu cara baru untuk mendefinisikan suatu kurva dalam suatu bidang.

Hubungan nilai x dan nilai y inilah pada topik garis, kurva dan irisan kerucut akan ditinjau sebagai hubungan dari fungsi baru. Hubungan inilah yang dikenal sebagai persamaan parametrik. Berikut akan diuraikan bentuk-bentuk persamaan parametrik dari garis, kurva dan bidang-bidang yang dihasilkan dari irisan kerucut.

8. B. PERSAMAAN PARAMETRIK PADA FUNGSI LINEAR

Pada bab 3, materi mengenai garis telah diuraikan secara tuntas mengenai unsur intrinsik dan jenis-jenis penyajiannya. Telah dikenali dan dipahami pula bahwa suatu garis lurus dapat dianalisis secara aljabar jika berkedudukan pada sistem koordinat kartesius. Melaui penjelasan ini, suatu garis kemudian dapat dilihat hubungannya dengan bidang-bidang yang dihasilkan dari irisan kerucut Dengan kata lain, bahwa suatu garis lurus hanya dapat dibentuk persamaannya apabila berada dalam sistem koordinat. Sebab melalui sistem koordinat, suatu garis dapat ditentukan letak-letak titik (x_i, y_i) yang dilewati oleh garis. Dengan titik-titik tersebut, kemudian dapat ditentukan tingkat kemiringan atau nilai gradien dari garis tersebut dengan $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Apabila persamaan garis lurus yang diberikan dalam bentuk $y = mx + k$, maka persamaan parametriknya dapat dinyatakan dengan :

$$x = f(t) = x_1 + \Delta x \cdot t \qquad \text{(VIII.4)}$$

$$y = g(t) = y_1 + \Delta y \cdot t \qquad \text{(VIII.5)}$$

Hubungan nilai x dan nilai y di atas dapat dipertemukan oleh parameter t. Perhatikan bahwa :

$$x = x_1 + \Delta x \cdot t \Longrightarrow t = \frac{x - x_1}{\Delta x} \qquad \text{(VIII.6)}$$

$$y = y_1 + \Delta y \cdot t \Longrightarrow t = \frac{y - y_1}{\Delta y} \qquad \text{(VIII.7)}$$

Dari bentuk diatas diperoleh :

$$\frac{x - x_1}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{\Delta y} \quad \text{(VIII.8)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \text{(VIII.9)}$$

Dengan ini diperoleh :

$$\Delta x = x - x_1;\ \Delta y = y - y_1 \quad \text{(VIII.10)}$$

$$x = x_1 + \Delta x \cdot t \Longrightarrow x = x_1 + (x - x_1) \cdot t \quad \text{(VIII.11)}$$

$$y = y_1 + \Delta y \cdot t \Longrightarrow y = y_1 + (y - y_1) \cdot t \quad \text{(VIII.12)}$$

Melalui formula ini dapat dikatakan bahwa :

1. Apabila diberikan dua titik awal yang dilewati oleh garis lurus yang sama, tanpa adanya persamaan garisnya maka persamaan persamaan parameternya dapat ditentukan. Misal titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$, maka persamaan persamaan parametriknya dapat dituliskan dengan :

$$x = x_1 + (x_2 - x_1) \cdot t \quad \text{(VIII.13)}$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot t \quad \text{(VIII.14)}$$

2. Dalam kondisi yang lain, dapat pula masalah yang diberikan itu berupa persamaan garis $y = mx + k$. Dari kondisi-kondisi tersebut dapat ditentukan dengan mengidentifikasi nilai gradien m (dalam pecahan) dan mencari titik-titik yang dilewati oleh garis tersebut.

Agar kita dapat memahami penentuan persamaan-persamaan parameter di atas, kita dapat mendalaminya melalui contoh-contoh berikut :

Contoh Soal :

1. Misal diberikan suatu persamaan garis : $y = 2x + 5$, tentukan persamaan persamaan parameternya !

   Langkah 1 : Identifikasi gradien dari persamaan garis :

$$y = 2x + 4 \rightarrow m = 2$$

   Dari $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, diperoleh $\Delta y = 2; \Delta x = 1$ atau $\Delta y = -2; \Delta x = -1$.

Langkah 2 : Identifikasi salah satu titik yang dilalui
Untuk $x = 0 \rightarrow y = 4$ diperoleh titik $(0,4)$.

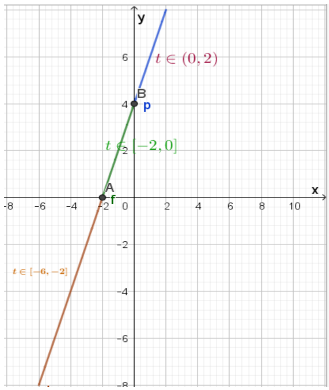
Dari nilai $\Delta y = 2; \Delta x = 1$ dan $x_1 = 0, y_1 = 4$ serta dari rumusan :

$$x = x_1 + \Delta x \cdot t$$
$$y = y_1 + \Delta y \cdot t$$

diperoleh

$$x = x_1 + \Delta x \cdot t \rightarrow \; x = t$$
$$y = y_1 + \Delta y \cdot t \rightarrow \; y = 4 + 2t$$

Sehingga untuk menggambarkannya maka kita dapat m



Gambar 8.1. Representasi persamaan garis dengan dengan domain parameter t

Bentuk persamaan paramter dengan cara seperti di atas tidaklah tunggal

$$x = x_1 + \Delta x \cdot t \rightarrow \; x = -2 + t$$
$$y = y_1 + \Delta y \cdot t \rightarrow \; y = 2t$$

Selanjutnya dapat pula dicari dengan dua titik :
Untuk $y = 0 \rightarrow x = -2$ diperoleh titik $(-2,0)$.
Untuk $x = 0 \rightarrow y = 4$ diperoleh titik $(0,4)$.
Melalui formula :

$$x = x_1 + (x_2 - x_1) \cdot t$$
$$y = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot t$$

Diperoleh :

$$x = 0 + (-2 - 0) \cdot t \longrightarrow x = -2t$$
$$y = 4 + (0 - 4) \cdot t \longrightarrow y = 4 - 4t$$

Transformasi batas $x = -2t \Longrightarrow t = -\frac{1}{2}x$

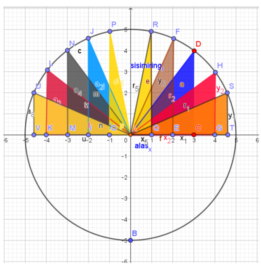
8. C. PERSAMAAN PARAMETRIK PADA IRISAN KERUCUT

Pada bab 4 sampai bab 7, telah diulas mengenai konstruksi persamaan-persamaan standar dari masing-masing irisan kerucut. Persamaan yang terbentuk pada lingkaran, parabola, elips dan hiperbola berupa persamaan implisit. Dalam penyajian persamaanya, hampir semua irisan kerucut tidak dapat dikategorikan sebagai fungsi murni, sebagaimana definsi dasar fungsi yang dipahami dalam kajain Kalkulus[20]. Ketika kita melihat hubungan antara variabel x dan y, tidak memenuhi kaidah fungsi yakni setiap nilai x hanya terpetakan ke tepat satu nilai y. Atau dalam penyajian grafik, kita dapat melihat bahwa pada irisan kerucut ini tidak memenuhi kaidah penggambaran grafik suatu fungsi. Seperti hanya pada lingkaran dan elips setiap titik di x akan terpetakan pada dua titik y. Demikian dengan parabola yang terbuka ke kanan atau ke kiri.

Namun demikian persamaan persamaan standar dan tak standar yang ada pada irisan kerucut, dapat ditransformasikan ke dalam persamaan-persamaan parameter tertentu yang memenuhi karakteristik fungsi. Berikut dijelaskan bentuk-bentuk persamaan parameter dari masing-masing persamaan standar irisan kerucut : Lingkaran, Parabola, elips dan hiperbola.

Lingkaran

Pada bab 4 : bab **Irisan Kerucut Lingkaran**, kita telah mengenal bagaimana pembentukan persamaan standar dan tak standar lingkaran. Sebagai bahan review, dapat dituliskan kembali bagaimana kerangka pembentukan persamaan standar dari lingkaran dan wujud persamaan standar. Berdasarkan gambar 4.3 yang disajikan kembali dalam gambar 8.2

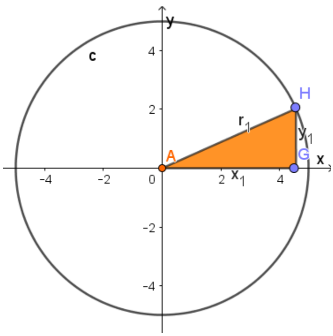


Gambar 8.2. Kumpulan siku siku yang membentuk lingkaran

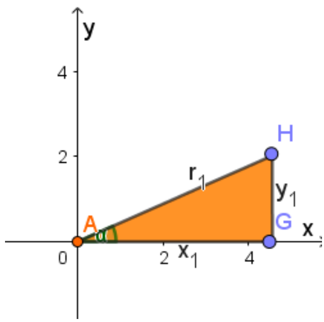
[20] Dale Varberg, Edwin J. Purcell, and Steve Rigdon, *Calculus, 9th Edition* (Prentice Hall, Inc, 2006).

