TEORI GRAF DAN APLIKASINYA

Penulis

Buhaerah

Zulfiqar Busrah

Herlan Sanjaya

Penerbit

Living Spiritual Quotient

TEORI GRAF DAN APLIKASINYA

Tim Penulis:
Dr. Buhaerah, M.Pd.
Zulfiqar Busrah, M.Si.
Herlan Sanjaya, S.Kom.

Penerbit

LSQ
Living Spiritual Quotient

2022

TEORI GRAF DAN APLIKASINYA

Hak Cipta @ **buhaerahzulfiqarbusrahherlansanjaya**

Perpustakaan Nasional Katalog Dalam Terbitan

Pertama kali diterbitkan dalam bahasa indonesia
LSQ Makassar Januari 2022

Penulis : **Dr. Buhaerah, M.Pd.**
Zulfiqar Busrah, M.Si.
Herlan Sanjaya, S.Kom.
Layout : LSQ
Design : LSQ
Penerbit : LSQ

ISBN: **978-602-1308-54-7**

Teori Graf dan Aplikasinya/ /LSQ Makassar/ Makassar, 2022.
23 x 15.5 cm

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit.

KATA PENGANTAR

Pertama-tama perkenankan saya memanjatkan puji syukur yang setinggi-tingginya kepada Allah SWT, oleh karena berkat rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulisan buku yang berjudul Teori Graf dan Aplikasinya, berhasil rampung dan diselesaikan dengan baik. Buku ini merupakan bahan ajar penulis yang sudah tersusun sistemati per pertemuan, sehingga mempermudah para penulis dalam mengajar dan mahasiswa dalam mengkajinya.

Teori Graf atau teori grafik dalam matematika dan ilmu komputer merupakan cabang kajian yang mempelajari sifat-sifat graf atau grafik. Graf merupakan sekumpulan objek terstruktur dimana beberapa pasangan objek mempunyai hubungan atau keterkaitan.

Teori Graf ini pertamakali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss, Leonhard Euler, dalam sebuah artikel ilmiah yang berjudul “Seven Brdiges of Konigsberg” yang membahas ada atau tidaknya struktur yang saat ini dikenal sebagai sirkuit Euler pada graf keterhubungan daratan kota Konigsberg dan pulau kecil ditengah sungai Pregel yang dihubungkan oleh tujuh buah jembatan.

Disiplin ilmu teori Graf, akhirnya mendapat perhatian serius setelah seratus tahun berlalu. Ilmu ini menjadi bahan penelitian ilmuwan dan menjadi topik yang sangat panas diperbincangkan matematikawan-metamatikawan besar pada zaman itu.

Pada abad keduapuluh, para saintis menemukan banyak manfaat dari teori graf di bidang-bidang lain seperti ilmu komputer, kimia teoritik, transportasi, dan lain-lain.

Kehadiran buku ini, selain membantu para mahasiswa dalam mengkaji teori graf, juga akan membantu mereka dalam penggunaan atau mengaplikasikan dalam bidang keilmuan lainnya.

Kepada semua pihak, khususnya penerbit LSQ yang telah membantu merampungkan dan memungkinkan penerbitan buku ini, tidak lupa pula penulis ucapkan terima kasih. Akhirnya kepada para mahasiswa dan akademisi yang tertarik untuk memiliki buku ini, penulis menghaturkan apresiasi yang tinggi.

Parepare, 24 Januari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

PERTEMUAN 1

PERTEMUAN I

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Pengetahuan Dasar Graf

II. Sasaran Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami sejarah teori graf
2. Mahasiswa memahami pengertian graf
3. Mahasiswa memahami graf hingga dan graf tak hingga

III. Ringkasan Materi

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal di Eropa. Kurang lebih seratus tahun setelah lahirnya tulisan Euler tersebut tidak ada perkembangan yang berarti berkenaan dengan teori graf.

Tahun 1847, G.R. Kirchoff (1824 - 1887) berhasil mengembangkan teori pohon (*Theory of trees*) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Cayley (1821 - 1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan permasalahan kimia yaitu hidrokarbon.

Pada masa Kirchoff dan Cayley juga telah lahir dua hal penting dalam teori graf. Salah satunya berkenaan dengan konjektur empat warna, yang menyatakan bahwa untuk mewarnai sebuah atlas cukup dengan menggunakan empat macam warna sedemikian hingga tiap negara yang berbatasan akan memiliki warna yang berbeda.

Para ahli teori graf berkeyakinan bahwa orang yang pertama kali mengemukakan masalah empat-warna adalah A.F. Mobius (1790p - 1868) dalam salah satu kuliahnya di tahun 1840. Sepuluh tahun kemudian, A. Demorgan (1806 - 1871) kembali membahas masalah ini bersama ahli-ahli matematika lainnya di kota London. Dengan demikian tulisan Demorgan dianggap sebagai referensi pertama berkenaan dengan masalah empat-warna. Masalah empat-warna ini menjadi sangat terkenal setelah Cayley mempublikasikannya tahun 1879 dalam *Proceeding of the Royal Geographic Society* volume pertama.

Hal yang penting untuk dibicarakan sehubungan dengan perkembangan teori graf adalah apa yang dikemukakan oleh Sir W.R. Hamilton (1805 - 1865). Pada tahun 1859 dia berhasil menemukan suatu permainan yang kemudian dijualnya ke sebuah pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut dari kayu berbentuk *dodecahedron* beraturan yakni berupa sebuah polihedron dengan 12 muka dan 20 pojok. Tiap muka berbentuk sebuah pentagon beraturan dan tiap pojoknya dibentuk oleh tiga sisi berbeda. Tiap pojok dari *dodecahedron* tersebut dipasangkan dengan sebuah kota terkenal seperti London, New York, Paris, dli. Masalah dalam permainan ini adalah, kita diminta untuk mencari suatu rute melalui sisi-sisi dari dodecahedron sehingga tiap kota dari 20 kota yang ada dapat dilalui tepat satu kali. Walaupun saat ini masalah tersebut dapat dikategorikan mudah, akan tetapi pada saat itu tidak ada seorangpun yang bisa menemukan syarat perlu dan cukup dari eksistensi rute yang dicari.

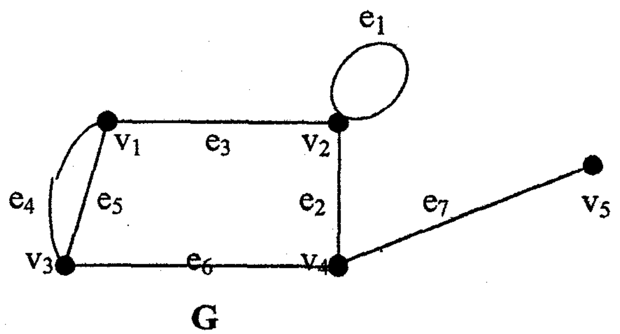
Kurang lebih setengah abadsetelah masa Hamilton, aktiv1tas dalam bidang teori graf dapat dikatakan relatif kecil. Pada tahun 1920-an kegiatan tersebut muncul kembali yang dipelopori oleh D. Konig. Konig berupaya mengumpulkan hasil-hasil pemikiran para ahli matematika tentang teori graf termasuk hasil pemikirannya sendiri, kemudian dikemasnya dalam bentuk buku yang terbitkan pada tahun 1936. Buku tersebut dianggap sebagai buku pertama tentang teori graf.

Tiga puluh tahun terakhir ini merupakan periode yag sangat intensif dalam aktiv1tas pengembangan teori graf baik murni maupun terapan. Sejumlah besar penelitian telah dilakukan, ribuan artikel telah diterbitkan dan lusinan buku telah banyak ditulis. Diantara orang terkenal yang banyak berkecimpung dalam bidang ini adalah Claude Berge, Oysten Ore, Paul Erdos, William Tutte dan Frank Harary.

Pengertian Graf

Sebuah graf linier (atau secara sederhana disebut graf) $G = (V,E)$ adalah suatu sistem yang terdiri atas suatu himpunan objek V = {v1, $v2, \ldots$} yang disebut himpunan titik dan sebuah koleksi $E = \{e_i, e_2, \ldots\}$ yang merupakan koleksi sisi sedemikian hingga tiap sisi *ek* dikaitkan dengan suatu pasangan tak-terurut (v_1, v_j). Titik v1, v_j yang berkaitan dengan *ek* disebut titik-titik ujung sisi e_k.

Cara merepresentasikan sebuah graf yang paling umum adalah dengan diagram. Dalam diagram tersebut, titik-titik dinyatakan sebagai noktah dan tiap sisi dinyatakan sebagai kurva sederhana yang menghubungkan tiap dua titik. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh graf pada Ganibar 1.1 berikut ini.



Gambar: 1.1 graf G dengan lima titik dan tujuh sisi

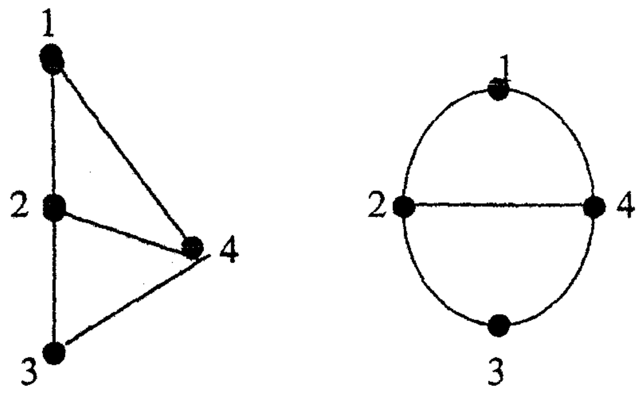
Dalam sebuah graf, seperti terlihat pada contoh di atas, dimungkinkan adanya suatu sisi yang dikaitkan dengan pasangan (v_2, v_2). Sisi yang dua titik ujungnya sama disebut loop/gelang. Dalam graf pada Gambar 1.1, e_l merupakan sebuah loop. Dari contoh di atas juga perlu dicatat bahwa dalam sebuah graf dimungkinkan adanya lebih dari satu sisi yang dikaitkan dengan sepasang titik. Sebagai contoh, e_4 dan e_5 pada graf di atas dikaitkan dengan pasangan titik (v_1, v_3). Pasangan sisi semacam ini disebut sisi-sisi paralel/sejajar atau sisi rangkap.

Sebuah graf yang tidak memiliki loop dan tidak memiliki sisi paralel disebut graf sederhana. Dalam beberapa literatur teori graf, pembahasan hanya dibatasi pada graf sederhana, akan tetapi dalam banyak aplikasi teknik, penggunaan loop dan sisi paralel sangat diperlukan. Untuk membedakan antara graf yang memuat loop dan sisi paralel dengan graf *yang* tidak memuat kedua hat tersebut, sebagian penulis menggunakan istilah graf sederhana untuk yang tidak memuat loop dan sisi paralel dan graf umum untuk yang lainnya.

Insidensi dan Ajasensi/Ketetanggaan

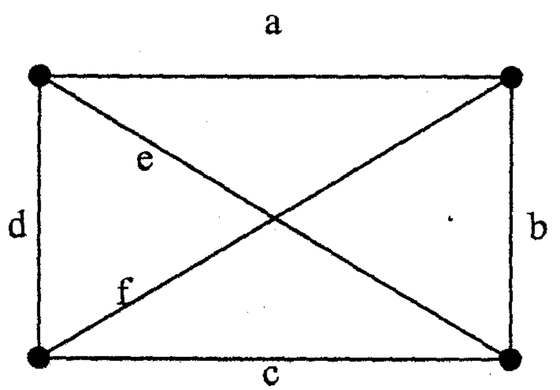
Jika sebuah titik v1 merupakan titik ujung dari suatu sisi ej, maka v dan ej disebut saling berinsidensi atau titik v1 menempel/insiden dengan sisi e_j. Sebagai contoh, pada Gambar 1.1 di atas sisi e_2, e_6 dan e_7 adalah sisi-sisi yang menempel dengan titik v_4. Dua sisi yang tidak paralel disebut bertetangga/ajasen, bila kedua sisi tersebut menempel dengan titik yang sama. Sebagai contoh, e_2 dan e_7 dalam Gambar 1.1 merupakan dua sisi yang bertetangga. Selain itu, dua buah titik disebut bertetangga jika kedua titik tersebut merupakan titik-titik ujung dari sisi yang sama. Dalam Gambar 1.1, v4 dan v5 adalah dua titik yang saling bertetangga, sedangkan titik v1 dan v_4 merupakan dua titik yang tidak saling bertetangga.

Dalam menggambar sebuah graf, bentuk sisi bisa berupa ruas garis lurus atau ruas garis lengkung. Demikian pula ukurannya, dalam penggambaran sebuah graf tidaklah diperhatikan. Hal penting untuk diperhatikan dalam sebuah graf adalah insidensi antara titik-titik dengan sisi-sisinya. Sebagai contoh, Gambar 1.2 di bawah ini menggambarkan graf yang sama, karena insidensi antara sisi-sisi dan titik-titik pada graf tersebut adalah sama.



Gambar: 1.2 Graf yang sama

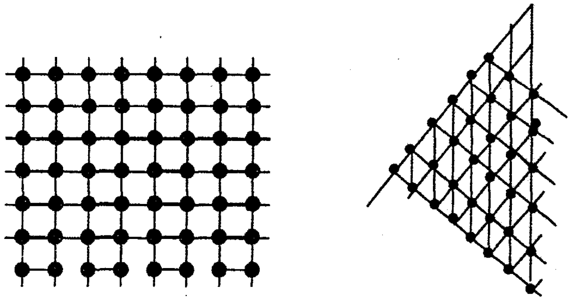
Sekarang perhatikan Gambar 1.3 di bawah ini. Pada gambar tersebut sisi e dan f tampaknya seperti berpotongan, akan tetapi perpotongamya tidak berupa titik. Kedua sisi seperti itu harus dipandang sebagai dua ruas garis yang terletak pada dua bidang berbeda, sehingga kedua sisi itu tidak berpotongan.



Graf: 1.3 sis *e* dan *f* tidak berpotongan

Graf Hingga dan Graf Tak Hingga

Walaupun dalam definisi graf tidak disebutkan secara eksplisit bahwa himpunan titik V dan himpunan sisi E tidak perlu merupakan sebuah himpunan hingga, akan tetapi dalam aplikasi teori graf biasanya kedua himpunan tersebut merupakan himpunan hingga. Sebuah graf *G =* (*V,* E) dengan *V* dan E hingga disebut graf hingga atau graf terhingga dan jika sebaliknya yakni jika V atau E tak hingga, maka G disebut graf tak hingga. Contoh graf hingga dapat dilihat di pada Gambar 1.1, Gambar 1.2 dan Gambar 1.3. Sedangkan Gambar 1.4 di bawah ini merupakan contoh dari bagian graf tak hingga.



Graf: 1.4 bagian dari graf tak hingga

Untuk pembahasan selanjutnya, yang dimaksud dengan graf dalam uraian ini adalah graf hingga.