Interpretasi : Gambar di atas menunjukkan kumpulan 10 segitiga siku-siku yang berada pada dua kuadran dengan pasangan panjang alas dan tinggi yang berbeda untuk setiap segitiga pada setiap kuadrannya. Namun, untuk semua segitiga membentuk sisi miring yang panjangnya sama. Dengan ini dapat dibentuk suatu persamaan segitiga dengan pendekatan teorema Phytagoras.

Dari setiap pasangan segitiga-siku-siku yang terbentuk dalam ilustrasi pembentuk titik lingkaran dapat dikaitkan dengan fungsi-fungsi trigonometri. Misal dari gambar tersebut diambil satu pasang ruas pembentuk segitiga siku-siku :



Gambar 8.3. Satu segmen segitiga siku-siku pembentuk titik-titik lingkaran



Gambar 8.4. Segitiga siku-siku dari titik lingkaran

Dari segitiga siku-siku tersebut dapat dikonstruksi fungsi fungsi trigonometri yang menyatakan hubungan antara sisi alas (mendatar), sisi tinggi (tegak), sisi miring dan besar sudut. Dengan mengganti notasi besar sudut α menjadi notasi $\boldsymbol{t}$ dalam hal ini :

$$\cos t = \frac{x}{r} \Longrightarrow x = r\cos(t) \qquad \textbf{(VIII.15)}$$

$$\sin t = \frac{y}{r} \Longrightarrow y = r\sin(t) \qquad \textbf{(VIII.16)}$$

Fungsi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}\cos(\boldsymbol{t})$ dan $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}\sin(\boldsymbol{t})$ merupakan persamaan persamaan parameter lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ atau dengan kata lain, lingkaran yang meiliki persamaan $x^2 + y^2 = r^2$. Dari persamaan parameter tersebut kini domain $\boldsymbol{t}$ berada di antara $0 \leq t \leq 2\pi$. Sedangkan jika persamaan lingkaran yang diberikan dalam bentuk :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \qquad \text{(VIII.17)}$$

$$Dimana : A = -2\alpha; B = -2\beta; C = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$
$$Diperoleh : \alpha = -\frac{A}{2}; \beta = -\frac{B}{2}; r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - C}$$

Maka persamaan parametriknya dapat dituliskan dengan :

$$\boldsymbol{x} = -\alpha + \boldsymbol{r}\cos(\boldsymbol{t}) \qquad \text{(VIII.18)}$$

$$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{r}\sin(\boldsymbol{t}) \qquad \text{(VIII.19)}$$

Parabola

Seperti halnya dengan lingkaran, persamaan dasar parabola juga dapat dinyatakan ke dalam persamaan parameter. Pada Bab 5 Parabola telah diketahui terdapat 4 kombinasi persamaan standar dan 4 kombinasi persamaan tak standar dari parabola, yaitu :

Jenis Parabola	Persamaan Standar Berpusat di $(0,0)$	Persamaan tak standar berpusat di (α,β)
Parabola vertikal ke atas	$x^2 = 4py$	$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$
Parabola vertikal ke bawah	$x^2 = -4py$	$(x-\alpha)^2 = -4p(y-\beta)$
Parabola horizontal kanan	$y^2 = 4px$	$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$
Parabola horizontal ke kiri	$y^2 = -4px$	$(y-\beta)^2 = -4p(x-\alpha)$

Masing-masing dari persamaan tersebut juga dapat direpresentasikan dalam persamaan parameter. Pada pembentukan persamaan parameter dapat diperhatikan bagaimana tipe parabola meberikan persamaan parameter yang berbeda. Pandang pada persamaan standar tipe parabola vertikal ke atas $x^2 = 4py$ dapat ditinjau sebagai persamaan kuadrat.

Melalui persamaan kuadrat tersebut dapat dituliskan kembali dalam bentuk $y = \frac{1}{4p}x^2$. Bentuk tersebut dapt diinterpretasikan sebagai suatu fungsi dengan variabel tak bebas y yang terikat pada variabel bebasnya x dengan koefisien $\frac{1}{4p}$. Apabila persaman parabola tersebut akan dinyatakan sebagai persamaan parameter maka kita akan mengkonstrusi fungsi $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$.

Pembentukannya dapat dilakukan dengan memandang $\boldsymbol{x}$ sebagai fungsi identitas atau satuan terhadap parameter $\boldsymbol{t}$ dengan ini parameter t dapat menggantikan variabel bebas $\boldsymbol{x}$, sehingga parameter $\boldsymbol{t}$ dapat menjadi suatu variable bebas terhadap $\boldsymbol{y}$ juga dalam bentuk persamaan kuadrat seperti berikut :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} \Longrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{1}{4p}\boldsymbol{t}^2 \qquad \text{(VIII.20)}$$

Namun jika hubungan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{t}$ akan dinyatakan sebagai hubungan linear, maka bentuk persamaan parameter $\boldsymbol{y}$ juga akan ikut bertransformasi. Misal dipilih $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{2pt}$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{2pt} \Longrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{1}{4p}(\boldsymbol{2pt})^2 \qquad \text{(VIII.21)}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{4\boldsymbol{p}^2}{4p}\boldsymbol{t}^2 \Longrightarrow \boldsymbol{y} = p\boldsymbol{t}^2 \qquad \text{(VIII.22)}$$

Dari proses tersebut diperoleh bahwa apabila diberikan persamaan parabola $x^2 = 4py$, maka persamaan parameternya dapat dinyatakan dengan :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{2pt} \qquad \text{(VIII.23)}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{pt}^2 \qquad \text{(VIII.24)}$$

Selanjutnya untuk tipe standar lainnya, masing-masing parameternya dapat ditentukan dengan cara yang serupa.

Persamaan Parabola	Persamaan Parameter	Persamaan Parameter
$x^2 = 4py$	$x = t \Rightarrow y = \frac{1}{4p}t^2$	$x = 2pt\ ;\ y = pt^2$
$x^2 = -4py$	$x = t \Rightarrow y = -\frac{1}{4p}t^2$	$x = 2pt\ ;\ y = -pt^2$
$y^2 = 4px$	$y = t \Rightarrow x = \frac{1}{4p}t^2$	$y = 2pt\ ;\ x = pt^2$
$y^2 = -4px$	$y = t \Rightarrow x = -\frac{1}{4p}t^2$	$y = 2pt\ ;\ x = -pt^2$

Sedangkan pembentukan persamaan paramter untuk tipe tak standar.

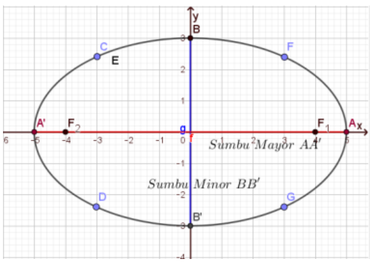
Persamaan Parabola	Persamaan Parameter
$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$	$x = \beta + 2pt\ ;\ y = \alpha + pt^2$
$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$	$y = \alpha + 2pt\ ;\ x = \beta + pt^2$

Elips

Irisan kerucut selanjutnya ialah kurva bidang elips. Pada bab 6 juga telah diuraikan pembentukan persamaan-peramaan standar pada elips. Persamaan elpis standar tipe 1, yaitu elips horizontal dengan persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(VIII.25)}$$

Dapat direpresentasikan pada gambar berikut :



Gambar 8.5. Bidang elips standar

Persamaan parameter elips tersebut dapat dinyatakan dengan :

$$x = a\cos(t) \qquad \text{(VIII.26)}$$

$$y = b\sin(t) \qquad \text{(VIII.27)}$$

Dimana, $\boldsymbol{t}$ berada di antara $0 \leq t \leq 2\pi$

Selanjutnya untuk tipe elips tak standar yang berpusat di (α, β), dalam hal ini dinyatakan dalam :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(VIII.28)}$$

Memiliki bentuk persamaan parameter sebagai berikut :

$$x = \alpha + a\cos(t) \qquad \text{(VIII.29)}$$

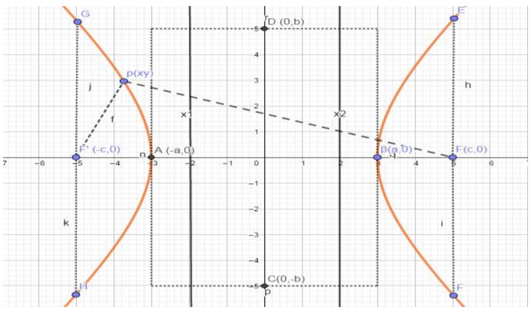
$$y = \beta + b\sin(t) \qquad \text{(VIII.30)}$$

Hiperbola

Jenis irisan kerucut yang terakhir ialah hiperbola. Pembentukan persamaan hiperbola standar dan tak standar, hubungannya terhadap titik dan garis telah diuraikan pada bab 7. Agar kita dapat menyatakan persamaan parameternya, maka baiknya kita untuk menuliskan kembali persamaan hiperbola bentuk standar.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(VIII.31)}$$

Persamaan di atas dapat direpresentasikan pada gambar berikut :