IV. Uji Kompetensi

Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini

1. Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang

mengupas masalah …

2. G.R. Kirchoff berhasil mengembangkan salah satu cabang/bagian teori graf yang disebut teori …
3. Para ahli teori graf berkeyakinan bahwa yang pertama kali mengembangkan atau membahas masalah empat-warna
4. Pada gambar 1.1, sebutkan sebuah sisi yang dua titik ujungnya sama.
5. Perhatikan kembali graf pada Gambar 1.1. Apakah graf tersebut memiliki sisi *sejajar?* Sebutkan sisi-sisi yang menempel dengan titik V3

PERTEMUAN 2

PERTEMUAN II

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Pengetahuan Dasar Graf

II. Sasaran Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami pengertian derajat (degree) dan titik
2. Mahasiswa memahami pengertian jalan, Jejak, lintasan dan siklus

III. Ringkasan Materi

Derajat (*degree*) Titik

Jumlah atau banyaknya sisi yang menempel dengan suatu titik v, (loop dihitung dua kali), disebut derajat (*degree*) dari titik tersebut; dinotasikan d(v). Derajat suatu titik sering juga disebut valensi dari titik tersebut. Derajat minimum dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan derajat maksimumnya dinotasikan dengan $\Delta(G)$.

Sebagai contoh, dalam Gambar 1.1, $d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = 3$, $d(v_2) = 4$ *dan* $d(v_5) = 1$. Jadi, $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 4$.

Selanjutnya pandang sebuah graf G dengan m sisi dan n titik: $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Karena tiap sisi menyumbangkan dua derajat, maka jumlah derajat dari semua titik dalam G sama dengan dua kali jumlah sisi dalam G. Dengan demikian.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m \quad (1)$$

Sebagai contoh, pada Gambar 1.1

$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 3 + 4 + 3 + 3 + 1$

$= 14$

= dua kali jumlah sisi.

Perhatikan bahwa terdapat empat buah titik yang berderajat ganjil. Persamaan (1) tersebut dinyatakan dalam lemma berikut. Lemma Jabat Tangan (*Handshaking Lemma*)

Untuk setiap graf G dengan n titik dan m sisi berlaku:

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

Dengan lemma ini kita akan lebih mudah dan terstruktur dalam membuktikan Teorema 1.1 berikut.

Teorema 1.1

Banyaknya titik berderajat ganjil dalam sebuah graf selalu genap.

Bukti:

Jika titik-titik berderajat ganjil dan genap kita pisahkan, maka jumlah ruas kiri persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai jumlah dari dua bilangan. Pertama diperoleh dari titik-titik berderajat ganjil dan kedua dari titik-titik berderajat genap. Jadi untuk suatu graf dengan n titik berlaku

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum d(v_j) + \sum d(v_k) \quad (2)$$

dengan $\sum d(v_i)$ adalah jumlah derajat titik-titik yang berderajat genap dan $\sum d(v_k)$ adalah jumlah derajat titik-titik yang berderajat ganjil.

Karena ruas kiri persamaan (2) genap dan suku pertama dari ruas kanan adalah genap, maka suku kedua ruas kanan juga pasti genap.

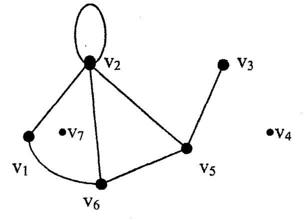
$\sum d(v_k)$ adalah sebuah bilangan genap.(3)

Karena dalam persamaan (3) tiap d(v,) adalah bilangan ganjil, maka banyaknya titik berderajat ganjil pastilah genap.

Sebuah graf dengan semua titiknya berderajat sama disebut graf teratur (*regular graph*).

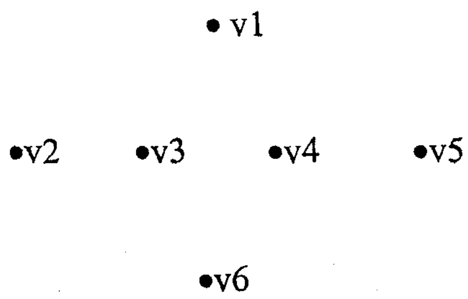
Titik Terisolasi, Titik Anting/Ujung (Daun) dan Graf Nol

Sebuah titik yang tidak memiliki sisi menempel terhadap titik tersebut disebut titik terisolasi. Dengan kata lain, titik terisolasi adalah titik yang berderajat nol. Titik v_4 dan v_7 dalam Gambar 1.5 di, bawah ini adalah dua contoh titik terisolasi. Sebuah titik berderajat satu disebut titik anting/ujung, yang selanjutnya disebut daun. Titik v_3 dalam Gambar 2.1 adalah dawn. Dua sisi yang saling bertetangga atau berbatasan disebut serf jika titik sekutunya berderajat dua. Dalam Gambar 2.1, dua 'si yang menempel dengan v1 adalah seri.



Gambar: 2.1 graf yang memuat titik terisolasi, sisi, seri, dan daun

Dalam definisi graf G = (V, E), himpunan sisi E dimungkinkan merupakan sebuah koleksi kosong. Graf seperti ini, yakni graf yang tidak memiliki sisi, disebut graf nol atau graf kosong (*null graph*). Graf nol dengan *n* titik, dinotasikan N_n. Dengan kata lain, tiap titik dalam sebuah graf nol merupakan titik-titik terisolasi. Sebuah graf nol dengan enam titik dapat dilihat pada Gambar 2.2. Walaupun himpunan sisi dimungkinkan kosong, himpunan titik dari suatu graf tidak boleh kosong. Dengan kata lain, sebuah graf paling tidak harus memiliki sebuah titik.



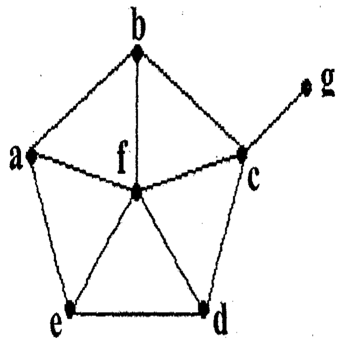
Gambar: 2.2 graf nol dengan enam titik

Jalan, Jejak, Lintasan dan Siklus

Misalkan G adalah sebuah graf. Sebuah jalan (*walk*) di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ \ldots\ e_k\ v_k$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian sehingga $v1_{-1}$ dan v1 adalah titik-titik akhir sisi e_i, untuk $1 < i < k$. Kita katakan W adalah sebuah jalan dari v_0 ke v_k, atau jalan - (v_0, v_k). Titik v_0 dan titik vk berturut-turut

disebut titik awal dan titik akhir W. Sedangkan titik-titik $v_1, v_2,$ …, v_{k-1} disebut titik-titik internal dari *W dan k* disebut panjang dari W. Perhatikan bahwa panjang dari jalan *W* adalah banyaknya sisi dalam W. Jika semua *sisi* $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut sebuah jejak (*trail*). Jika semua titik $v_0, v_1, v_2,$
v_k dalam jalan W juga berbeda, maka *W* disebut sebuah lintasan (*path*). Sebuah jalan *W* disebut tertutup, jika titik awal dan titik akhir dari *W* identik (sama). Jejak tertutup disebut sirkit. Sirkit yang titik awal dan titik internalnya berlainan disebut siklus. Siklus dengan n-titik dinotasikan dengan C_n.

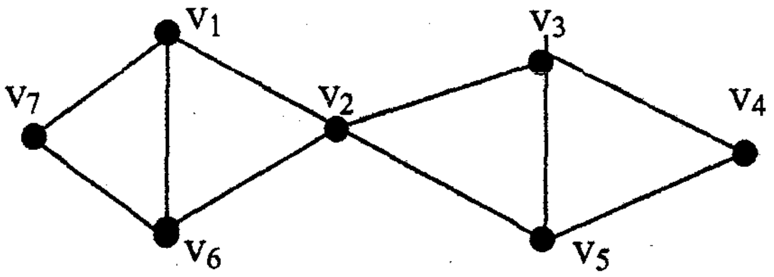
Contoh 1.1



Jalan (walk): a f b f c d c
Jalan tutup (close walk): a b f c g c f e a
Jejak: a f c d f b
Jeka tutup (sirkit): a f e d c f b a
Lintasan (path): a e f c g

Gambar: 2.3 graf G

Dalam graf G pada Gambar 2.4, v_1, v_2, v_3, v_5, v_2, v_6, v1 adalah sirkit yang bukan merupakan siklus; sedangkan v_2, v_3, v_4, v_5, v_2 adalah sebuah siklus.



Contoh 2.4 graf G

IV. Uji Kompetensi

Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini

1. Jika dua buah sisi yang tidak paralel menempel di sebuah titik yang sama, maka kedua sisi itu disebut
2. Banyaknya titik berderajat ganjil dalam sebuah graf selalu
3. Dalam sebuah graf G = (V, *E*), himpunan mana yang dimungkinkan merupakan sebuah himpunan kosong.

PERTEMUAN 3

PERTEMUAN III

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Pengetahuan Dasar Graf

II. Sasaran Pembelajaran

1. Mahasiswa memahami graf sebagai model matematika dan aplikasinya
2. Mahasiswa memahami jaringan kerja sebagai model matematika

III. Ringkasan Materi

Graf Sebagai Model Matematika dan Aplikasinya

Konstruksi model matematika dapat dibuat dalam berbagai cara dengan permasalahan matematika yang berbeda-beda. Salah satu model matematika yang sudah cukup dikenal dan bisa mencakup berbagai permasalahan adalah teori graf. Pada bagian ini akan disajikan dua contoh permasalahan yang dapat dibuat model matematikanya dalam bentuk graf.

Contoh 1.2

Seorang guru bermaksud membuat suatu diagram tentang hubungan antarsiswa dari kelas yang diajamya. Diagram tersebut harus berisikan informasi apakah antara satu siswa dengan siswa lainnya berteman atau tidak berteman. Hal semacam itu dapat dinyatakan dalam bentuk diagram yang disebut graf. Dalam graf tersebut, seorang siswa dinyatakan sebagai sebuah titik dan hubungan berteman antara dua siswa dinyatakan dengan sebuah sisi yang menghubungkan titik-titik yang mewakili dua siswa tersebut.

Contoh 1.3

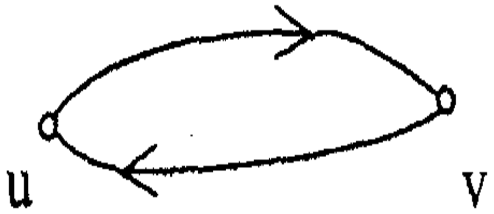
Dalam suatu persiapan untuk menghadapi perang, beberapa peleton tentara ditempatkan di beberapa lokasi yang berbeda. Komunikasi antarpeleton dilakukan dengan menggunakan radio telepon yang kemampuannya terbatas pada jarak tertentu.

Jika jarak antara dua peleton masih terjangkau, maka komunikasi dapat dilakukan. Keadaan seperti ini dapat dinyatakan dalam suatu model matematika berbentuk graf. Dalam graf tersebut, titik menyatakan peleton dan sisi antara dua titik menyatakan komunikasi antara dua peleton yang diwakili oleh dua titik tersebut.

Graf Berarah sebagai Model Matematika

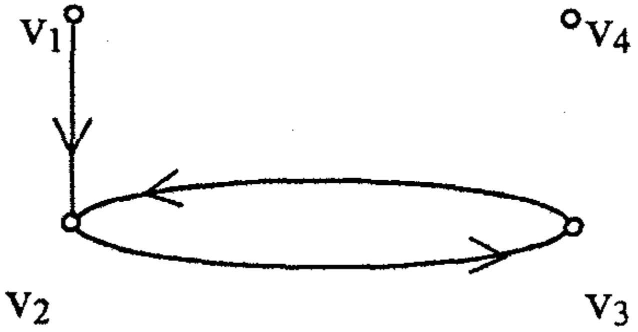
Sebuah graf berarah *D* adalah suatu himpunan hingga yang tidak kosong dengan sebuah relasi R pada V. R adalah relasi yang tidak refleksif. Seperti halnya dalam graf yang sudah dibicarakan di atas, elemen dari V disebut titik. Tiap pasangan terurut dalam R disebut sisi berarah atau arah.

Karena relasi dari sebuah graf berarah *D* tidak perlu simetris, maka apabila (*u, v*) merupakan arah D, (*v, u*) belum tentu merupakan arah dari *D.* Hal macam ini dapat kita ilustrasikan pada diagram dengan gambar segmen garis atau kurva antara titik u dan v yang memakai tanda panah sebagai tanda arah dari *u* ke v atau dari v ke *u.* Bila dari *u* ke v masing-masing mempunyai arah, maka diagramnya dapat kita buat seperti Gambar 3.1 di bawah ini .



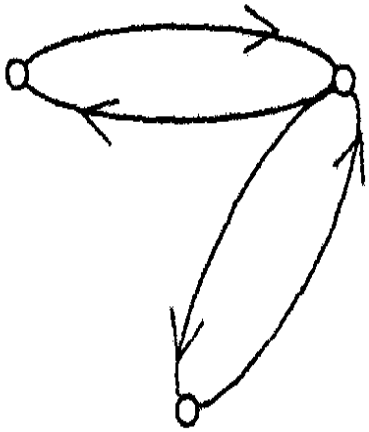
Gambar: 3.1 graf G

Misalkan *Dl* = (V_1,E_1) adalah sebuah graf berarah dengan $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2)\}$. Diagram graf berarah *Di* ditunjukkan oleh Gambar 1.10 di bawah ini.



Gambar: 3.1 graf berarah D1

Mungkin juga terjadi bahwa relasi yang mendefmisikan sebuah graf berarah D merupakan sebuah relasi simetris. Graf semacam ini disebut graf berarah simetris. Gambar 3.1 di bawah ini adalah contoh sebuah graf simetris.



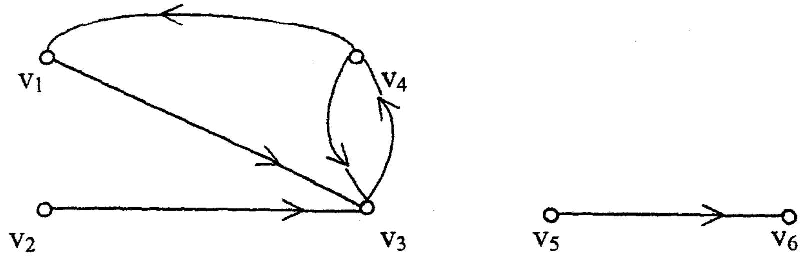
Gambar: 3.1 graf berarah simetris

Contoh 1.5

Diketahui sebuah graf *berarah D dengan* himpunan V = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6} dan himpunan arah E = {(v1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_6)} Gambarlah diagram dari graf D.

Solusi:

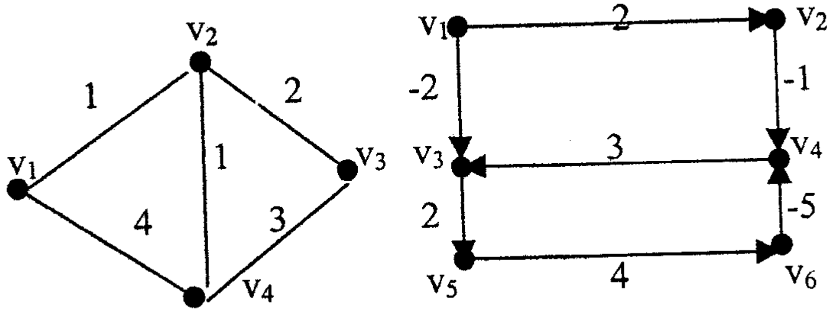
Gambar di bawah ini merupakan diagram dari graf D.