Gambar 8.6. Hiperbola horizontal standar

Persamaan parameter hiperbola tersebut dapat dinyatakan dengan :

$$x = \pm a \cosh(t) \quad \text{(VIII.32)}$$

$$y = \pm b \sinh(t) \quad \text{(VIII.33)}$$

Dimana, $\boldsymbol{t}$ berada di antara $0 \leq t \leq 2\pi$

Selanjutnya untuk tipe elips tak standar yang berpusat di (α, β), dalam hal ini dinyatakan dalam :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \quad \text{(VIII.34)}$$

Memiliki bentuk persamaan parameter sebagai berikut :

$$x = \alpha \pm a \cosh(t) \quad \text{(VIII.35)}$$

$$y = \beta \pm b \sinh(t) \quad \text{(VIII.36)}$$

8. D. PERSAMAAN PARAMETER PANJANG KURVA BIDANG

Pada bagian ini, perhatian kita tertuju pada materi kalkulus bagian aplikasi turunan dan integral dalam menghitung panjang kurva dengan memanfaatkan bentuk persamaan parameter. Pada bagian awal kita perlu mengenal kembali kurva bidang. Dalam buku Calculu[21], *Varberg et al* (2006) memperkenalkan istilah kurva bidang ini sebagai bentuk pengembangan kurva yang merepresentasikan fungsi. Dalam hal ini, kurva bidang yang dimaksud tidak hanya berupa kurva yang merepresentasikan kurva terbuka, namun kurva yang membentuk bidang. Suatu kurva bidang dapat direpresentasikan oleh sepasang persamaan parameter seperti pada persamaan (VIII.2) dan (VIII.3)

$$x = f(t) \quad \text{(VIII.37)}$$

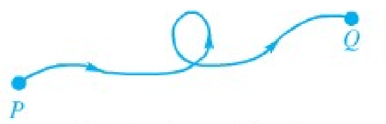
$$y = g(t) \quad \text{(VIII.38)}$$

Dimana f dan g kontinu pada Interval I. Seperti telah dikatakan pada sub bab 9.1, bahwa selain mentransformasi bentuk fungsinya dari bentuk $a \leq x \leq b$ menjadi suatu nterval daerah $P \leq t \leq Q$. Dalam hal ini, jika pada persamaan kartesius x bergerak

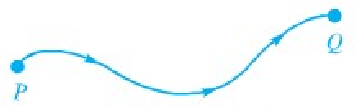
[21] Dale Varberg, Purcell, and Rigdon.

pada I sebagai suatu interval tertutup $[a, b]$, maka pada persamaan parametrik ini t bergerak pada suatu titik awal $P(x(a), y(a))$ ke titik akhir $Q(x(b), y(b))$. Adapun hubungan antara titik awal dan titik akhir menentukan sifat ketertutupan.

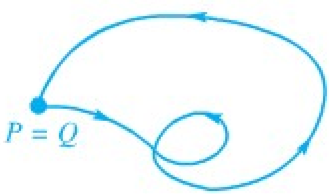
Berikut diberikan jenis-jenis kurva berdasarkan kompleksitas dan ketertutupannya[22].



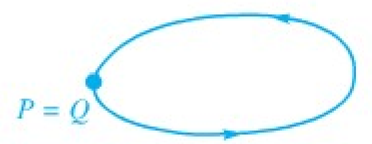
Gambar 8.7. Kurva tidak sederhana dan tidak tertutup



Gambar 8.8. Kurva sederhana, dan tidak tertutup



Gambar 8.9. kurva tidak sederhana dan tertutup



Gambar 8.10. Kurva sederhana dan tertutup

Konsep tersebut erat kaitannya dengan perhitungan panjang kurva bidang. Penentuan panjang kurva bidang mengunakan konsep integral, turunan dan diskritisasi.

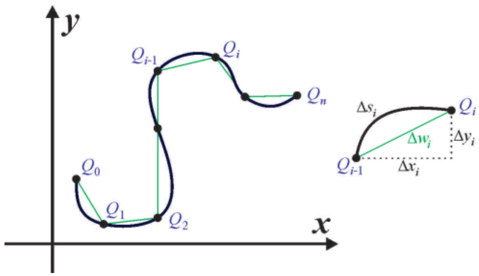
Aplikasi Integral Panjang Kurva Bidang

Ibarat seutas tali tergeletak di atas lantai yang membentuk lengkungan-lengkungan tertentu, untuk mengukur panjang tali tersebut tentu dapat dilakukan dengan mengambil

[22] Dale Varberg, Purcell, and Rigdon.

dan menariknya hingga menjadi lurus, selanjutnya dapat diukur dengan menggunakan alat ukur panjang.

Persoalannya kurva lengkung yang akan diukur panjangnya, tidak dapat dilakukan sebagaimana dengan tali yang teregeletak dilanjtai. Lantas bagaimana cara mengukur panjang dari kurva tersebut yang berada dalam sistem koordinat (x, y)?



Gambar 8.11. Segmen kurva dengan konsep pythagoras

Gambar 8.11 tersebut merepresentasikan suatu kurva lengkung yang terletak pada sistem koordinat kartesius (x, y). **Masalah yang akan diselesaikan pada kurva lengkung tersebut yaitu bagaimana mengukur panjangnya.**

Sebagaimana dengan perhitungan luas yang dibatasi oleh bidang lengkung, atau seperti halnya dengan perhitungan volume benda pejal putar. Prinsip kerja yang dilakukan pada perhitungan panjang kurva yaitu juga dengan melakukan partisi pada daerah asalnya, secara bersama melakukan potongan-potongan kecil pada kurvanya menjadi n −segmen poligon. Setiap segmen tersebut merupakan tali busur yang diukur dengan mengunakan Teorema Pythagoas, tali busur tersebut tidak lain adalah pendekatan pada potongan-potongan yang melengkung pada kurvanya. Dari setiap ruas-ruas poligon tersebut dijumlahkan secara keseluruhan. Agar teraproksimasi secara akurat, maka panjang setiap segmennya dibuat semakin kecil (dilimitkan mendekati nol). Sehingga secara total pertemuan antara limit, dan sigma menghasilkan Integral.

Kemudian, yang menjadi pertanyaan adalah bagaimana bentuk fungsi yang diintegralkan?

1. Bentuk fungsi yang diintegralkan berdasarkan rumus diperoleh dari turunan persamaan parameter yang merepresentasikan kurva.
2. Memandang bahwa setiap potongan panjang busur didekati oleh tali busur dalam bentuk ruas-ruas poligon.
3. Setiap tali busur tersebut dapat dipandang sebagai sisi miring dari segitiga siku-siku sehingga panjang setiap ruas poligon dapat ditentukan dengan rumusan pythagoras.
4. Dari setiap segitiga siku-siku yang dibentuk, merupakan hubungan antara sisi medatar (Δx) dan sisi tegak (Δy), dan sisi miring (Δw) sebagai tali busur atau ruas garis poligon.
5. Sisi mendatar (Δx) dan sisi tegak (Δy) dapat ditentukan dari suatu pasangan persamaan parameter dari x dan y.
6. Hubungan antara persamaan parameter dengan panjang sisi tegak dan sisi mendatar, dapat dinyatakan dalam suatu ekspresi turunan.
7. Turunan dari masing-masing persamaan parameternya terhadap variabel parameter akan menjadi fungsi yang diintegralkan dalam menentukan panjang kurva setiap ruas poligonnya.

Di dalam menghasilkan satu rumusan mengenai perhitungan **panjang kurva** dengan menggunakan integral, perhitungan panjang kurva pada gambar di atas memperoleh rumusan integral sebagai hasil dari beberapa tahapan atau dasar berfikir yang melatarbelakanginya. Dengan menguraikan tahapan-tahapannya kita dapat memahami dasar berpikir, dan hubungan tahapan demi tahapan. Berikut rangkaian penjelasan dan makna dari setiap notasi matematis yang digunakan dalam merumuskan perhitungan panjang kurva:

1. Suatu kurva (x, y) yang dihasilkan dari suatu fungsi utama yaitu $y = f(x)$ yang kontinu pada selang utama $a \leq x \leq b$ dapat direpresentasikan dalam 1 pasang persamaan parameter, yaitu dari (x, y) menjadi $\left(f_1(t), f_2(t)\right)$ yang dapat dituliskan dengan :

$$x = f_1(t) \qquad \text{(VIII.39)}$$

$$y = f_2(t) \qquad \text{(VIII.40)}$$

yang juga terdefinisi pada selang $a \leq t \leq b$

2. Selang utama tersebut dapat dipartisi menjadi n −partisi sub selang yaitu :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Dimana $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

3. Dari sub selang tersebut menghasilkan titik-titik potong yang dipetakan dari x_i yaitu :

$$Q_1, Q_2, Q_3, \cdots, Q_{n-1}, Q_n$$

4. Jika semua titik dihubungkan dari Q_{i-1} ke $Q_i$dengan garis lurus akan membentuk ruas-ruas garis poligon juga sebanyak n —segmen.

5. Setiap ruas garis poligon dapat dipandang sebagai tali busur Δw_i yang dijadikan pendekatan terhadap panjang potongan kurva Δs_i. Disatu sisi, setiap ruas garis poligon dapat dibentuk menjadi segitiga siku-siku yang terhubung dengan. Dari setiap segitiga siku-siku yang dibentuk, merupakan hubungan antara sisi medatar (Δx) dan sisi tegak (Δy), dan sisi miring (Δw) sebagai tali busur atau ruas garis poligon. Sehingga dapat dituliskan ke dalam :

$$\Delta s_i \approx \Delta w_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \qquad \text{(VIII.41)}$$

6. Sebagaimana dengan poin (1), bahwa kurva utama dapat direpresentasikan dengan satu pasang persamaan parameter :

$$x = f_1(t) \qquad \text{(VIII.42)}$$

$$y = f_2(t) \qquad \text{(VIII.43)}$$

7. Sehingga (Δx_i) dapat dipandang sebagai selisih niali fungsi $f_1(t_i) - f_1(t_{i-1})$ demikian halnya dengan Δy_i dapat dinyatakan sebagai $f_2(t_i) - f_2(t_{i-1})$ sehingga rumursan poin (4) dapat dinyatakan dengan :

$$\Delta w_i = \sqrt{\left(f_1(t_i) - f_1(t_{i-1})\right)^2 + \left(f_2(t_i) - f_2(t_{i-1})\right)^2)} \qquad \text{(VIII.44)}$$

8. Apabila setiap persamaan parameter diamati lebih cermat, maka kita akan menemukan hubungan antara persamaan parameter dengan **turunan**nya yaitu

$$\frac{f_1(t_i) - f_1(t_{i-1})}{\Delta t_i} = f_1{}'(\hat{t}_i) \qquad \text{(VIII.45)}$$

$$\frac{f_2(t_i) - f_2(t_{i-1})}{\Delta t_i} = f_2{}'(\hat{t}_i) \qquad \text{(VIII.46)}$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$ (VIII.47)

Atau dapat ditulis kembali menjadi :

$$f_1(t_i) - f_1(t_{i-1}) = f_1{}'(\hat{t}_i)\Delta t_i$$ (VIII.48)

$$f_2(t_i) - f_2(t_{i-1}) = f_2{}'(t_i)\Delta t_i$$ (VIII.49)

9. Dari rumusan poin (5) , dapat ditulis menjadi :

$$\Delta w_i = \sqrt{(f_1{}'(\hat{t}_i)\Delta t_i)^2 + (f_2{}'(\tilde{t}_i)\Delta t_i)^2}$$ (VIII.50)

$$\Delta w_i = \sqrt{\left(f_1{}'(\hat{t}_i)\right)^2 + \left(f_2{}'(\tilde{t}_i)\right)^2}\,\Delta t_i$$ (VIII.51)

Dengan panjang setiap segmen yang ada yaitu : Δw_ia

10. Kita dapat menghitung total panjang polygon sebagai pendekatan panjang kurva mulus secara keseluruhan.

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta w_i$$ (VIII.52)

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(f_1{}'(\hat{t}_i)\right)^2 + \left(f_2{}'(\tilde{t}_i)\right)^2}\,\Delta t_i$$ (VIII.53)

Agar teraproksimasi secara akurat mendekati kurva mulus, maka konsep Riemann dapat kembali digunakan pada bagian ini yaitu panjang setiap segmennya dibuat semakin kecil (dilimitkan mendekati nol).

$$L = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(f_1{}'(\hat{t}_i)\right)^2 + \left(f_2{}'(t_i)\right)^2}\,\Delta t_i$$ (VIII.54)

Sebagaimana dengan konsep Riemann yang telah digunakan sebelumnya, kita kemudian dapat menggunakan Integral

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(f_1{}'(\hat{t}_i)\right)^2 + \left(f_2{}'(t_i)\right)^2}\ dt$$

(VIII.55)

Poin 10 inilah yang merupkan rumusan perhitungan panjang kurva dari 2 persamaan parameter yang diberikan yaitu $x = f_1(t)$ dan $y = f_2(t)$. Serta selang

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

Kasus khusus :

Kasus di atas merupakan kasus umum, dimana yang diberikan pada soalnya berawal dari dua persaman parameter. Namun pada kasus-kasus lain biasanya dalam soal-soal yang berkaitan dengan perhitungan panjang kurva menggunakan integral, yaitu dapat berupa :

Pasangan titik $\boldsymbol{A(x_1, y_1)}$, $\boldsymbol{B(x_2, y_2)}$

Pada kasus yang seperti ini, maka hal yang perlu dipahami adalah mencar panjang atau jarak dari dua titik. Tentunya rumusan umum dalam menentukan jarak, selama ini yang dikenali khususnya dalam Aljabar linear yaitu :

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(VIII.56)

Namun pada pembahasan kali ini, perhitungan jarak kita dekati dengan cara menggunakan integral. Hal-hal yang penting untuk dipahami adalah :

Terlebih dahulu kita membuat persamaan garis lurus dari 2 titik yang diberikan misal.

$$y = mx + c \text{ dimana } m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

(VIII.57)

Dari titik $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ yang diberikan kita dapat menetapkan batasnya yaitu :

$$a = x_1 < x < x_2 = b$$

Dalam menerapkan rumusan integra tersebut, maka kita perlu membuat persamaan parameter yang sesuai dengan fungsi utama yaitu :

$$y = mx + c$$

Dari sini persamaan parameternya dapat dituliskan dengan :

$$x = f_1(t) = t$$

(VIII.58)

$$y = f_2(t) = mt + c \qquad \text{(VIII.59)}$$

Sehingga masing-masing turunannya adalah :

$$\frac{dx}{dt} = f_1'(t) = 1 \qquad \text{(VIII.60)}$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2'(t) = m \qquad \text{(VIII.61)}$$

Sehingga panjang garis lurus tersebut dapat dituliskan dengan :

$$L = \int_a^b \sqrt{(1)^2 + (m)^2}\ dt \qquad \text{(VIII.62)}$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}\right)^2}\ dt \qquad \text{(VIII.63)}$$

$$L = \left[\left(\sqrt{1 + \frac{(y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}\right) t\right]_{x_1}^{x_2} \qquad \text{(VIII.64)}$$

$$L = \left(\sqrt{1 + \frac{(y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}\right)(x_2 - x_1) \qquad \text{(VIII.65)}$$

$$L = \sqrt{1 + \frac{(y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}}\sqrt{(x_2 - x_1)^2} \qquad \text{(VIII.66)}$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \text{(VIII.67)}$$

Kurva $y = f(x)$

Jika persamaan yang diberikan adalah fungsi utama $y = f(x)$, pada selang $a \leq t \leq b$
Dari sini persamaan parameternya dapat dibuat $x = t$
sehingga dituliskan dengan :

$$x = f_1(t) = t$$
$$y = f_2(t)$$

masing-masing turunannya adalah :

$$f_1'(t) = \frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{(VIII.68)}$$

$$f_2'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \qquad \text{(VIII.69)}$$

Maka perhitungan panjang kurva yang digunakan adalah

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; dx \qquad \text{(VIII.70)}$$

Kurva $\boldsymbol{x = g(y)}$
Jika persamaan yang diberikan adalah fungsi utama $x = g(y)$, pada selang $a \leq t \leq b$ Dengan cara yang sama pada bagian (b), maka diperoleh perhitungan panjang kurva yang digunakan adalah :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \; dy \qquad \text{(VIII.71)}$$

8. E. LATIHAN SOAL

Soal Pemahaman Konsep

1. Buktikan secara aljabar bahwa persamaan parameter dari bidang elips memenuhi persamaan elips standar.
2. Buktikan secara aljabar bahwa persamaan parameter dari hiperbola memenuhi persamaan hiperbola standar.
3. Dalam menyelesaiakan masalah integral, khususnya dalam perhitungan panjang kurva, Sebutkan dan Jelaskan secara terurut apa saja kemampuan matematis yang dibutuhkan !
4. Perhitungan panjang kurva dengan menggunakan integral, sebenarnya mempunyai prinsip yang hampir sama dalam perhitungan luas dan volume. Berikan penjelasan, apa saja hal yang sama dan apa hal-hal yang membedakan antara pehitungan panjang kurva dengan perhitungan luas dan volume.