Gambar: 3.4 graf D

Jaringan Kerja sebagai Model Matematika

Sebuah jaringan kerja adalah sebuah graf atau graf berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi atau sisi berarah ke himpunan bilangan real. Jaringan kerja yang merupakan sebuah graf disebut jaringan kerja tidak berarah sedangkan jaringan kerja yang merupakan graf berarah disebut jaringan kerja berarah. Gambar 3.5 di bawah ini merupakan contoh diagram dari dua jenis jaringan kerja tersebut.



Gambar 3.5 model graf jaringan kerja

Graf bertanda S adalah suatu jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya + l atau -1. Karena tanda positif atau negatif dipasangkan pada tiap sisi dari S, maka dapat dipahami bila tiap sisi dari S disebut sisi positif atau sisi negatif. Sebagai contoh,
jika

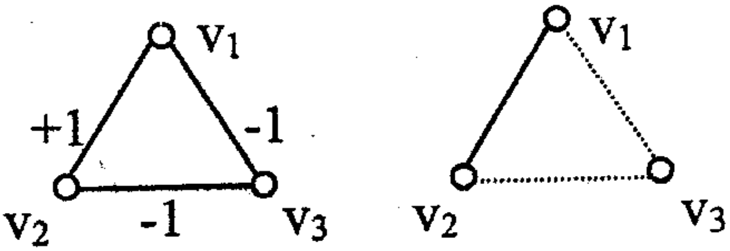
$$V = \{v_1, V_2, V_3\}$$

$$E = \{V_1V_2, V_1V_3, V_2V_3\}$$

dan

$$f = \{V_1V_2, + 1), (V_1V_3, -1), \{V_2V_3, -1)\}$$

maka graf bertanda ini dapat dinyatakan dalam dua cara seperti diperlihatkan pada Gambar 3.6 di bawah ini.



Gambar: 3.6 graf bertanda

Contoh 1.6

Hubungan bertetangga dapat dinyatakan Oalam be ti c ',rat bexm&. Dua keluarga yang saling berhubungan baik dapat diwakili oleh sisi positif, dua keluarga yang berhubungan kurang baik dapat dinyatakan dengan sisi negatif dan dua keluarga yang tidak saling berhubungan atau tidak saling kenal dapat dinyatakan dengan tidak ada sisi yang menghubungkan dua titik yang mewakili dua tetangga tersebut.

Jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya bulat positif seringkali digunakan sebagai model matematika. Ada dua cara yang sering digunakan untuk menyatakan jaringan kerja tidak berarah seperti ini. Sebagai contoh, jika

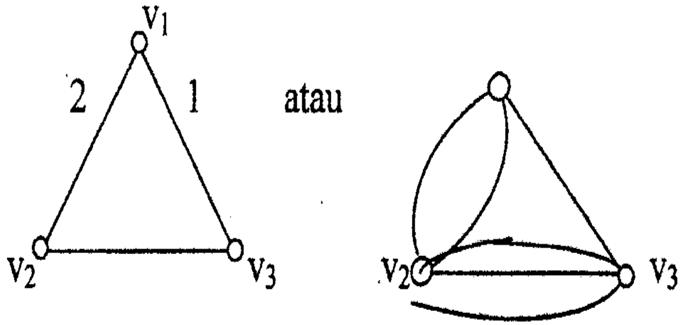
$$V = \{v1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{v1v_2, v1v_3, v_2v_3\}$$

dan

$$f = \{v_1v_2, 2), (v1v_3, 1), (v_2v_3, 3)\}$$

maka jaringan kerjanya dapat dibuat seperti terlihat pada Gambar 3.7 di bawah ini.



Gambar 3.7 Graf bertanda

Jaringan kerja tak berarah yang dinyatakan seperti Gambar 3.7 disebut multigraf. Misalkan *M* adalah sebuah multigraf dengan himpunan sisi E dan fungsi *f.* Jika *uv r = E* dan *f*(*uv*) = *n* (*n* adalah bilangan bulat positif), maka *u* dan v dihubungkan oleh n sisi. Sisi-sisi seperti ini disebut sisi rangkap (multiple edges).

Contoh 1.7

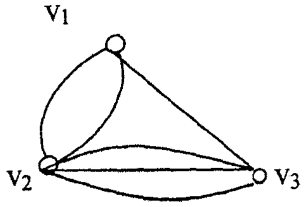
Misalkan v1, v_2 dan v_3 adalah tiga buah kota. Tiap dua kota dihubungkan oleh satu jalan yang jaraknya tidak sama. Jika antara salah satu kota dengan kota lain ditempuh dengan jalan kaki, maka lama perjalanannya adalah sebagai berikut:

antara v1 dan v_2, dua hari;

antara v1 dan v_3, satu hari;

antara v_2 dan v_3, tiga hari.

Situasi seperti ini dapat dinyatakan dalam bentuk graf seperti pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 graf G

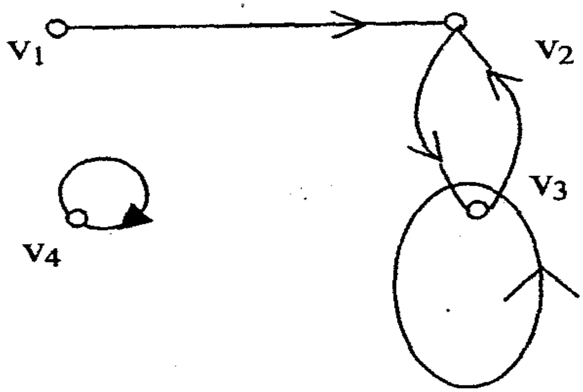
Bila relasi yang mendefinisikan suatu graf memuat (v,v) dengan v e V, maka nama graf tersebut berubah menjadi graf dengan loop, graf berarah dengan loop, jaringan kerja dengan loop, atau multigraf dengan loop.

Misalkan

V = {v1, v_2, v_3, v_4} dan

E = {(v1,v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_3),(v_4, v_4)).

Karena relasi E memuat (v_3, v_3) dan (v_4, v_4), maka graf berarah dengan loop ini dapat digambar seperti di bawah ini.



Gambar 3.9 graf berarah dengan loop

IV. Uji Kompetensi

Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini

1. Suatu sekolah bermaksud membentuk sepuluh macam kepanitiaan yang anggota-anggotanya diambil dari 15 orang siswa terpilih. Banyaknya anggota dari kepanitiaan yang dibentuk tidak ditentukan, artinya, bisa beranggotakan sedikit atau bisa banyak. Kemudian setiap siswa dari yang 15 orang itu dimungkinkan untuk tidak menjadi anggota kepanitiaan atau mungkin pula merangkap sebagai anggota beberapa kepanitiaan. Berikan dua contoh graf yang menggambarkan situasi tersebut.
2. Gambarlah graf berarah dengan himpunan titik V = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6} dan himpunan sisi E = {(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_5, v_6)) .

PERTEMUAN 4

PERTEMUAN IV

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Pengetahuan Dasar Graf

II. Sasaran Pembelajaran

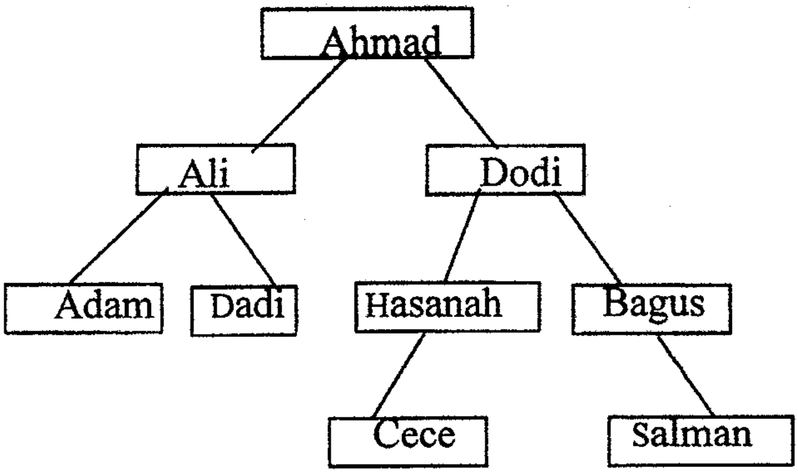
Mahasiswa memahami penerapan graf dalam hal:

1. Silsilah keluarga
2. Sistem Komunikasi
3. Jaringan Transfortasi
4. Desain Arsitektur

III. Ringkasan Materi

Silsilah Keluarga

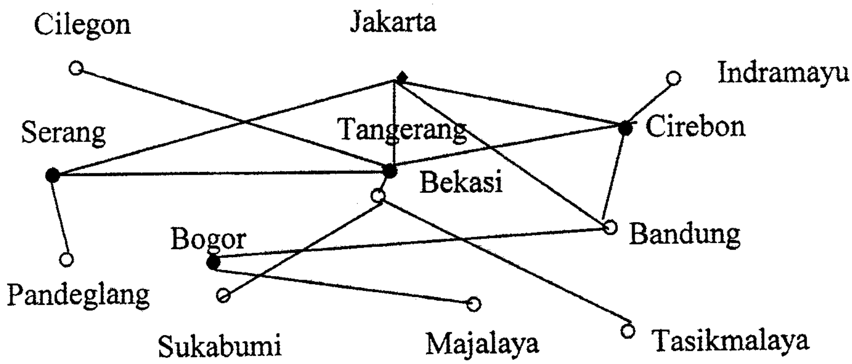
Silsilah keluarga merupakan contoh masalah sederhana yang bisa dinyatakan dalam bentuk graf. Graf yang terbentuk dari silsilah keluarga biasanya berupa pohon atau tree. Gambar 4.1 di bawah ini adalah contoh silsilah keluarga Ahmad yang dapat dinyatakan dengan graf pohon.



Gambar: 4.1 graf silsilah keluarga

Sistem Komunikasi

Perhatikan Gambar 4.2 di bawah ini. Gambar tersebut merupakan suatu jaringan komunikasi dengan menggunakan komputer. Pada gambar tersebut, bulat kecil putih menyatakan komputer mikro dan bulatan kecil hitam menyatakan komputer mini.



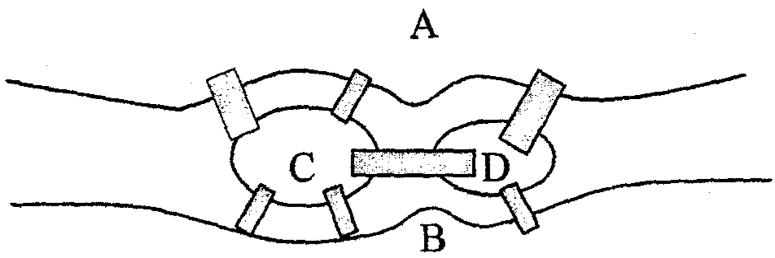
Gambar: 4.2 jaringan komunikasi di Jawa Barat

Komputer mini digunakan untuk mengubah sinyal dari suatu sirkuit ke sirkuit lainnya serta untuk memproses data. Sedangkan lambang *diamond* menyatakan komputer *mainframe* yang merupakan pusat dari seluruh jaringan. Seseorang yang bermaksud mengakses jaringan tersebut harus melalui salah satu dari komputer mini yang ada dengan menggunakan komputer mikro miliknya. Sistem tersebut dapat digunakan untuk mengirim pesan antarkomputer mikro, atau untuk melakukan proses pengolahan data dengan menggunakan salah satu komputer yang lebih besar. Melalui diagram atau graf di atas dapat diajukan berbagai pertanyaan antara lain sebagai berikut:

1. Dapatkah komputer mikro di Cilegon mengirimkan pesan melalui komputer mikro di Tasikmalaya?
2. Berapa banyak perubahan sinyal diperlukan untuk memperoleh pesan yang dikirim dari Cirebon ke Pandeglang?
3. Jika komputer mini di Jakarta rusak, apakah pesan dari Cirebon ke Pandeglang masih dapat dikirimkan?
4. Jika sirkuit antara Cirebon dan Bandung ada kerusakan, apakah pengiriman pesan dari Indramayu ke Bogor masih bisa dilakukan?

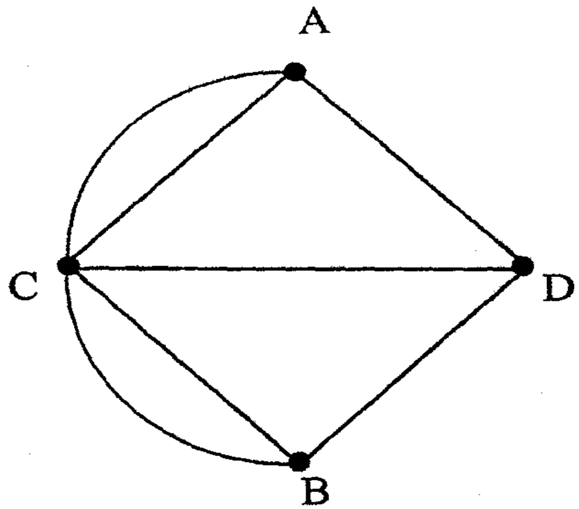
Jaringan Transportasi

Masalah transportasi sebenarnya merupakan hal yang sangat klasik dalam teori graf, karena kelahiran teori graf itu diawali oleh masalah transportasi yang terkenal yaitu Jembatan Konigsberg. Ilustrasi jembatan tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.3 di bawah ini.



Gambar 4.3 Ilustrasi jembatan Konigsberg

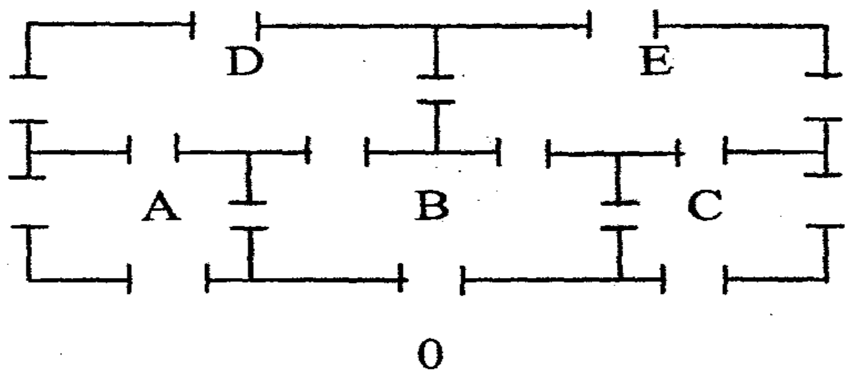
Pada gambar tersebut, A, B, C dan D adalah daerah-daerah yang dihubungkan oleh tujuh buah jembatan. Masalahnya, para penduduk Konigsberg tidak mampu menemukan rute yang melalui setiap jembatan tepat satu kali, bergerak dari suatu tempat tertentu dan kembali ke tempat itu lagi.. Situasi seperti ini dapat dinyatakan dalam bentuk yang sederhana berupa graf seperti diperlihatkan pada Gambar 4.4 di bawah ini



Gambar: 4.4 Graf model Jembatan Konigsberg

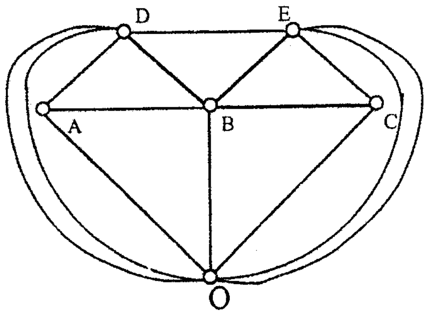
Desain Arsitektur

Perhatikan desain sebuah bangunan pada Gambar 4.5 di bawah ini. Pada gambar tersebut, A, B, C, D dan E menyatakan ruangan yang ada dalam bangunan tersebut, sedangkan 0 menyatakan bagian luar bangunan.



Gambar: 4.5 desain sebuah bangunan

Jika A, B, C, D, E dan 0 dinyatakan sebagai titik-titik dan pinto yang menghubungkan antarruangan atau antarruangan dengan bagian luar dinyatakan sebagai sisi, maka situasi pada gambar di atas dapat dinyatakan sebagai graf seperti pada Gambar 4.6 di bawah ini. Masalah desain arsitektur diantaranya adalah, misalkan kita ingin menciptakan tata letak ruangan demikian sehingga sejumlah ruangan tertentu dapat dimasuki secara langsung dari ruangan-ruangan yang diinginkan.



Gambar: 4.6 graf model desain bangunan gambar 4.5

IV. Uji Kompetensi

Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini

1. Kota *A* dan kota *B* dihubungkan oleh sebuah jalan umum biasa, sedangkan kota B dan kota C dihubungkan oleh dua jalan: satu jalan umum biasa dan satu lagi jalan bebas hambatan yang dikenakan biaya bagi siapa saja yang melaluinya. Buatlah dua graf yang menggambarkan situasi seperti ini.
2. Silsilah keluarga dapat dibuat atau dinyatakan dalam bentuk sederhana berupa graf. Graf tersebut biasanya berbentuk.

PERTEMUAN 5

PERTEMUAN V

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Refresentase Graf

II. Sasaran Pembelajaran

Mahasiswa memahami penerapan graf dalam hal:

1. Graf dalam Notasi Himpunan
2. Graf dalam Notasi Matriks Insidensi

III. Ringkasan Materi

Graf dalam Notasi Himpunan

Sebuah graf G adalah suatu himpunan V yang tidak kosong yang memenuhi sifat tidak refleksif dan simetris dari suatu relasi *R* pada V. Karena R simetris, maka untuk setiap pasangan terurut (u,v) E *R,* pasangan terurut (v, u) juga elemen R. Himpunan pasangan terurut simetris dalam *R* dinotasikan dengan E. Sebagai contoh, sebuah graf G dapat didefinisikan dengan himpunan

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

dan relasi

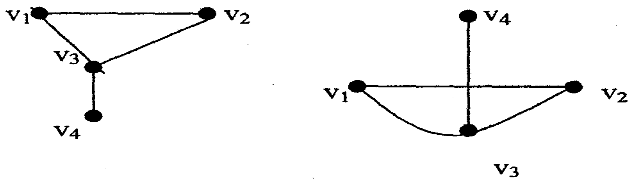
$R = \{(v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_2,v_1), (v_2,v_3), (v_3,v_1), (v_3,v_2),(v_3,v_4), (v_4,v_3)\}$

Dalam hal ini,

$E = \{\{(v_1,v_2), (v_2,v_1), (v_1,v_3), (v_3,v_1), (v_2,v_3), (v_3,v_2),(v_3,v_4),$

$(v_4,v_3)\}\}$

Berkenaan dengan pembicaraan sebuah graf, seringkali kita menyatakannya dalam bentuk diagram. Dalam diagram seperti ini, titik dinyatakan sebagai sebuah noktah atau lingkaran kecil dan sisi dinyatakan oleh kurva sederhana yang menghubungkan dua titik tertentu. Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh diagram pada Gambar 5.1 berikut ini.



Gambar: 5.1 contoh dua buah graf

Walaupun dua diagram pada Gambar 5.1 di atas kelihatannya berbeda, namun sebenarnya dua diagram tersebut menyatakan graf yang sama.

Dalam sebuah graf G, V merupakan sebuah himpunan titik dan tiap elemen dari disebut titik. Banyaknya titik dalam G disebut orde dari G. Tiap elemen dari E disebut sisi dan E sendiri disebut himpunan sisi dari G. Banyaknya sisi dalam disebut ukuran dari G. Dengan demikian V1 = orde dari G dan ı E ! = ukuran dari G.

Jika G merupakan sebuah graf yang didefinisikan dalam bentuk sebuah himpunan titik *V* dan suatu relasi R pada *V,* maka (*u, v*) E R mengakibatkan (v, u) E R. Dengan demikian {(u, v), (v, u)} adalah sebuah sisi dari G. Untuk memudahkan dalam penulisan, sebuah sisi biasanya cukup dinotasikan dengan uv atau vu. Himpunan sisi E menentukan relasi R. Dengan demikian graf G yang diberikan sebagai ilustrasi di atas dapat didefmisikan sebagai himpunan V = {v_1, v_2, v_3, v_4} dan E = {$v_1 v_2$, $v_1 v_3$, $v_2 v_3$, $v_3 v_4$). Orde dan ukuran dari G adalah 4. Himpunan titik dari G dapat juga dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisinya dinotasikan dengan E(G). Penggunaan notasi seperti ini sangat bermanfaat khususnya apabila kita membicarakan dua graf atau lebih.

Himpunan V × V dimungkinkan berupa himpunan kosong, karena relasi R pada memenuhi sifat tidak refleksif dan antisimetris. Hal ini berakibat bahwa himpunan sisi dari graf bisa berupa himpunan kosong atau dengan kata lain sebuah graf mungkin tidak memiliki sisi.

Jika $e = uv \in E(G)$, maka dikatakan bahwa *e* menghubungkan titik *u* dan v. Titik *u* dan v disebut bertetangga dalam G, jika uv $\in E(G)$. Jika uv $\notin$ E(G), maka *u* dan v merupakan dua titik yang tidak saling bertetangga. Jika $e = uv \in E(G)$, maka *u* dan v masing-masing disebut ujung dari *e.* Jika uv dan uw merupakan dua sisi berbeda dari G (v ≠ w), maka uv dan uw adalah dua sisi yang bertetangga. Dengan demikian dalam gray G pada Gambar 2.24, v_1 dan v_3 berbatasan, sedangkan v_1 dan v_4 tidak bertetangga. Titik V_3 merupakan ujung dari sisi v_2v_3 sedangkan v_4 bukan ujung dari v_2v_3. Sisi v_1v_3 dan v_3v_4 adalah dua sisi yang bertetangga sedangkan sisi v_1v_2 dan v_3v_4 tidak bertetangga.

Graf dalam Notasi Matriks Insidensi

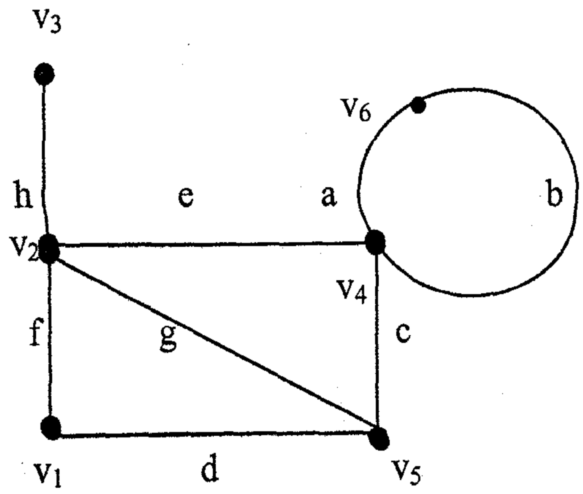
Misalkan G adalah sebuah graf dengan *n* titik, *e sisi dan* tidak memuat loop. Definisikan sebuah matriks $A = (a_u)$ berordo *n x e* dengan *n* menyatakan baris dan e menyatakan kolom sebagai berikut:

Elemen matriks

a_{ij} = 1, jika sisi ke j menempel dengan titik v_i dan

a_{ij} = 0, jika lainnya.

Matriks semacam ini disebut matriks insidensi. Matriks A dari sebuah graf biasanya dinotasikan dengan A(G). Contoh sebuah graf dengan matriks insidensinya disajikan pada Gambar 5.2 di bawah ini.



Gambar: 5.2 Graf G

Matriks insidensinya sebagai berikut.

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sebuah matriks insidensi hanya memuat dua kemungkinan elemen, yaitu 0 dan 1. Matriks seperti ini disebut matriks biner atau matriks (0,1). Misalkan elemen 0 dan 1 tersebut berasal dari lapangan Galois modulo 2. Jika diberikan suatu graf yang direpresentasikan secara geometris, maka matriks insidensinya dapat dengan mudah dibuat. Di lain pihak, bila diberikan sebuah matriks insidensi A(G), kita juga bisa secara mudah menyatakannya secara geometris. Dengan demikian, kedua representasi tersebut sebenarnya memuat informasi yang sama tentang suatu graf tertentu.

Jika sebuah matriks insidensi kita observasi secara lebih teliti, maka akan diperoleh beberapa hat berikut.

1. Karena tiap sisi hanya menempel dengan tepat dua titik, maka tiap kolom dari matriks A hanya memuat tepat dua elemen 1.
2. Banyaknya elemen I pada tiap baris sama dengan derajat dari titik yang berpadanan.
3. Sebuah baris *yang* semua elemennya 0, menyatakan sebuah titik terisolasi.
4. Sisi-sisi paralel dalam sebuah graf akan menghasilkan kolom-kolom yang sama pada matriks insidensinya.
5. Jika sebuah graf G tidak terhubung dan terdiri atas dua komponen Gl dan G2, maka matriks insidensi $A(G)$ dari graf G tersebut dapat ditulis sebagai berikut

   $$A(G) = \begin{bmatrix} A(G_1) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{bmatrix}$$

   Dengan $A(G_1)$ dan $A(G_2)$ masing-masing merupakan matriks insidensi dari 2 komponen G_1 dan G_2. Hal ini didasarkan atas fakta bahwa tidak ada satupun sisi dalam G_1 yang menempel dengan suatu titik di G_2 dan demikian pula sebaliknya. Jelas, bahwa hasil ini berlaku juga untuk setiap graf tidak, terhubung dengan sejumlah komponen tertentu.

6. Permutasi dari dua baris atau kolom dalam sebuah matriks insidensi berpadanan dengan pelabelan kembali titik-titik dan sisi-sisi dari graf yang sama.

IV. Uji Kompetensi

Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini

1. Sebuah graf yang tidak memiliki loop dan sisi-sisi paralel disebut
2. Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf sederhana. Jika untuk setiap pasangan titik v_i, v_j dalam G terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya maka G disebut

PERTEMUAN 6

PERTEMUAN VI

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Pengetahuan Dasar Graf

II. Sasaran Pembelajaran

Mahasiswa memahami penerapan graf dalam hal:

1. Graf dalam Notasi Matriks Ketetanggaan
2. Graf lengkap
3. Sub graf

III. Ringkasan Materi

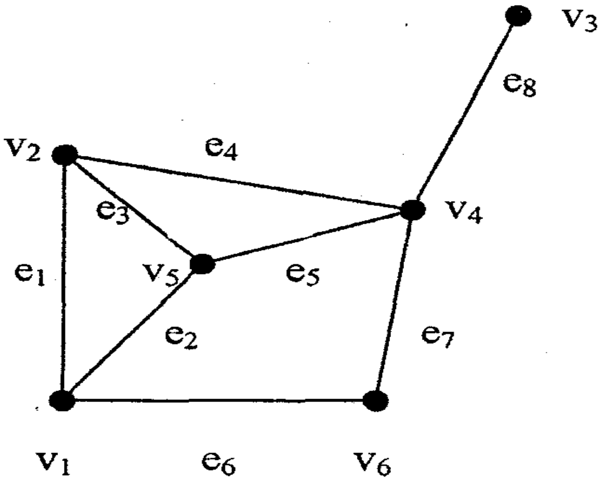
Graf dalam Notasi Matriks Ketetanggaan

Sebuah graf, selain dapat dinyatakan sebagai suatu matriks insidensi, dapat juga dinyatakan dalam bentuk lain yakni matriks ketetanggaan atau matriks keterhubungan.

Misal G adalah graf dengan n titik. Matriks ketetanggaan dari graf G adalah matriks bujursangkar (*persegi*) *berordo n,* $X(G)$ (x_{ij}) *dengan elemen* x_{ij} *menyatakan banyaknya sisi yang menghubungkan titik ke-i dan titik ke j.*

Dengan definisi ini memungkinkan untuk menyatakan sebuah graf yang memiliki sisi paralel atau loop dengan matriks ketetanggaan.

Contoh sebuah graf yang tidak memiliki sisi paralel dapat dilihat pada Gambar 6.1 di bawah ini dengan matriks ketetanggaannya.

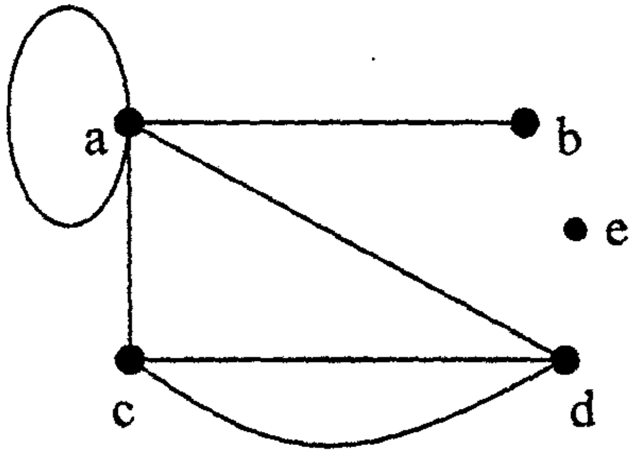


Gambar: 6.1 Graf G

Matriks ketetanggaannya:

$$X(G) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Contoh sebuah graf yang memiliki sisi paralel dan loop dapat dilihat pada Gambar 6.2 di bawah ini dengan matriks ketetanggaannya.



Gambar: 6.2 Graf G

Matriks ketetanggaannya:

$$X(H) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bila matriks ketetanggaan *X* dari graf G kita teliti secara seksama, akan diperoleh beberapa hal berikut.

1. Elemen-elemen matriks *X* sepanjang diagonal utama semuanya bernilai 0 jika dan hanya jika graf dari matriks tersebut tidak memuat loop: Sebuah. loop pada titik ke-i berpadanan dengan $x_{ii} = 1$.
2. Menurut definisi matriks ketetanggaan, memungkinkan adanya ketentuan untuk sisisisi paralel. Dengan demikian, matriks ketetanggaan *X* tidak hanya didefinisikan untuk

graf yang tidak memuat sisi paralel.