5. Tuliskan kembali, rumusan utama yang digunakan dalam menghitung panjang kurva jika diberikan suatu persamaan dan batas-batas daerah asal kurva.
6. Tuliskan langkah-langkah teknis yang digunakan dalam menyelesaiakan soal perhitungan panjang kurva jika diberikan Persamaan parameter dan batas-batasnya Fungsi dari Kurva utama beserta batasnya

Soal Prosedural

1. Ujilah rumusan perhitungan panjang kurva dengan menggunakan integral, yaitu melalui :
   a. Rumusan keliling lingkaran
   b. Tentukan keliling lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$
   c. Segmen garis dari 2 titik koordinat yang diberikan. (Contoh 4)
2. Tentukan panjang garis dari $A(0,1)$ ke $B(5,13)$ dengan menggunakan konsep persamaan parameter.
3. Carilah panjang kurva $y = x^{1/2}$ mulai dari titik $A(1,1)$ ke titik $B(4,8)$

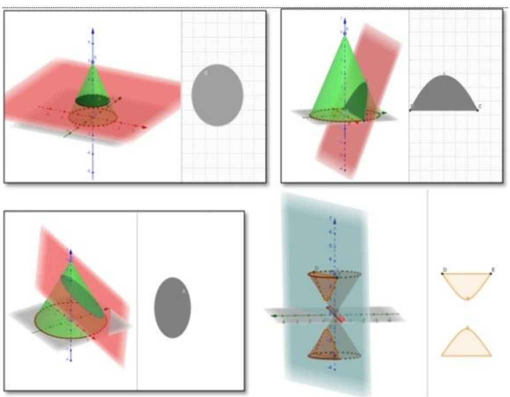
BAB IX. IRISAN KERUCUT DALAM TINJAUAN BUDAYA LOKAL

Kemampuan Akhir Yang Diharapkan

- Mengintegrasikan teori teori irisan kerucut dengan budaya lokal
- Megeksplorasi Lingkaran dengan objek-objek budaya lokal
- Mengeksplorasi irisan kerucut Parabola dengan Objek-Objek Budaya Lokal
- Mengeksplorasi irisan kerucut Elips dengan Objek Budaya Lokal
- Mengintegrasikan irisan kerucut Hiperbola dengan Objek Budaya Lokal
- Mampu melakukan penelitian eksplorasi etnomatematika yang mengintegrasikan ilmu geomeri analitik bidang dengan unsur budaya lokal

9. A. TINJAUAN IRISAN KERUCUT PADA BUDAYA LOKAL

Pada bab sebelumnya, kita telah menelaah konsep teori irisan kerucut, dengan memandang kerucut yang dipotong oleh beberapa bidang yang datar akan nampak beberapa bidang bidang baru yang telah menjadi objek kajian kita. Bentuk lingkaran,parabola, elips, dan hiperbola adalah bentuk bidang irisan kerucut yang dimaksud. Bentuk tersebut sangat sering kita jjumpai dalam keseharian kita dan bahkan menjadi sebuah konsep geometri yang sangat melekat adalm kehidupan manusia. Pada kontstruksi bangunan, peralatan hidup manusia, ataupun benda-benda alam termasuk mahluk hidup sekalipunakan ditemukan bentuk bentuk bentuk geometri yang beragam.



Gambar 9.1. Ilustasi irisan kerucut hasil perpotongan bidang datar

Gambar 9.2. Beragam bentuk geometri ada dalam peradaban manusia
sumber merdeka.com

Ketika kita mencoa melihat dan menelusuri bentuk bentuk peralatan atau sistem hidup warisan budaya Indonesia. Maka akan didapatkan beragam bentuk dan corak yang nampak terlihat dari setip daerah. Bentuk dan corak tersbut menjadi identitas dan sesuatu yang bernilai bagi setiap daerah tersebut. Dengan meninjau teori teori irisan kerucut pada setiap benda warisan budaya, maka setidaknya kita bisa dapat menemukan bentuk konsep tersebut secara realistis .

Nah bab 8 ini, kita akan mencoba melihat menelaah kembali teori teori irisan kerucut dengan mencoba mengeksplor sebagian dari budaya lokal yang ada sehingga akan terbentuk suatu pemahaman imaginatif konstruktif yang terinterpadu pada sarat nilai –nilai pelestarian budaya lokal. Budaya lokal yang dimaksudkan adalah budaya khas suku bugis Sulawesi Selatan.

Kekayaan budaya bugis bukanlah suatu hal yang bisa di pandang sebelah mata, Peradaban bugis yang ditemukan tersebar luas hampir di seluruh pelosok dunia, menjadi bukti bahwa suku bugis memiliki peradaban yang besar dimasa lalu. Besarnya peradaban menyisakan beberapa warisan warisan yang diturunkan dari generasi ke generasi oleh nenek moyang bugis. Kebudayaan bugis memiliki ciri khas tersendiri baik dari sistem hidup,peralatan hidup dan objek-objek budaya lainnya, yang memiliki corak budaya yang menarik tersendiri bagi budayawan.

Akulturasi budaya luar dan perkembangan teknologi modern berdampak pada terurainya aspek kebudayaan lokal, beralihnya sistem peralatan hidup yang sudah berkembang sejak nenek moyang dahulu banyak tergantikan dengan sistem peralatan

peralatan baru yang lebih canggih dan praktis walaupun sebenarnya, sebagianpun masih bertahan hingga saat sekarang ini. Sebagian kecil masyarakat bugis masih menyimpan atau bahkan masih menggunakan warisan yang ada tersebut, tetapi sudah banyak dari bentuknya yang diperbaharui atau bahkan di ubah kedalam bentuk yang lebih modern. Untuk menemukan beberapa waisan kebudayaan bugis beberapa Museum juga menyajikan koleksinya diantaranya adalah Museum La Galigo yang menyajikan beragam koleksi budaya, prasejarah,keramik, etnografi serta benda benda yang di gunakan oleh beberapa suku, termasuk suku bugis.

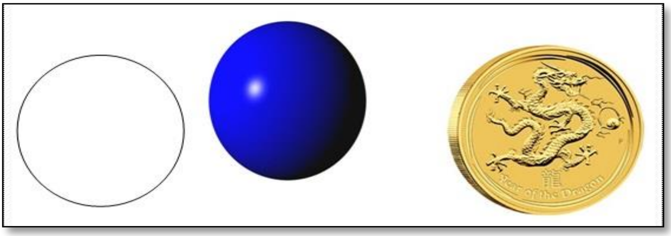
Gambar 9.3. Beberapa benda budaya bugis koleksi dari Meseum La Galigo
Sumber : Tunawisma.com

Nampak terlihat beberapa peralatan buduya bugis yang di tampilkan di meseum tersebut memiliki beragam bentuk dan ciri khas bugis tersendiri. Bahkan jika di kaitkan dengan objek pembahasan kita sebelumnya beberapa benda tersebut memiliki bentuk yang menyerupai irisan kerucut. Bab ini akan mencoba mengimajinasi bentuk bentuk geometrinya sehingga kita megintegrasikan objek objek tersebut sebagai bagian dari bentuk bentuk irisan kerucut.

9. B. LINGKARAN DALAM BUDAYA LOKAL

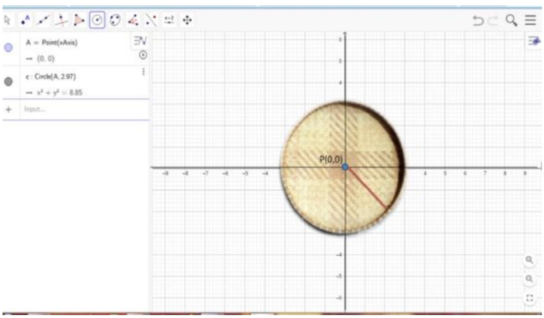
Dalam kehidupan kita sehari-hari kita sering menjumpai bangun yang permukaannya atau irisannya berupa lingkaran atau bidang lingkaran. Pada konsep Euclid kita memaknai lingkaran sebagai sosok bidang yang dibatasi oleh garis lengkung dan sedemikian rupa sehingga semua garis lurus yang ditarik dari titik tertentu di dalamya ke garis pembatas adalah sama. Garis pembatas itu adalah kelilingnya dan titik yang berada di bagian dalam dari garis melenggkung tersebut adalah titik pusatnya.

Dalam kebudayaan suku bugis bentuk lingkaran biasanya disebut dengan kata "*Malebu*" yang juga semakna dengan arti kata bundar dan juga kata bulat dalam bahasa bugis. Maknanya yang berbeda dalam satu kata yang sama, pada dasarnya memiliki satu konsep yang saling berhubungan. Dalam ilmu matematika lingkaran adalah objek dengan bentuk dua dimensi dengan garis yang melengkung sempurna pada satu titik, bulat adalah objek dengan bentuk yang bervolume menyerupai bola, dibangun oleh bidang lingkaran yang diputar pada suatu sumbu putar di titik pusatnya, sedangkan bundar adalah objek dengan bentuk bervolume menyerupai cakram pipih yang dibangun dari bidang lingkaran yang lipat gandakan. ini memunculkan sebuah penafsiran bahwa kesamaan penamaan benda ini didasarkan pada pengamatan pola konstrksi yang sama yang di tinjau oleh masyarakat suku bugis terdahulu.



Gambar 9.4. Ilustrasi perbedaan lingkaran, bulat, dan bundar

Banyak sekali bentuk- bentuk objek *Malebu* yang bisa ditinjaudari kebudayaan bugis, semisal contoh peralatan rumah tangga nenek moyang masyarakat suku bugis dibawah ini



Gambar 9.5. Pattapi pada Geogebra

Apakah kalian masih kenal dengan benda ini ?, Benda ini benda ini dinamai dengan sebutan *"Pattapi",* yaitu peralatan rumah tangga masyarakat bugis yang bentuk dasarnya adalah lingkaran yang sempurna terbuat dari anyaman bambu. Umumnya masyarakat bugis menggunakannya untuk menapis beras yang sudah di tumbuk(*Inampu'*) pada proses pemisahan kulit padi dari beras, sebenarnya dibeberapa daerah juga memiliki alat penapis beras tetapi bentuk penapis khas bugis ini bentuknya lebih lebar (*Malabba'*) dengan panjang diameter Pattapi umumnya ditemukan adalah ±1 meter.