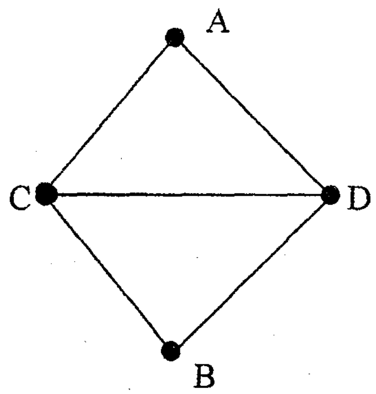
3. Jika graf tidak memuat loop dan sisi paralel, derajat suatu titik sama dengan jumlah atau banyak elemen 1 pada baris atau kolom dari *X*yang bersesuaian.
4. Permutasi baris dan kolom yang bersesuaian mengakibatkan terjadi perubahan pada posisi titik-titiknya. Perlu dicatat bahwa dalam melakukan permutasi, baris dan kolom harus disusun dalam urutan yang sama. Jadi, jika dua baris dalam *X* dipertukarkan, maka kolom yang bersesuaian juga harus dipertukarkan. Dengan demikian dua graf G_l dan G_2 yang tidak memuat sisi paralel adalah isomorfk jika dan hanya jika matriks-matriks ketetanggaannya yakni $X(G_1)$ dan $X(G_2)$ saling berkaitan.
5. Sebuah graf G tidak terhubung dan terdiri atas dua komponen G_1 dan G_2 jika dan hanya jika matriks ketetanggaannya yakni $X(G)$ dapat dipartisikan sebagai

$$X(G) = \begin{bmatrix} X(G_1) & 0 \\ 0 & X(G_2) \end{bmatrix}$$

dengan .X(G) adalah matriks ketetanggaan dari komponen G1 dan $X(G2)$ adalah matriks ketetanggaan dari komponen G_2. Jelas bahwa partisi ini mengakibatkan tidak adanya sisi yang menghubungkan suatu titik pada subgraf G_1 dengan titik dalam subgraf G_2.
6. Diberikan sebuah matriks biner *Q* berordo *n.* Maka, selalu bisa dibentuk sebuah graf G dengan *n* titik (dan tidak memuat sisi-sisi paralel sehingga *Q* merupakan matriks ketetanggaan dari G).

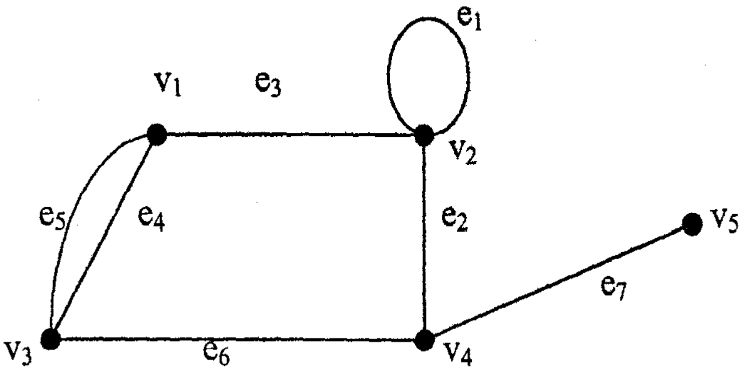
Graf Sederhana

Sebuah graf yang tidak memiliki loop dan tidak memiliki sisi paralel disebut graf sederhana. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 6.3 di bawah ini.



Gambar 6.3 graf sederhana

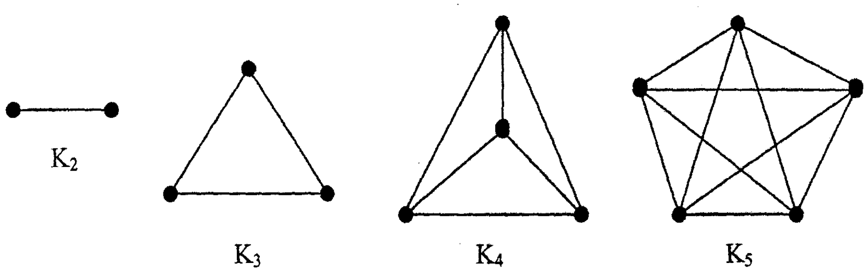
Karena graf tersebut tidak memiliki loop dan tidak memiliki sisi paralel, maka graf tersebut termasuk graf sederhana. Selanjutnya, graf pada Gambar 6.4 di bawah ini tidak termasuk graf sederhana sebab termuat di dalamnya sebuah loop dan dua sisi paralel.



Gambar 6.4 Graf tidak sederhana

Graf Lengkap

Misalkan *G* = (*V,E*) adalah sebuah graf sederhana. Jika untuk setiap pasangan titik v_1 dan v_j di G terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya, maka G disebut graf lengkap. Graf lengkap dengan *n* titik dinotasikan dengan K_n. Gambar 6.5 di bawah ini adalah contoh-contoh graf lengkap dengan dua, tiga, empat dan lima titik.



Gambar 6.5 contoh-contoh graf lengkap

Sebuah graf lengkap sering juga disebut sebagai graf universal. Karena tiap titik dalam graf lengkap selalu dihubungkan dengan titik lain melalui satu sisi, maka derajat tiap titik dalam sebuah graf lengkap G dengan n titik adalah *n-1.*

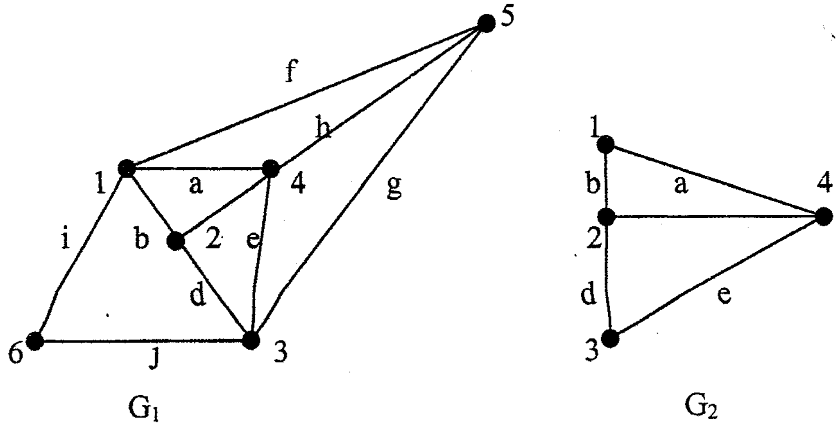
Dengan demikian, banyaknya sisi dalam graf lengkap G adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

Graf Bagian (Subgraf)

Sebuah graf *K* disebut graf bagian (subgraf) dari graf G, dinotasikan $K \subseteq G$, jika $V(K) \subseteq V(G)$ dan $E(K) \subseteq E(G)$. Sebagai contoh, graf dalam Gambar 2.9, G_2 merupakan graf bagian dari graf G_1. Karena konsep graf bagian dapat dianalogikan dengan konsep himpunan bagian dalam teori himpunan, maka sebuah graf bagian dapat dipandang sebagai bagian dari graf yang lain. Untuk menyatakan bahwa nK merupakan bagian dari graf Gn dapat ditulis K $\subseteq$ G.

Jika kita telaah lebih jauh, maka akan diperoleh beberapa sifat berikut ini.

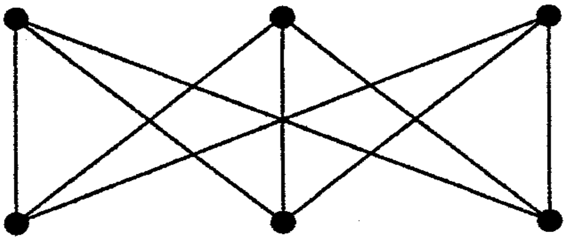
1. Setiap graf merupakan graf bagian dari dirinya sendiri.
2. Graf bagian dari suatu graf bagian G merupakan graf bagian dari G.
3. Sebuah titik dalam graf G merupakan graf bagian dari G.
4. Sebuah sisi dari G bersamaan dengan kedua titik ujungnya juga merupakan graf bagian dari G.



Gambar 6.6 graf G2 merupakan graf bagian dari graf G1

Graf Teratur

Sebuah graf disebut graf teratur jika semua titiknya berderajat sama. Sebagai contoh, graf G pada Gambar 6.7 di bawah ini merupakan sebuah graf teratur berderajat 3.



Gambar 6.7 graf teratur G

IV. Uji Kompetensi

Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini.

Jika sebuah graf memuat titik-titik yang dapat didekomposisi menjadi dua himpunan sedemikian hingga tidak ada sisi-sisi yang menghubungkan titik-titik pada himpunan yang sama, maka graf tersebut disebut graf

PERTEMUAN 7

PERTEMUAN VII

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Pengetahuan Dasar Graf

II. Sasaran Pembelajaran

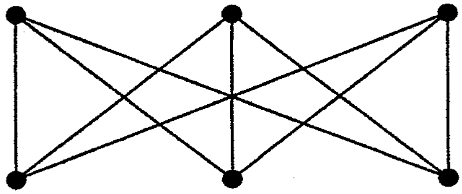
Mahasiswa memahami penerapan graf dalam hal:

1. Graf teratur
2. Graf Bipartit
3. Graf Komplemen
4. Graf Isomorfik
5. Graf Terhubung

III. Ringkasan Materi

Graf Teratur

Sebuah graf disebut graf teratur jika semua titiknya berderajat sama. Sebagai contoh, graf G pada Gambar 7.1 di bawah ini merupakan sebuah graf teratur berderajat 3.



Gambar 7.1 graf teratur G

Graf Bipartit

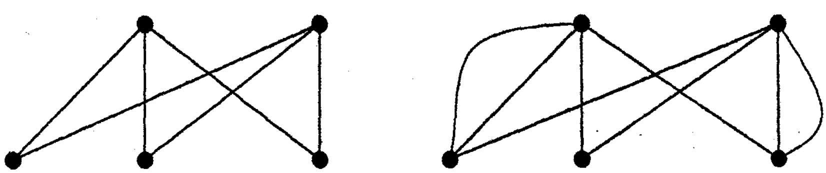
Sebuah graf G disebut graf bipartit jika *V*(*G*) (himpunan titik graf G) dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian *X* dan *Y* sedemikian sehingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di *X* dan sebuah titik di *Y.* Kita notasikan (*X, Y*) bipartit dari G.

Apabila G sederhana dan bipartit dengan partisi (*X*, Y) sedemikian sehingga setiap titik di *X* berhubungan langsung dengan setiap titik di *Y,* maka G disebut graf bipartit lengkap, dinotasikan dengan $K_{m,n}$ dengan *m* dan *n* adalah banyaknya titik di kedua partisi tersebut.

Gambar 2.11 merupakan contoh graf bipartit. Karena titik-titik pada himpunan yang satu dihubungkan langsung dengan setiap titik pada himpunan yang lainnya, maka Gambar 2.10 disebut graf bipartit lengkap $K_{3,3}$.

Dalam definisi di atas, pengertian graf bipartit lengkap hanya dibatasi untuk graf sederhana saja, sebab kalau tidak, maka dua graf bipartit yang berbeda dapat mempunyai notasi yang sama.

Perhatikan graf berikut ini.

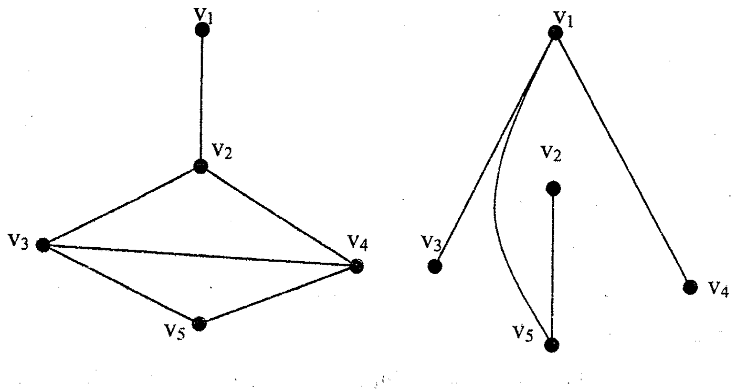


Gambar 7.3 Grap G

Apakah kedua graf di atas *K2,3?*

Graf Komplemen

Komplemen dari sebuah graf G, dinotasikan G', adalah sebuah graf dengan himpunan titik yang sama seperti dalam G dan dengan sifat bahwa dua titik di G bertetangga jika dan hanya jika dua titik yang sama dalam G' tidak bertetangga. Gambar 7.3 di bawah ini memuat contoh dua graf yang rating berkomplemen.



Gambar 7.3 graf yang saling komplemen

Graf Isomorfik

Kita akan menentukan syarat-syarat apakah yang harus dipenuhi agar dua buah graf dapat dikatakan isomorfik.

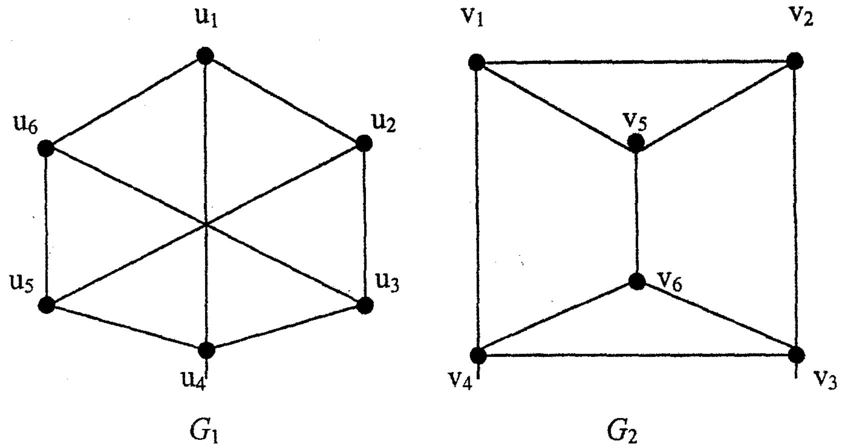
Sebuah graf G disebut isomorfik dengan graf H jika terdapat pemetaan satu-satu Φ (yang disebut isomorfisme dari V(G) ke *V*(*H*)) sedemikian sehingga Φ mempertahankan ketetanggaan. Jadi, (u,v) $\in$ *E*(*G*) jika dan hanya jika ((D(u), (D(v)) $\in$ E(H). Jika G isomorfik. dengan *H,* kita tulis *G = H.*

Misalkan G_1 isomorfik dengan G_2; dengan demikian terdapat Φ yang merupakan suatu isomorfisma dari G_1 ke G_2. Defnisikan pemetaan balikan Φ^{-1}: $V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ dengan Φ^{-1} $(v_2) = v_1$ jika $\Phi(v_1) = v_2$. Jelas bahwa Φ^{-1} merupakan pemetaan satu-satu dan $V(G_2)$ ke $V(G_l)$. Misalkan u_1, $u_2 \in V(G_2)$, $\Phi^{-1}(u_2) = ui$ dan $\Phi^{-1}(v_2) = v_1$. Maka $\Phi(u_1) = u_2$ dan $\Phi(v_1) = v_2$. Dari dua persamaan terakhir ini diperoleh bahwa u_2 dan v_2 adalah dua titik yang bertetangga jika dan hanya jika $\Phi(u_1)$ dan $\Phi(v_1)$ bertetangga. Karena G1 isomorfik dengan G_2, maka $\Phi(u_1)$ dan $\Phi(u_2)$ bertetangga jika dan hanya jika $u_1 = \Phi^{-1}(u_2)$ dan $v_1 = \Phi^{-1}(v_2)$ bertetangga. Dengan demikian u_2 dan v_2 merupakan dua titik yang bertetangga jika dan hanya jika $\Phi^{-1}(u_2)$ dan $\Phi^{-1}(v_2)$ bertetangga. Hal ini menunjukkan bahwa G_2 isomorfik dengan G_1; dengan kata lain relasi isomorfik dan merupakan sebuah relasi simetris.