Pada bentuk yang disajikan dapat diamati sebuah pattapi yang di koordinatkan pada Ruang kartesian R2, nampak terlihat bahwa titik pusat lingkaran pada Pattapi berada di titik P (0,0) yang masing masing memiliki jarak yang sama ketika di hubungkan titik tersebut dengan tiap tiap titik di garis melengkung pattapi tersebut. Sehingga dengan yakin kita menyebut bahwa benda tersebut adalah berbentuk lingkaran.Masih banyak lagi benda benda yang berkaitan dengan aspek budaya lokal bugis yang mengandung irisan kerucut ini diantaranya "*Assurabengeng*"(cetakan kue surabeng khas bugis), "*Gellang bodo"* (peralatan rias pengantin wanita bugis), dan "*Saraung"* (topi khas petani bugis) dan lain lain sebagainya.

Gambar 9.6. Assurabengeng

Gambar 9.7. Gellang bodo

Gambar 9.8. Saraung

9. C. PARABOLA DALAM BUDAYA LOKAL

Sebagaimana yaang diketahui bahwa Parabola dideskripsikan sebagai sebuah kurva bidang yang simetris cermin yang dianalogikan bentuknya menyerupai bentuk hurup "U" atau jika kita meninjaunya sebagai bagian dari permukaan kerucut, parabola dibentuk dari persimpangan permukaan kerucut lingkaran kanan dan bidang sejajar dengan bidang lain yang bersinggungan dengan permukaan kerucut.

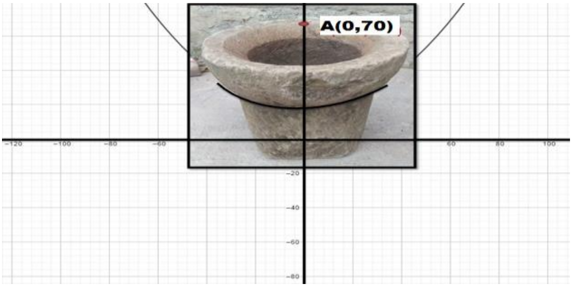
Apollonius adalah seorang ahli geometri dan astronom yunani hidup pada sekitaran abad 1-2 M dalam karyanya tentang konsep irisan kerucut konon katanya adalah orang pertama yang menamai kurva bidang tersebut dengan sebutan Parabola yang sebelumnya telah ditemukan konsepnya oleh Manaechmus sekitaran abad ke-4 SM.

Dalam kebudayaan bugis tidak ditemukan istilah khusus untuk menamai kurva bidang tersebut, tetapi penggunaan bentuk ini sudah banyak di temukan pada objek objek peradaban masyarakat bugis kuno, sebagai contoh dibawah ini

Gambar 9.9. Gapura Teddung Pulaweng (Bone)
Sumber : koraadnan.blogspot.com

Dibangun puluhan tahun lalu untuk mengenang sejarahnya, gapura Teddung Pulaweng (Payumg emas) ini terletak di jalan Ratulangi Watampone, sebagai gerbang pintu masuk ke Bola Soba dan kantor pariwisata dan kebudayaan Bone. Puncak gapura tersebut berbentuk payung memiliki history tersendiri di kalangan masyarakat kebudayaan bugis khususnya masyarakat bugis Bone. Bentuk tersebut terlihat menyerupai paraboloida yang terbuka ke bawah. Sebagaimana konsep Geometri ruang Paraboloida ini di kontruksikan dari perputaran kurva bidang parabola pada sumbu utamanya akan menghasilkan sebuah ruang Paraboloida.

Pada objek lain dapat pula di temukan bentuk bentuk parabola seperti pada gambar berikut



Gambar 9.10. Ilustrasi *Palungeng batu* pada kordinat kartesius R2

Pada gambar Kordinat kartesius nampak terlihat bahwa sebuah Palungeng Batu. Alat ini merupakan peralatan rumah tangga masyarakat suku bugis tempo dulu terbuat dari batu yang di pahat, digunakan dalam menghaluskan rempah rempah masakan seperti ketumbar, jahe, merica dan bumbu-bumbu lainya.

Palungeng Batu memiliki bentuk kepala yang berbentuk paraboloida terbuka keatas, terlihat pada iilustrasi gambar sebuah Palungeng Batu pada koordinat cartesian memiliki titik fokus di titik A(0,70)sehingga kita dapat menentukan garis direktrisnya y = -70. Titik A pada kartesian tersebut menjadi modal untuk mendefinisikan bentuk kepala palungeng batu tersebut. dengan meninjau bahwa tiap tiap titik lintasan parabola memiliki jarak yang sama pada setiap jaraknya dari titik fokus dan juga jaraknya denagn titik plotnya di garis tetap atau garis direktrisnya (y = -p), atau sama saja dikatakan dengan eksentrisitasnya (e = 1).

Maka dengan membayangkan menentukan satu titik fokus di sebarang koordinat, maka kita dapat membuat kepala *Palungeng Batu* dengan bentuk parabola yang sempurna yang selanjutnya, parabola yang sempurna diputar pada sumbu utamanya akan membentuk sebuah Paraboloida sempurna pula. Dan masih banyak lagi objek objek budaya lokal yag bisa kita jelajahi kaitannya dengan bentuk irisan kerucut Parabola. seperti tutup Bosara, alat musik Jalappa, alat permainan tradisional khas bugis Majjekka Capeng dan lain lain sebagainya.

Sebagaimana yaang diketahui bahwa Parabola dideskripsikan sebagai sebuah kurva bidang yang simetris cermin yang dianalogikan bentuknya menyerupai bentuk hurup “U” atau jika kita meninjaunya sebagai bagian dari permukaan kerucut, parabola dibentuk dari persimpangan permukaan kerucut lingkaran kanan dan bidang sejajar dengan bidang lain yang bersinggungan dengan permukaan kerucut.

Apollonius adalah seorang ahli geometri dan astronom yunani hidup pada sekitaran abad 1-2 M dalam karyanya tentang konsep irisan kerucut konon katanya adalah orang pertama yang menamai kurva bidang tersebut dengan sebutan Parabola yang sebelumnya telah ditemukan konsepnya oleh Manaechmus sekitaran abad ke-4 SM.

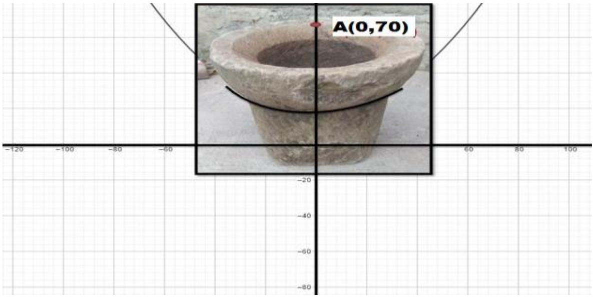
Dalam kebudayaan bugis tidak ditemukan istilah khusus untuk menamai kurva bidang tersebut, tetapi penggunaan bentuk ini sudah banyak di temukan pada objek objek peradaban masyarakat bugis kuno, sebagai contoh dibawah ini

Gambar 9.11. Gapura Teddung Pulaweng (Bone)

Sumber : koraadnan.blogspot.com

Dibangun puluhan tahun lalu untuk mengenang sejarahnya, gapura Teddung Pulaweng (Payumg emas) ini terletak di jalan Ratulangi Watampone, sebagai gerbang pintu masuk ke Bola Soba dan kantor pariwisata dan kebudayaan Bone. Puncak gapura tersebut berbentuk payung memiliki history tersendiri di kalangan masyarakat kebudayaan bugis khususnya masyarakat bugis Bone. Bentuk tersebut terlihat menyerupai paraboloida yang terbuka ke bawah. Sebagaimana konsep Geometri ruang Paraboloida ini di kontruksikan dari perputaran kurva bidang parabola pada sumbu utamanya akan menghasilkan sebuah ruang Paraboloida.

Pada objek lain dapat pula di temukan bentuk bentuk parabola seperti pada gambar berikut



Gambar 9.12. Ilustrasi *Palungeng batu* pada kordinat kartesius R2

Pada gambar Kordinat kartesius nampak terlihat bahwa sebuah Palungeng Batu. Alat ini merupakan peralatan rumah tangga masyarakat suku bugis tempo dulu terbuat dari batu yang di pahat, digunakan dalam menghaluskan rempah rempah masakan seperti ketumbar, jahe, merica dan bumbu-bumbu lainya.Palungeng Batu memiliki bentuk kepala yang berbentuk paraboloida terbuka keatas, terlihat pada iilustrasi gambar sebuah Palungeng Batu pada koordinat cartesian memiliki titik fokus di titik A(0,70)sehingga kita dapat menentukan garis direktrisnya $y = -70$. Titik A pada kartesian tersebut menjadi modal untuk mendefinisikan bentuk kepala palungeng batu tersebut. dengan meninjau bahwa tiap tiap titik lintasan parabola memiliki jarak yang sama pada setiap jaraknya dari titik fokus dan juga jaraknya denagn titik plotnya di garis tetap atau garis direktrisnya ($y = -p$), atau sama saja dikatakan dengan eksentrisitasnya ($e = 1$).

Maka dengan membayangkan menentukan satu titik fokus di sebarang koordinat, maka kita dapat membuat kepala Palungeng Batu dengan bentuk parabola yang sempurna yang selanjutnya, parabola yang sempurna diputar pada sumbu utamanya akan membentuk sebuah Paraboloida sempurna pula. Dan masih banyak lagi objek objek budaya lokal yag bisa kita jelajahi kaitannya dengan bentuk irisan kerucut Parabola. seperti tutup Bosara, alat musik Jalappa, alat permainan tradisional khas bugis Majjekka Capeng dan lain lain sebagainya.