Selanjutnya kita harus memperlihatkan bahwa relasi tersebut merupakan relasi transitif. Misalkan G1 isomorfik dengan G_2 dan G_2 isomorfik dengan G_3. Dengan demikian terdapat isomorfsma $f : V(G_l) \rightarrow V(G_2)$ dan $g : V(G_2) \rightarrow V(G_3)$.

Pandang fungsi kompisit g o f. Dapat diperlihatkan bahwa g o f merupakan pemetaan satu-satu dari $V(G_1)$ pada $V(G_3)$. Misalkan u_1, $v_1 \in V(G_1)$. Misalkan pula $f(u_1) = u_2$ dan $f(v_1) = v_2$, $g(u_2) = u_3$ dan $g(v_2) = v_3$. Karena *f* dan *g* isomorfisma, maka ui dan v_1 bertetangga jika dan hanya jika $f(u_1) = u_2$ dan $f(v_1) = v_2$ bertetangga , u_2 dan v_2 bertetangga jika dan hanya jika $g(u_2) = u_3$ dan $g(v_2) = v_3$ bertetangga pula. Jadi, u_1 dan v_1 bertetangga jika dan hanya jika $u_3 = (g \circ f)(u_1)$ dan $v_3 = (g \circ f)(v_1)$ bertetangga. Hal ini menunjukkan bahwa g o f adalah isomorfisma. Dengan demikian G_1 isomorfik dengan G_3.

Jika G_1 dan G_2 graf isomorfk, maka terdapat pemetaan satu-satu (D dari $V(G_l)$ pada $V(G_2)$. Akibatnya $V(G_1)$ dan $V(G_2)$ memiliki elemen yang sama banyaknya, atau G_1 dan G_2 berorde sama. Misalkan ui dan v, dua titik dari G_1 dan misalkan pula bahwa $d_1(u_i) = u_2$ dan (b(v_1) = v_2. Maka ui dan v_1 bertetangga dalam G_1 jika dan hanya jika u_2 dan v_2 bertetangga dalam G_2. Dengan kata lain u_1v_1 merupakan sisi dari G_1 jika dan hanya jika u_2v_2 merupakan sisi dari G_2. Hal ini menyimpulkan bahwa G_1 dan G_2 berukuran sama. Kita tahu bahwa dua graf yang orde dan ukurannya sama, belum tentu isomorfik. Sebagai contoh perhatikan dua graf pada Gambar 2.13 di bawah ini. Dua graf tersebut masing-masing berorde enam dan ukurannya sembilan, akan tetapi tidak isomorfik.



Gambar 7.4 graf G1 dan graf G2 tidak isomorfik

Tampak sulit untuk memperlihatkan bahwa graf G_1 dan G_2 pada Gambar 7.4 di atas adalah tidak isomorfik, karena kita harus meneliti setiap pemetaan satu-sate dari $V(G_1)$ pada $V(G_2)$ atau dari $V(G_2)$ pada $V(G_1)$ gagal untuk diperlihatkan sebagai suatu isomorfisma. Namun demikian kita dapat menyederhanakan masalah tersebut dengan cara sebagai berikut. Pandang satu pemetaan satu-satu Φ dari $V(G_1)$ pada $V(G_2)$.

Titik-titik v_1, v_2 *dan* v_5 dari G_2 merupakan tiga titik yang saling bertetangga. Dengan demikian. seharusnya memetakan tiga titik dalam G_1 ke dalam v_1, v_2 dan v_5. Jika Φ suatu isomorfisma, maka dua titik dari G1 adalah bertetangga jika dan hanya jika dua titik bayangan dari G_2 di bawah Φ juga bertetangga. Akibatnya tiga titik dari G_1 yang bayangannya v_1, v_2 *dan* v_5 juga harus merupakan tiga titik yang saling bertetangga. Akan tetapi G_1 tidak memuat tiga titik yang saling bertetangga. Dengan demikian antara $V(G_1)$ dan $V(G_2)$ tidak ada suatu isomorfisma, atau G_1 tidak isomorfisma dengan G_2.

Teorema 5.2

Jika G_1 dan G_2 merupakan graf isomorfik, maka derajat titik-titik dari G_1 secara tepat merupakan derajat titik-titik dari G_2.

Bukti:

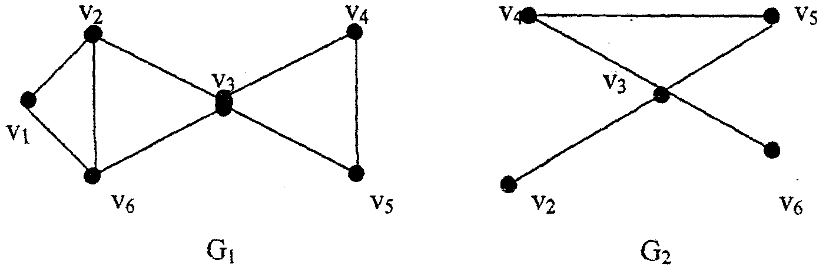
Karena G_1 dan G_2 isomorfik, maka terdapat suatu isomorfisma $\Phi = V(G_l) \rightarrow V(G_2)$. Misalkan u suatu titik sembarang dari G_1 dan misalkan $d(u) = n$. Selanjutnya misalkan bayangan u dalam G_2 adalah v, yaitu $\Phi(u) = v$. Akan ditunjukkan bahwa d(v) = n.

Karena $d(u) = n$, maka G_1 memuat titik-titik u_i, $u_2, \ldots, u_n$ yang bertetangga dengan u. Misalkan $\Phi(u_1) = v$; untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Maka v bertetangga dengan tiap titik v_1, v_2, …, v, karena u merupakan suatu isomorfisma. Titik-titik tersebut yaitu v_1, v_2, $\ldots, v_n$ merupakan titik-titik yang bertetangga dengan v, karena u bertetangga dengan x dalam G_1 jika dan hanya jika v bertetangga dengan $\Phi(x)$ dalam G_2. Jadi $d(v) = n$.

Graf Terhubung

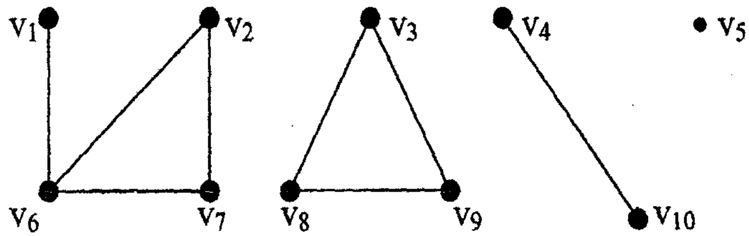
Setiap graf G terdiri atas beberapa graf bagian. Komponen graf adalah jumlah maksimum graf bagian dalam sebuah graf G. Sebuah graf disebut terhubung (*connected*) jika graf tersebut hanya terdiri atas satu bagian (satu komponen). Jika G adalah graf terhubung, kita katakan bahwa komponen dari G adalah 1, dinotasikan ω (G) = 1.

Konsep lintasan dapat digunakan untuk menjelaskan apa yang dinamakan graf terhubung. Dalam graf terhubung G, maka untuk setiap pasang titik sembarang u dan v di G, terdapat suatu lintasan dari titik u menuju titik v. Gambar 7.5 di bawah ini memuat contoh graf G_l dan graf G_2 yang keduanya merupakan graf terhubung.



Gambar 7.5 graf terhubung G1 dan G2

Apabila suatu graf tidak terhubung, maka graf tersebut terdiri atas beberapa komponen yang masing-masing komponennya adalah suatu graf terhubung atau suatu titik terpencil. Sebagai contoh perhatikan graf G pada Gambar 7.6 di bawah ini. Graf G tersebut merupakan graf tidak terhubung yang memiliki 4 buah komponen.



Gambar 7.6 graf tidak terhubung G

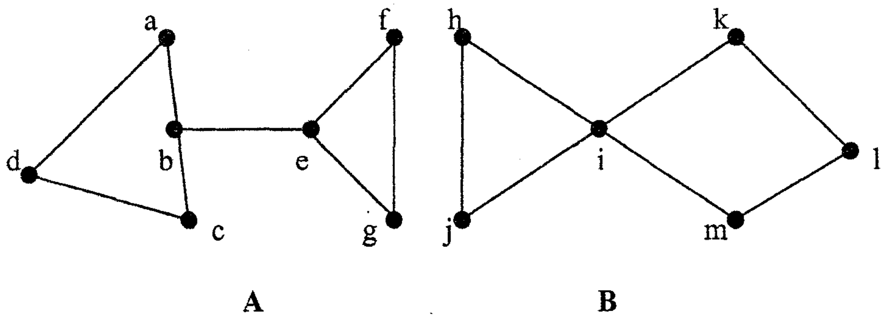
Berapa banyak sisi atau titik yang harus dihapus (dibuang) dari sebuah graf tertentu, agar graf tersebut menjadi graf tak terhubung? Persoalan tersebut dalam teori graf dapat diformulasikan menjadi keterhubungan titik dan keterhubungan sisi.

Definisi 2.1

Keterhubungan sisi pada graf G, yang dilambangkan dengan $\lambda(G)$, adalah banyaknya sisi paling sedikit yang dapat dihapus, demikian sehingga graf G menjadi graf tak terhubung. Jika $\lambda(G) \geq k$, maka G disebut graf terhubung dalam k-sisi.

Contoh 2.1

Graf A dapat menjadi tak terhubung dengan menghapus sisi (b, e), sedangkan graf B dapat menjadi tak terhubung dengan menghapus sisi (h, i) dan sisi (j,i). Graf A disebut graf dengan keterhubungan 1-sisi, sedangkan graf B mempunyai keterhubungan 2-sisi.



Gambar 7.7 Graf A dan Graf B

Definisi 2.2

Sebuah himpunan pemotong (*cutset*) *pada sebuah graf terhubung G adalah sebuah himpunan S yang memuat sisi-sisi dengan sifat-sifat berikut:*

a. penghapusan semua sisi pada S membuat G menjadi tak terhubung;

b. penghapusan beberapa sisi pada S (*tapi tidak semuanya*) *tidak mengakibatkan G tak terhubung.*

Definisi 2.3

Himpunan pemotong dengan hanya satu sisi disebut jembatan (*bridge*).

Contoh 2.2

Pada Gambar 2.38, himpunan pemotong untuk graf A adalah {(a,d), (c,d)} atau {(a,b), (b,c)}, atau {(b,e)}, atau {(e,f), (e,g)}. Sisi (b,e) merupakan jembatan.

Definisi 2.4

Sebuah titik pemotong adalah sebuah titik tunggal *yang penghapusannya mengakibatkan sebuah graf tak terhubung.*

Definisi 2.5

Keterhubungan titik k(G) dari graf terhubung G adalah jumlah titik paling sedikit yang penghapusannya mengakibatkan G tak terhubung. Jika kG) ≥ k, maka graf G disebut terhubung dengan k-titik.

Contoh 2.3

Pada Gambar 2.38, titik b atau e dalam graf A atau titik i dalam graf B merupakan titik-titik pemotong. Graf A dan graf B mempunyai keterhubungan 1.

IV. Uji Kompetensi

Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini

Misalkan $G = (V_1, E_l)$ dan $H = (V_2,E2)$. Jika $V1 = V2$ dan dua titik dalam G bertetangga jika dan hanya jika dua titik yang sama dalam H tidak bertetangga, maka G disebut dari H.

PERTEMUAN 8-9

PERTEMUAN VIII-IX

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Pengetahuan Dasar Graf

II. Sasaran Pembelajaran

Mahasiswa memahami penerapan graf dalam hal:

1. Graf Euler
2. Graf Hamilton

III. Ringkasan Materi

Graf Euler dan Graf Hamilton

Sebuah sirkit di graf G yang memuat semua sisi G disebut sirkit Euler. Sebuah graf yang memuat sirkit Euler disebut graf Euler. Sebuah siklus (*cycle*) adalah sebuah sirkit/jejak tertutup (*closed trail*) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam suatu siklus disebut panjang dari siklus tersebut. Siklus dengan panjang k disebut panjang k-siklus. Sebuah siklus yang memuat semua titik sebuah graf disebut siklus Hamilton. Graf yang memuat siklus Hamilton disebut graf Hamilton. Jadi graf terhubung G disebut graf Euler jika ada jejak (*trail*) tertutup yang memuat semua sisi pada graf G, sedangkan graf Hamilton adalah sebuah graf terhubung G jika ada sebuah siklus yang memuat setiap titik graf G itu.

Apabila jejak Euleur tidak disyaratkan harus tertutup, maka graf ini disebut graf semi-Euleur.

Untuk memahami lebih jauh mengenai graf Euler dan graf Hamilton ada beberapa teorema yang akan dijelaskan.

Teorema 9.3.

Misalkan G adalah graf terhubung. G adalah graf Euler jika dan hanya jika semua titik pada G mempunyai derajat genap.

Bukti:

Misal G mempunyai suatu sirkit Euler. Dalam menelusuri sirkit Euler tersebut maka setiap titik yang dilalui mengalami 2 hal sebagai berikut. Pertama, titik tersebut dilalui dengan menggunakan sisi tertentu dan kedua, dari titik tersebut melalui titik lain dengan sisi tertentu. Karena sisi G adalah bagian sirkit Euler yang ada, maka jelas setiap titik G mempunyai deraj at genap.

Dengan induksi

- Jika tidak ada sisi maka graf memuat satu titik *X* dan dapat dikatakan sirkit *X*.
- Jika pernyataan sembarang graf dengan semua titiknya berderajat genap, dengan paling banyak *k sisi* mempunyai sirkit Euler benar, maka:

  akan ditunjukkan untuk k + 1 *sisi* mempunyai sirkit Euler.

  Misal: G graf dengan k + 1 sisi. Misal sirkitnya C. Jika C memuat semua sisi, maka terbukti. Sebaliknya penghapusan sirkit C dari G sehingga graf G tidak terhubung, tetapi derajat setiap titik genap dan iumlah titik paling banyak k. Menggunakan hipotesis induksi untuk setiap komponen G memuat sirkit C, Cn, n'. Semua sirkit ini terurut dalam sirkit Euler dalam G. Terbukti.

Gambar 5.39 merupakan contoh graf Euler, semi Euler dan bukan graf Euler. Salah satu jejak Euler yang dimulai dari titik A pada Gambar 5.39(a)|alah:

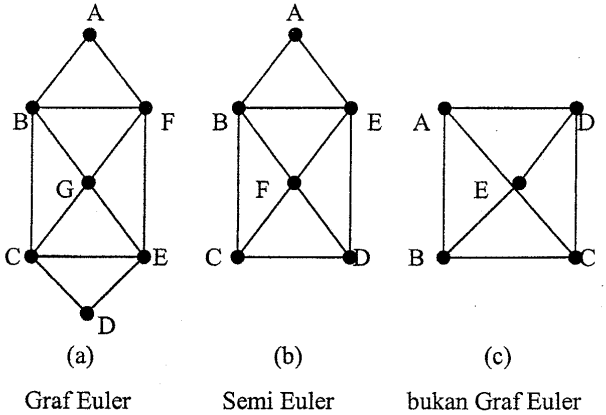
$$A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to E \to C \to G \to F \to A.$$

Jejak tidak tertutup Euler dengan titik awal C dan titik akhir *D* pada Gambar 5.39(b)|alah:

$$C \to B \to A \to E \to D \to C \to F \to E \to B \to F \to D.$$

Sekarang, bagaimana dengan Gambar 9.1(c)?

Mengapa?



Gambar 9.1 Graf Euler, semi Euler, dan bukan graf Euler

Untuk menciptakan sebuah jejak Euler kita dapat menggunakan alogaritma berikut:

Algoritma untuk menyusun jejak Euler.

Masukan : $G = (V,E)$ adalah graf Euler dengan n simpul dan m sisi.

Keluaran : Jejak Euler bernama *JE* dengan m sisi dan E menjadi himpunan kosong sehingga menjadi graf N_n.

Langkah-1angkah berikut ini akan menghasilkan jejak Euler.

A. Langkah awal: ambil sembarang simpul awal v pada G.
B. Pemilihan sisi-sisi $\{e_1, e_2, ..., e_m,\}$
   1. Pemberian nilai awal

      Lambangkan nomor sisi dengan k dan awalilah k dengan nilai 1, dicatat sebagai $k \leftarrow 1$.

      Pilih sebuah sisi, namakanlah e_1 yang salah satu simpul ujungnya ialah v.

      Sisihkah e_1 dari himpunan E, dicatat sebagai $E \leftarrow E -(e_1)$.

      Tempatkan e_1 pada *JE,* dicatat sebagai $JE \leftarrow (e_1)$.
   2. Ulangi langkah-1angkah berikut:

      Tambahlah nomor sisi dengan 1, dicatat sebagai k $\leftarrow k + 1$

      Ambil sisi selanjutnya, namakanlah e_k yang membentuk jejak dengan sisi e_{k-1}, sedemikian sehingga e_k boleh berupa jembatan apabila tidak ada pilihan lain pada himpunan E yang tersisa.

      Sisihkan *ek* dari himpunan E, dicatat sebagai $E \leftarrow E$

- $\{e_k\}$.

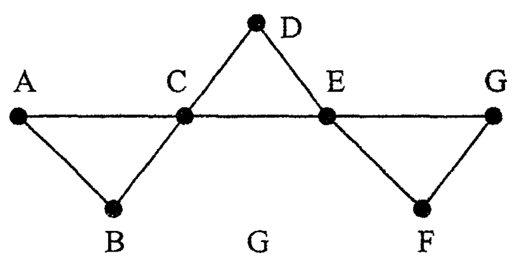
Tempatkan e_k pada *JE,* dicatat sebagai $JE \leftarrow JE - \{e_k\}$.

Sampai semua sisi terpakai, yaitu $k = m$ (atau E = Z).

Maka $JE = \{e_l, e_2, ..., e_m,\}$ merupakan jejak Euler.

Contoh 5.11

Susunlah suatu jejak Euler pada graf Euler G di bawah ini:



Gambar 9.2 Graf G

Penyelesaian:

Himpunan titik graf G ialah *V* = {*A, B, C, D, E, F, G*} dan himpunan sisinya ialah E = {*AB, AC, BC, CD, CE, DE, EF, EG,FG*}. Dalam hal ini sebagai simpul v kita pilih simpul C. Rincian jejak algoritma tersebut ditabelkan dibawah ini; dalam hal ini terjadi 8 kali iterasi, yaitu *k = 2, 3, ..., 9.*

K	sisi e_k	himpunan E terakhir	Jalur *JE*
1	E_1 = *CD*	*E* - (*CD*)	{*CD*}
2	E_2 =	*E* - {*CD,DE*}	{*CD,DE*}

	DE		
3	E_3 = *EF*	*E* - (*CD, DE,EF*)	{*CD,DE,EF*}
4	*E4* = *FG*	*E* - (*CD,DE,EFFG*}	{*CD,DE,EFFG*}
5	E_5 = *GE*	(*AB,AC,BC,CE*)	{*CD,DE,.EF,FG,GE*}
6	E_6 = *EC*	{*AB,AC,BC*}	{*CD,DE,EF,FG,GE,EC*}
7	E_7 = *CB*	{*AB,AC*}	{*CD,DE,EF,FG,GE,EC,CB*}
8	E_8 = *BA*	{*AB*}	{*CD, DE, EF, FG, GE, EC, CB, BA*}
9	E_9 = *AC*	{}	(*CD, DE,EF,FG, GE, EC, CB, BA,AC*}

Jadi, j ej ak Euler itu ialah C → *D* → *E* → *F* → *G* → *E* → *C* → *B* → *A* → *C.* Dari jejak ini dapat diamati derajat setiap titik graf, yaitu $d(C) = d(E) = 4$.

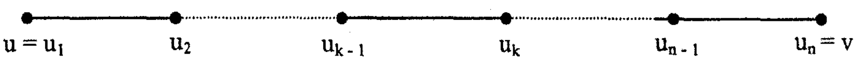
Teorema 9.4

Misalkan G adalah graf sederhana dengan $n \geq 3$ titik sedemikian sehingga $d(u) + d(v) \geq n$ untuk setiap pasang titik u dan v yang tidak bertetangga, maka G adalah graf Hamilton.

Bukti:

Akan ditunjukkan *G* Hamilton.

Misal *G* bukan Hamilton yang memenuhi kondisi $(d(u) + d(v)) \geq n$. Asumsikan bahwa titik di *G* dengan penambahan himpunan sisi {u, v} akan membentuk graf Hamilton, untuk dua titik u, v yang tidak bertetangga. Karena *G* bukan Hamilton dan *G* + {*u,* v} Hamilton, maka untuk setiap siklus Hamilton di *G* + {*u,* v} memuat siklus {u,v}. Sehingga pada *G* terdapat lintasan Hamilton u_i, U2, ..., u_n dengan ut = *n* dan *u„* = *v.*



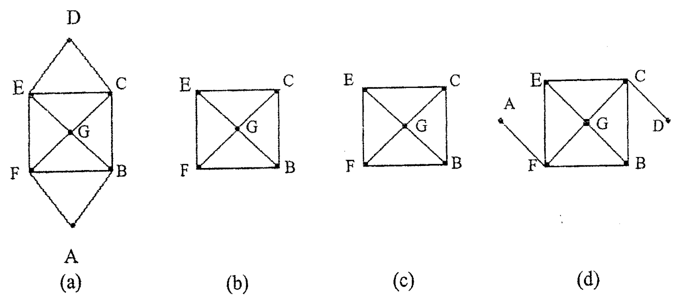
Sekarang jika setiap $2 < k < n$, $\{u_1, u_k\} \in E(G)$ maka $\{u_{k-1}, u_n\} \in E(G)$. Sebab kalau tidak $u_1 u_k$ ... u_n u_{k-1}, u_{k-2} ... u_n, adalah siklus Hamilton dari G, sehingga untuk setiap titik Uk yang bertetangga dengan titik v, akan terdapat titik lainnya tidak bertetangga dengan v.

Jadi setiap u_l bertetangga ke *r* titik dari $\{u_2, u_3, ..., u_n\}$ maka paling sedikit r titik, jadi jika $d(v_1) > r$, maka $d(u_n) > (n - 1) - d(v_1)$ sehingga $d(v1) + d(u_n) > n - 1$. Dengan demikian hipotesis $d(v1) + d(u,) \geq n$ terbukti.

Sekarang amati Gambar 5.41 di bawah ini. Pada contoh sebelumnya telah diperlihatkan bahwa graf pada Gambar 9. 1(a) adalah graf Euler. Selain itu graf ini juga merupakan graf Hamilton. ,Sirkit Hamiltonnya adalah dengan jalur *A* → *B* → *C* → *D* → *E* → *G* → *F* → *A.* Graf pada Gambar 5.41(b) adalah suatu graf Euler dan salah satu jalurnya adalah *B* → *C* → *G* → *F* → *E* → *G* → *B.* Selain itu graf ini juga semi Hamilton dengan lintasannya ialah *B*→ *C* → *G* → *E* → *F,* tetapi graf ini bukan graf Hamilton. Mengapa?

Mudah diperiksa bahwa graf pada Gambar 5.41(c) bukan graf Euler, tetapi graf Hamilton dengan sirkitnya ialah *B → C → G → E → F → B.*

Selanjutnya pada Gambar 5.41(d) bukan graf Euler dan bukan pula graf Hamilton. Jadi dapat disimpulkan bahwa tidak ada ciri-ciri yang menunjukkan adanya hubungan antara graf Hamilton dan graf Euler.



Gambar 9.2 Graf G

IV. Uji Kompetensi

Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini

Berikan contoh sebuah graf tidak terhubung terdiri atas empat komponen yang masing-masing merupakan graf lengkap!

PERTEMUAN 10

PERTEMUAN X

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Pengetahuan Dasar Graf

II. Sasaran Pembelajaran

Mahasiswa memahami penerapan salah satu penerapan graf yaitu pohon

III. Ringkasan Materi

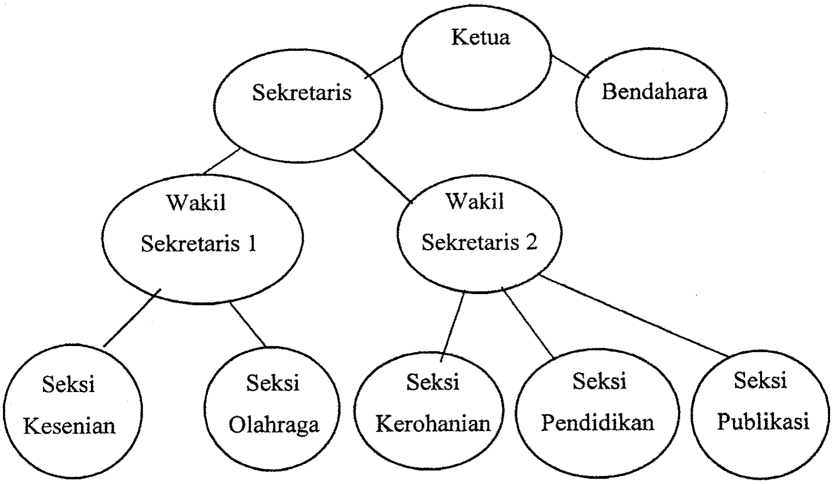
Kirchoff (1824 - 1887) mengembangkan teori pohon untuk diterapkan dalam jaringan listrik. Selanjutnya Arthur Cayley (1821 - 1895) mengembangkan graf jenis ini sewaktu mencacah isomer hidrokarbon jenuh $C_nH2, + 2.$ Sekarang pohon digunakan secara luas dalam linguistik dan ilmu komputer.

Definisi 10.1

Pohon ialah graf terhubung yang tidak memiliki siklus.

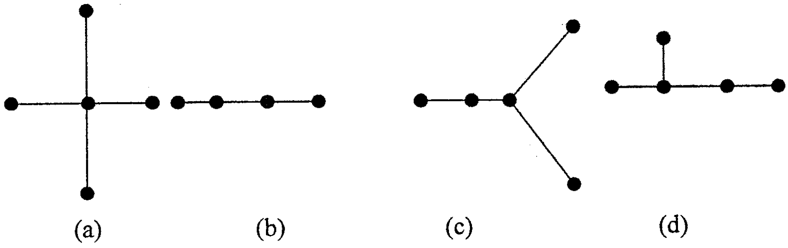
Contoh 10.1

Hirarki administrasi organisasi OSIS suatu SMA berbentuk seperti pada Gambar 10.1 merupakan pohon.



Gambar 10.1 Organisasi OSIS suatu SMA

Contoh 10.1



Gambar 10.2 Graf G

Beberapa sifat dasar dari sebuah pohon, akan diuraikan dalam teorema-teorema berikut ini.

Teorema 10.1

Jika T potion, maka untuk setiap dua titik u dan v yang berbeda di T terdapat tepat satu lintasan (*path*) *yang menghubungkan kedua titik tersebut.*

Bukti:

Misalkan *u* dan v adalah dua titik yang berbeda di pohon *T.* Karena *T* graf terhubung, terdapat lintasan yang menghubungkan u dan v. Andaikan P dan P_2 adalah dua lintasan berbeda di *T* yang menghubungkan *u* dan v. Misalkan panjang *P,* kurang dari atau sama dengan panjang P_2.

Telusuri lintasan P, dari *u* ke v. Misalkan *W,* titik pertama di *P dan* P_2, sedemikian hingga titik berikutnya tidak di P_2. Ini terjadi mengingat T graf sederhana serta P dan P_2 berbeda. Selanjutnya, misalkan titik W_2 adalah titik berikutnya yang terletak di *P dan P,.* Maka sernua sisi dari *W,* ke W_2 membentuk sebuah sirkuit di *T.* Ini bertentangan dengan definisi bahwa pohon T tidak memiliki sirkuit. Jadi pengandaian salah. Dengan demikian teorema terbukti. 11

Teorema 10.2

Banyaknya titik dari sebuah pohon T sama dengan banyaknya sisi ditambah 1 atau ditulis Jika T pohon, maka $|V(T)| = |E(T)| + 1$.

Bukti:

Kita buktikan teorema di atas dengan induksi pada $|V(T)|$. Jika pohon *T* mempunyai satu titik, jelas banyak sisi *T* adalah nol. Jadi teorema benar untuk pohon *T* dengan satu titik. Asumsikan bahwa pernyataan dalam teorema benar untuk pohon dengan *k* titik, artinya jika pohon *T* mempunyai paling banyak *k* titik, maka $|V(T)| = |E(T)| + 1$.

Akan ditunjukkan bahwa jika pohon *T* mempunyai $k + 1$ titik maka $|V(T)| = |E(T)| + 1$. Misalkan *T* adalah pohon dengan $k + 1$ titik dan λ adalah sebuah sisi T. Maka $T - \lambda$ memiliki tepat dua komponen *T dan* T_2 dan masing-masing komponen adalah pohon dengan titik kurang dari $k + 1$. Sehingga menurut asumsi, $|V(T)| = |E(T)| + 1$; i = 1, 2.

Selanjutnya $|E(T)| = |E(T)| + |E(T_2)| + 1$, sehingga

$$\begin{aligned} |V(T)| &= |V(T_1)| + |V(T_2)| \\ &= |E(T_1)| + 1 + |E(T_2)| + 1 \\ &= (|E(T_1)| + |E(T_2)| + 1) + 1 \\ &= |E(T)| + 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian teorema terbukti.