Gambar 9.13. Tutup Bosara
Sumber : id.carousell.com

Gambar 9.14. Jalappa/Kancing-kancing
Sumber : apologiku.com

Gambar 9.15. Capeng

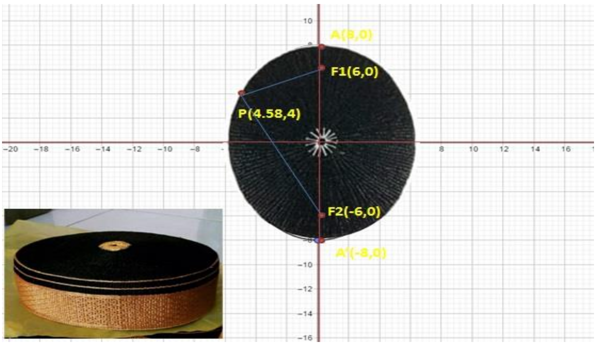
9. D. ELIPS DALAM BUDAYA LOKAL

Elips biasa juga disebut oval, bentuknya menyerupai lingkaran yang telah di panjangkan kesatu arah. Dalam kamus besar bahasa indonesia (KBBI) kata Elips di artikan sebagai benda atau bidang datang datar yang berbentuk bundar lonjong. Dalam kebudayaan suku Bugis, bentuk bidang ini tidaklah asing ditemukan, Masyarakat bugis umumnys menyebut bentuk Elips dengan sebutan penamaan "Malibu Malampe", yaitu berasal dari 2 kata Malibu dan Malampe, kata Malibu yang artinya lingkaran,bulat, atau bundar dan kata Malampe artinya panjang. Jadi Malibu Malampe semakna dengan pengertian elips yaitu benda atau bidang datar yang berbentuk bundar lonjong. Contoh bentuk elips dapat dilihat dari berbagai macam objek yang berkaitan dengan warisan budaya lokal semisal contoh berikut ini.

Gambar 9.16. Peringatan hari jadi Bone ke-689 menampilkan icon songkok Recca raksasa

Sumber : makassar.tribunnews.com

Songkok Recca disebut juga “Songkok To Bone“ terbuat dari pelepah lontar yang di pukul-pukul (dalam bahasa bugis: di recca-recca) kemudian sisanya akan menghasilkan serat lontar yang bisa di anyam menjadi songkok. Bentuk songkok ini sepintas permukaannya terlihat bundar rapi ketika dikenakan di kepala, namun sejatinya bentuk dasarnya adalah menyerupai bundar lonjong (Elips). Untuk membuktikannya coba perhatika dengan saksama bentuk ilustrasi Songkok Recca ini di koordinat kartesius.



Gambar 9.17. Ilustrasi *Songkok Recca* pada koordinat kartesius

Dengan melihat gambar diatas nampak Songkok Recca dibangun oleh sebuah penampang berbentuk elips yang dilipat gandakan. Untuk membentuk elips yang sempurna pada permukaan Songkok Racca, Kita bisa bayangkan terlebih dahulu menentukan 3 titik sebarang yaitu titik fokus 1, fokus 2 dan satu sebarang titik elips sebagai patokan besar elips nantinya. Jalankan satu titik sebarang tersebut pada media yang digunakan dengan memperhatikan definisi elips yang di artikan sebagai sebaran titik yang memiliki jumlah jarak antara jaraknya dengan titik fokus F1 ditambah jaraknya dengan titik fokus F2, memiliki jumlah yang konstan untuk tiap-tiap titik tersebut yaitu 2A atau sama dengan jarak antara kedua titik puncak elips |A,A'|.

Masih banyak lagi benda benda khas kebudayaan masyarakat bugis yang berhubungan dengan bentuk bentuk Elips, Seperti Bangkarata'toe yaitu pusaka kuno kerajaan Gowa berupa perhiasan anting emas berbentuk Elips pipih ,atau Abburoncongeng yaitu cetakan Buroncong kue khas bugis yang mengandung bentuk elips, Kulau Bessi yaitu pusaka bugis sejenis batu mulia bentuk umumnya juga adalah elipsoida yang sebagian masyarakat bugis menyakini sebagai benda sakral, dan lain-lain sebagainya.

Gambar 9.18. Bangkarata'roe
Sumber : gosulsel.com

Gambar 9.19. Pabburoncongeng
Sumber : Jualo.com

Gambar 9.20. Kulau Bessi
Sumber: juba-mota-bassi.business.site

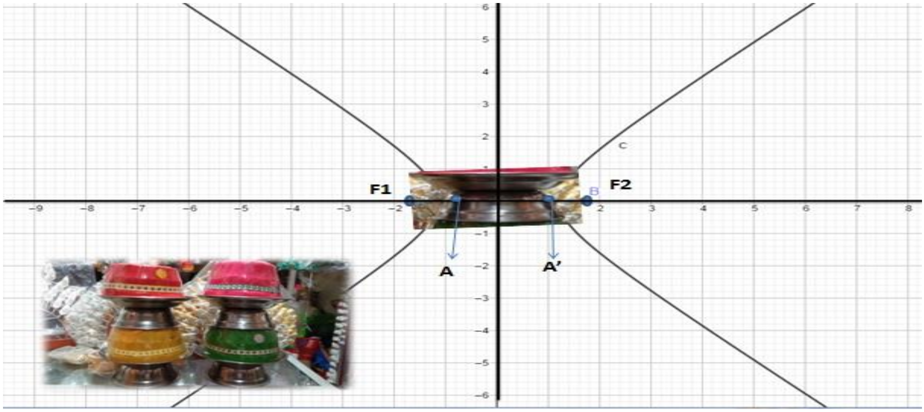
9. E. HIPERBOLA DALAM BUDAYA LOKAL

Setelah mempelajari bab sebelumnya, diperoleh pemahaman bahwa bentuk hiperbola digambarkan sebagai kurva yang terbuka dengan dua cabang yang saling berlawanan dan simetri, kedua cabang tersebut tidak akan mempertemukan kurva tersebut, antara cabang satu mencerminkan cabang kedua, yang satu sama lain saling mencerminkan. Pada tinjauan budaya lokal, tidak ditemukan penggunaan bahasa bugis khusus untuk menamai jenis kurva ini , tetapi kita bisa mencoba menelususri dan menemukan bentuk hiperbola dari beberapa benda benda warisan kebudayaan bugis seperti contoh dibawah ini.

Gambar 9.21. *Bosara* (Wadah sajian kue masyarakat bugis)

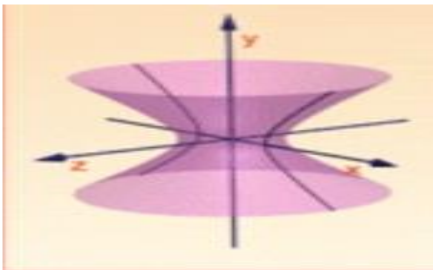
Sumber : shopee.co.id

Bosara didesign mirip dua buah piring yang di rekatkan pada setiap permukaannya secara berlawanan. Ketika di pandang dari satu arah secara horisontal pada Bosara yang berdiri tegak lurus, maka akan nampak suatu bentuk kurva yang menyerupai hiperbola, Pada sistem kordinat kartesius kita bisa mengilustrasikannya sebagai berikut



Gambar 9.22. ilustrasi *Bosara* pada koordinat kartesius R2

Bentuk hiperbola akan tampak terlihat berada pada gagang pegangan kaki Bosara jika dipandang di sistem koordinat R2, dengan memperhatikan dengan saksama bisa kita amati bahwa bentuk bosara ini menyerupai hiperbola daun satu (hiperboloida) yaitu akibat dari sebuah hiperbola pada suatu bidang yang di putar pada sumbu minornya atau sumbu sekawannya.



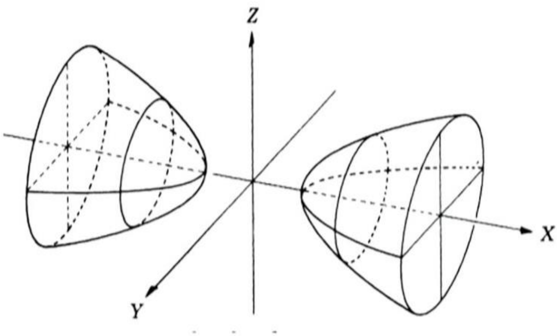
Gambar 9.23. Gambar 8.16 Hiperboloida Pada sistem koordinat kartesius R3

Dengan membayangkan salah satu atau kedua titik fokus F1 dan F2 dari ilustrasi gambar 8.15 di dekatkan maka akan terbentuk bosara yang memiliki talang yang "luas" karena panjang lotus rektumnya semakin pendek begitupun sebaliknya talang bosara akan "sempit" apabila di jauhkan dengan catatan jarak titik fokus dengan titik puncaknya (|F1,A| dan |F2A'|) tetap konsisten rentang jarak masing-masing keduanya.

Objek lain dalam bentuk irisan kerucut yang sama dapat kita perhatikan contoh gambar berikut

Gambar 9.24. Ilustrasi Bentuk hiperbola pada "Bubu'"

Bubu di design oleh masyarakat suku bugis untuk menjebak ikan, dengan bentuk tabung memiliki dua mulut rongga yang terbuka dan masing masing diselipkan sebuah jebakan ikan untuk menampung ikan yang terpancing masuk kedalam Bubu'. Dengan memperhatikan ilustrasi gambar 8.17 bentuk jebakan yang dipasang pada rogga tabung Bubu,maka akan terlihat sebuah bentuk kurva hiperbola yang diambil dari sketsa perangkat jebakannya. yang kemudian dapat dibayangkan bahwa kurva hioerbola tersebut diputar pada sumbu utamanya (sumbu mayor) maka akan terbentuk konstruksi perangkat jebakan didalam tabung tersebut yang menyerupai hiperboloida berdaun dua.



Gambar 9.25. Hiperboloida berdaun dua pada Kartesius R3

Masih banyak lagi objek warisan budaya lokal yang bisa kita telusuri dan jadikan sebagai sebuah objek kajian , terlepas dari semua itu tidak lain adalah juga merupakan bentuk penanaman nilai nilai pelestarian budaya lokal khususnya warisan budaya bugis.

Pentingnya arti budaya sepantasnya mensyaratkan setiap ahli cabang ilmu punya peran serta dalam pengkajian dan pengeksplorasian budaya, pengkajian budaya memberi sinyal akan keberartian suatu ilmu pada kebutuhan suatu masyarakat. Budaya menjadikan kita berada dan terbentuk, mencintai budaya adalah bagian dari menghargai diri.

9. F. PENUGASAN RESEARCH PROJECT

1. Lakukan identifikasi unsur-unsur budaya lokal yang searah dengan konsep-konsep teoritis dalam Geometri Analitik Bidang.
2. Lakukan eksplorasi artikel penelitian yang berkaitan dengan etnomatematika yang mengintegrasikan ilmu matematika secara khusus dalam bidang geometri dengan Budaya lokal.
3. Rancanglah satu penelitian eksplorasi etnomatematika yang mengintegrasikan unsur-unsur budaya lokal dengan konsep, teori ataupun cara penyelesaian masalah dalam Geometri Analitik Bidang.

DAFTAR PUSTAKA

Atmanto, Nugroho Eko, ‘Relevansi Konsep Fajar Dan Senja Dalam Kitab Al-Qanun Al-Mas’Udi Bagi Penetapan Waktu Shalat Isya Dan Subuh’, *Analisa*, 19 (2012), 95–105

Ayme, Jean-louis, ‘Sawayama and Th ´ Ebault ’ s Theorem’, 3 (2003), 225–29

Baki, Adnan, ‘Al Khawarizmi’s Contributions to The Science of Mathematics : Al Kitab Al Jabr Wa’l Muqabalah’, *Journal of Islamic Academy of Sciences*, 5.3 (1992), 225–28 <https://doi.org/10.1088/0031-9120/2/6/301>

Dale Varberg, Edwin J. Purcell, and Steve Rigdon, *Calculus, 9th Edition* (Prentice Hall, Inc, 2006)

Fitzpatrick, Richard, *Euclid’s Elements of Geometry*, *Science*, 2007, IV <https://doi.org/10.1126/science.4.85.201>

Hohenwarter, Markus, and Keith Jones, ‘Ways of Linking Geometry and Algebra, the Case of Geogebra’, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27.3 (2007), 126–31

Kohar, Abdul, ‘Pemikiran Hisab Rukyah Abu Raihan Al Birui’, *Jurnal Pemikiran Hukum Islam*, 14.1 (2018), 63–79

Nabirahni, David M., Brian R. Evans, and Ashley Persaud, ‘Al-Khwarizmi (Algorithm) and the Development of Algebra’, *Mathematics Teaching-Research Journal*, 11.12 (2019), 13–17

De Risi, Vincenzo, ‘The Development of Euclidean Axiomatics: The Systems of Principles and the Foundations of Mathematics in Editions of the Elements in the Early Modern Age’, *Archive for History of Exact Sciences*, 70.6 (2016), 591–676 <https://doi.org/10.1007/s00407-015-0173-9>

Rizki, Nanda Arista, *Analytic Geometry (Geometri Analitik)*, 2018

Sakirman, ‘Memahami Konsep Dasar Gerak , Bentuk Dan Ukuran Bumi Studi Analisis Kitab Al-Qanun Al-Mas’udi Karya Al-Biruni Dalam Konteks Hukum Islam’, *Al Istinbath : Jurnal Hukum Islam*, 2.1 (2017), 2548–3382

Sprague, Rosamond Kent, and W. K. C. Guthrie, ‘A History of Greek Philosophy. Vol. I: The Earlier Presocratics and the Pythagoreans’, *The Classical World*, 1963, 182 <https://doi.org/10.2307/4345078>

Suprapto, Nunuk Sulistyanigrum, ‘Nilai Islam Dalam Theorema Phytagoras’, *Jurnal Pendidikan Matematika*, 2.2 (2019)

<https://doi.org/http://dx.doi.org/10.21043/jpm.v2i2.6360>

Teia, Luis, ‘Geometry of the 3D Pythagoras’ Theorem’, *Journal of Mathematics Research*, 8.6 (2016), 78 <https://doi.org/10.5539/jmr.v8n6p78>

INDEKS

A

E

H

I

K

L

P

RIWAYAT PENULIS

Zulfiqar Busrah, S.Si., M.Si adalah seorang dosen Tadris Matematika Fakultas

Tarbiyah IAIN Parepare terhitung sejak Januari 2018, lahir di Tanuntung Bulukumba 01 Oktober 1989. Dalam Riwayat Pendidikannya, tahun 2001 tamat di SD 253 Tanuntung, kemudian melanjutkan pendidikannya di SMP Negeri 1 Herlang dan lulus pada tahun 2004. Pada tahun yang sama, dia melanjutkan pendidikan pada tingkat menengah atas di SMA Negeri 1 Herlang dan lulus pada tahun 2007. Kemudian masuk pada Perguruan Tinggi Universitas Hasanuddin (Unhas) tepatnya pada Program Studi Matematika Fakultas MIPA pada tahun 2007 dan menyelesaikannya pada tahun 2011. Satu tahun berikutnya, dia melanjutkan Pendidikannnya pada Sekolah Pascasarjana Program Studi Matematika Terapan Institut Pertanian Bogor (IPB) dan menyelesaikannnya pada bulan oktober 2014. Dalam menjalankan studinya di IPB tepat pada semester III (2013) dia diamanahkan sebagai asisten dalam Praktikum Matematika Komputasi. Pada tahun 2015, penulis memulai profesinya sebagai dosen tetap pada Perguruan Tinggi Swasta Universitas Cokroaminoto Palopo pada Program Studi Teknik Informatika Fakultas Teknik Komputer. Dalam perjalanan karirnya sebagai tenaga pengajar diamanahkan mengampu Mata kuliah Sistem Informasi Geografis (SIG), Pengolahan Citra Digital (PCD), Kriptografi, dan Fisika Komputasi.

Pada Kemetrian Agama satuan kerja IAIN Parepare Fakultas Tarbiyah Program Studi Tadris Matematika. Dalam kesempatan ini, penulis menggeluti kembali Ilmu Matematika dengan mengampuh Mata Kuliah, Kalkulus, Geometri Analitik Bidang, Persamaan Diferensial, Metode Numerik dan Matematika Komputasi. Terkhusus dalam mata kuliah Geometri Analitik Bidang, penulis berinisiatif membuat buku ajar yang dapat digunakan sebagai pegangan Mahasiswa agar pembelajaran berjalan secara terarah, sistematis dan komprehensif.

Buku ini merupakan output dari pengkajian dan pendalaman kebutuhan bahan kajian mata kuliah Geometri Analitik Bidang. Dalam penyusunannya, penulis mengintegrasikan pembelajaran, penugasan dan hasil penelitian. Buku ini diharapkan dapat berkontribusi dalam membentuk kemampuan berpikir praktis, analitis, skeptis, kritis, dan sistematis bagi para pengguna.

Buku Geometri Analitik Bidang ini tersusun atas 9 bab yang memadukan pemaparan konsep secara teoritis, pembentukan persamaan-persamaan dalam irisan kerucut, dan penyelesaian contoh soal secara proedural. Buku ini juga didukung oleh pemanfaatan Aplikasi GeoGebra di dalam mengeksplorasi perpaduan geometri dan aljabar. Dalam rangka meningkatkan keampuan pengguna dalam sajian-sajian materi yang diberikan, setiap bab disertai dengan latihan soal yang menghendaki kemampuan pengguna dalam memahami konsep, dan menggunakannya dalam penyelesaian yang bersifat prosedural.

Adapun judul dari buku ini :

Geometri Analitik Bidang : Integrasi teori, Komputasi GeoGebra dan Budaya Lokal.

Susunan bab dalam buku ini disusun secara sistematis, yang tersusun atas :

- **Pendahuluan**
- **Sistem Koordinat Kartesius**
- **Titik, Garis, dan Bidang**
- **Lingkaran**
- **Parabola**
- **Elips**
- **Hiperbola**
- **Persamaan Parametrik**
- **Irisan Kerucut dalam Tinjauan Budaya Lokal**