Teorema 5.7

(a) *Bila suatu sisi dihapus dari pohon* (*dan titiknya tetap*)*, maka diperoleh graf yang tidak terhubung dan karenanya graf itu bukan pohon.*

(b) *Bila sebuah sisi ditambahkan pada pohon* (*tanpa menambah titik baru*)*, diperoleh graf yang memiliki siklus dan karena itu graf tersebut bukan pohon.*

Pembuktiannya dikerjakan sebagai latihan.

Teorema 10.2

Pernyataan berikut ini ekuivalen.

(a) *T adalah pohon.*

(b) *T tidak memiliki siklus dan banyak titiknya lebih satu dari banyak sisinya*

(c) *T terhubung dan banyak titiknya lebih satu dari banyak sisinya.*

(d) Ada tepat satu lintasan (*path*) *antara setiap dua titik di T.*

(e) T terhubung dan penghapusan sembarang sisi pada T menghasilkan graf yang tidak terhubung

(f) T tidak memiliki siklus dan penambahan sembarang sisi menghasilkan siklus pada graf itu.

Pernyataan-pernyataan di atas merupakan sifat-sifat dari sebuah pohon. Setiap pernyataan di atas dapat dibuktikan dengan menggunakan pernyataan sebelumnya.

Bukti:

Jika n = 1, maka semua pernyataan di atas adalah benar. Oleh karena itu dapat dimisalkan bahwa $n \geq 2$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Akan dibuktikan dengan menggunakan induksi terhadap jumlah sisi m. *T* adalah pohon, maka *T* tidak mengandung siklus. Bila sebuah sisi dihapus dari *T,* maka diperoleh sebuah graf yang terdiri dari dua buah pohon T_1 dan T_2, dengan jumlah sisi masing-masing m_1 *dan* m_2 yang lebih kecil dari *m.* Jumlah titiknya masing-masing n_1 *dan* n_2, dengan $n = n, + n_2$. Sesuai dengan asumsi induksi, maka $m_1 = n_1 - 1$ dan $m_2 = n_2 - 1$. Bila sisi yang dihapus dikembalikan, maka akan diperoleh $m = m, + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_1 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1$ atau $(n_1 + n) = m + 1$.

Pembuktian lainnya silakan kerjakan sebagai latihan.

Teorema 10.3

Jika $P = (v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ \ldots\ e_n\ v_n)$ *sebuah lintasan terpanjang di pohon T, maka*

$$d(v_0) = d(v) = 1.$$

Bukti:

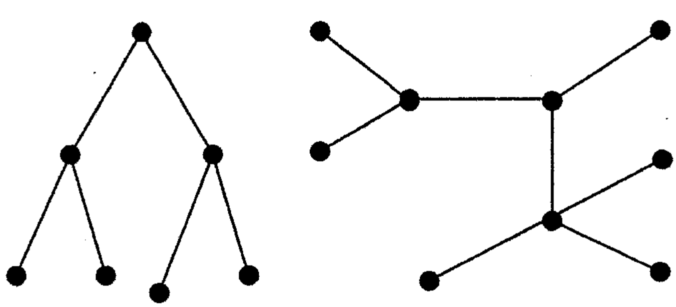
Misalkan T adalah sebuah pohon dan P = (v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 … e_n v_n) lintasan terpanjang di *T.* Andaikan $d(v_0) \neq 1$, maka $d(v_0) > 1$. Berarti ada paling sedikit dua sisi *T* yang terkait (insiden) dengan v_0. Misalkan $e \neq v_0v_1$ adalah sebuah sisi T yang terkait dengan v_0. Karena *P* lintasan terpanjang di *T* dan *T* sederhana, sisi e harus menghubungkan v_0 dengan sebuah titik lain di *P,* katakan titik v_k, $k \neq 0,1$. Akibatnya (v_0, v_1, v_2, …, v_k, v_p) membentuk siklus di *T,* ini bertentangan dengan kenyataan bahwa *T* sebuah pohon. Dengan kata lain $d(v_0) = 1$. Dengan argumen yang serupa, dapat ditunjukkan $d(v_n) = 1$. Teorema terbukti.

Definisi 5.7

Hutan (*forest*) *adalah graf tanpa siklus.*

Contoh 10.2

Gambar 10.3 berikut inii menunjukkan hutan dengan dua komponen yang masing-masing adalah pohon.



Gambar 10.3 Hutan dengan dua komponen

IV. Uji Kompetensi

Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini

Diketahui graf dengan lima buah titik. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing titik adalah:

a. 2, 3, 1, 1, 2
b. 2, 3, 3, 4, 4

PERTEMUAN 11

PERTEMUAN XI

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Pengetahuan Dasar Graf

II. Sasaran Pembelajaran

Mahasiswa memahami penerapan graf dalam hal pohon pembangun

III. Ringkasan Materi

Pohon Pembangun

Definisi 11.1

Misalkan G adalah sebuah graf. Sebuah pohon di G yang memuat semua titik G disebut pohon pembangun/rentang (*spanning tree*) *dari G.*

Teorema 11.1

Graf G terhubung jika dan hanya Jika G memuat pohon pembangun.

Bukti:

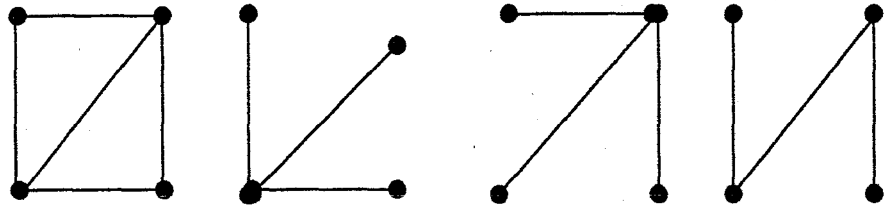
Jika graf G memuat pohon pembangun, jelas G terhubung. Kita buktikan konversi pernyataan ini dengan induksi pada *JE*(*G*)*/*. Jika *G* terhubung dan $|E(G)| = 0$, maka $G = K_1$, sehingga jelas G memuat pohon pembangun.

Asumsikan: setiap graf terhubung dengan k sisi memuat pohon pembangun.

Akan ditunjukkan bahwa, jika *G* graf terhubung dengan k + 1 sisi, maka G memuat pohon pembangun.

Pandang sebuah graf terhubung *G* dengan k + 1 sisi. Jika G tidak memuat siklus, maka *G* sebuah pohon pembangun. Jika G memuat siklus dan misalkan e adalah sebuah sisi dari siklus di G, maka graf $G_1 = G - e$ terhubung dengan k sisi. Sehingga berdasarkan asumsi, G_1 memuat pohon pembangun. Sebut *T,* pohon pembangun *di* G_1*.* Jelas, *T* adalah juga pohon pembangun dari *G.* Teorema terbukti.

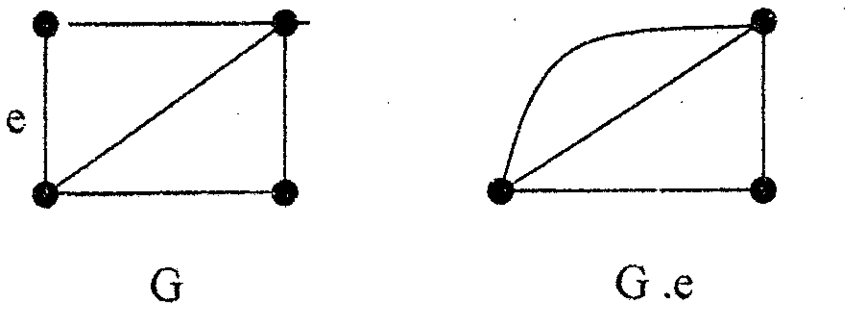
Sebuah graf terhubung mungkin memuat lebih dari satu pohon pembangun, seperti terlihat pada Gambar 11.1. Graf G memuat pohon pembangun T_1, T_2 *dan* T_3.



G T₁ T₂ T₃

Gambar 11.1 Graf G dan pohon pembangun T1, T2, dan T3

Selanjutnya τ(G) melambangkan banyaknya pohon pembangun di graf G. Adakah cara yang dapat dipakai untuk menentukan banyaknya pohon pembangun di dalam sebuah graf? Jawabnya akan diberikan dalam teorema berikut, namun sebelumnya kita perlu memahami notasi-notasi berikut. Misalkan e adalah sebuah sisi dari graf *G.* Sebuah graf yang diperoleh dari *G* dengan menghapus sisi *e* dari G dan menyatukan kedua titik akhir dari *e,* dilambangkan dengan G. *e* (lihat Gambar-5.46).



Gambar 11.2 Graf G dan Graf G.e

Perhatikan bahwa banyaknya komponen G sama dengan banyaknya komponen *G. e,* begitu pula $|E(G.e)| = |E(G)| - 1$ dan $|V(G.e)| = |V(G)| - 1$. Perlu dicatat bahwa jika *T* adalah pohon dan *e sisi* dari *T,* maka *T.e* juga sebuah pohon.

Teorema 11.2

Jika e sebuah sisi pada graf G, maka $|\tau(G.e)| = |\tau(G - e)| + |\tau(G.e|$.

Bukti:

Misalkan e adalah sebuah sisi pada graf *G.* Setiap pohon pembangun *G* yang tidak memuat sisi *e* adalah juga pohon pembangun di *G - e,* begitu pula setiap pohon pembangun di *G - e* adalah pohon pembangun di G yang tidak memuat e. Sehingga $\tau(G\text{-}e)$ sama dengan banyaknya pohon pembangun di *G* yang tidak memuat sisi *e.* Sekarang, setiap pohon pembangun G yang memuat sisi *e,* berkorespondensi dengan sebuah pohon pembangun *G. e.* Sehingga $|\tau(G.e)| = |\tau(G - e)| + |\tau(G.e)|$ terbukti.

Pohon Pembangun Minimum

Sebelum membahas pohon pembangun minimum, kita bahas dahulu pengertian graf berbobot. Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot). Bobot pada tiap sisi dapat menyatakan jarak antara dua buah kota, waktu tempuh antara dua buah kota, biaya perjalanan yang kita tempuh dan sebagainya.

Di dalam graf berbobot, bobot sebuah pohon adalah jumlah bobot sisi-sisi pohon itu. Pohon jumlah minimal di dalam sebuah graf berbobot adalah pohon jumlah yang bobotnya sekecil mungkin. Dengan kata lain, pohon jumlah minimal adalah pohonjumlah sedemikian hingga tidak ada pohon jumlah lain yang memiliki bobot kurang darinya.

Jika G adalah graf berbobot, maka bobot pohon pembangun T dari G didefinisikan sebagai jumlah bobot semua sisi di T. Pohon pembangun yang berbeda mempunyai bobot yang berbeda pula. Di antara semua pohon pembangun di G, pohon pembangun yang berbobot minimum dinamakan pohon pembangun minimum, merupakan pohon pembangun yang paling penting. Pohon pembangun minimum mempunyai terapan yang Was dalam praktek.

Algoritma yang dapat digunakan untuk mendapatkan pohon pembangun minimum ditemukan oleh Kruskal.

Algoritma Kruskal untuk Pohon Pembangun Minimum

Algoritma ini akan mendapatkan pohon pembangun minimum, jika ada, untuk graf berbobot G yang memiliki *n* titik, dengan $n \geq 2$. Dalam algoritma ini, S adalah himpunan titik dan T adalah himpunan sisi.

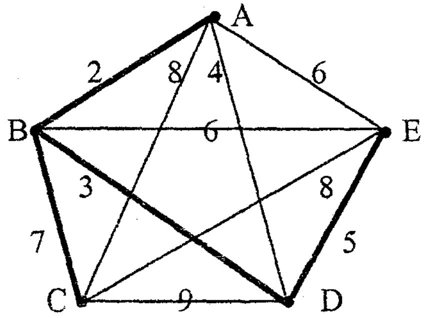
Langkah 1. (mulai). Jika tidak ada sisi, G tidak terhubung dan karena itu tidak memiliki pohon pembangun minimum. Jika tidak demikian, ambil sebuah sisi dengan bobot terkecil (rangkaian dapat diputuskan secara sembarang). Tempatkan sisi itu di T dan titiknya di S.

Langkah 2. (pemeriksaan untuk penyelesaian). Jika T memuat $n-1$ sisi, maka berhentilah; sisi-sisi di T dan titik-titik di S membentuk pohon pembangun minimum. Jika tidak demikian, lanjutkan ke langkah 3.

Langkah 3. (ambil sisi berikutnya). Tentukan sisi-sisi berbobot terkecil yang tidak membentuk siklus dengan sembarang sisi yang ada di T. Jika tidak ada sisi seperti itu, G tidak terhubung dan tidak memiliki pohon pembangun minimum. Jika tidak demikian, pilih satu sisi sejenis itu (rangkaian dapat diputus secara sembarang) dan tempatkan sisi itu di *T* dan titiknya di *S.* Kembalilah ke langkah 2.

Contoh 11.1

Gunakan algoritma Kruskal untuk menentukan pohon pembangun dengan bobot minimum dari graf berikut.



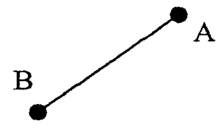
G

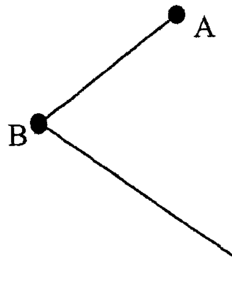
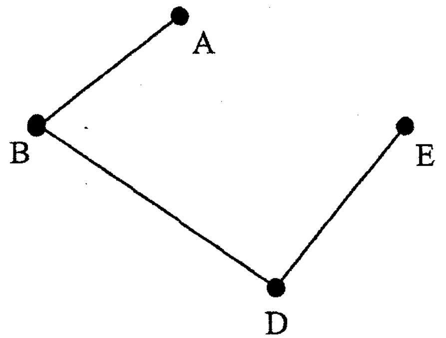
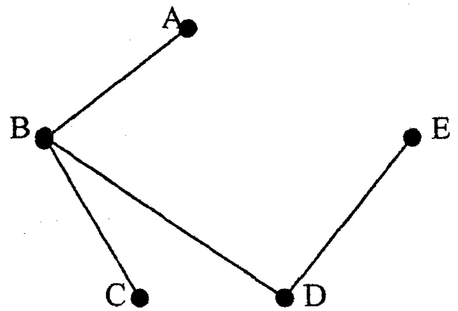
Gambar 11.3 Graf berbobot G

Jawab:

Sisi-sisi graf diurut menaik berdasarkan bobotnya:

Sisi	(A, B)	(B, D)	(A, D)	(D, E)	(A, E)	(B, E)	(B, C)	(A, C)	(C, E)	(C, D)
Bobot	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9

Langkah	Sisi	Bobot	Pohon Pembangun
0			• A • B • C • D • E
1	(A, B)	2	

2	3	
3	4	Ditolak, karena membentuk siklus 4
4	5	
5	6	Ditolak, karena membentuk siklus 4
6	6	Ditolak, karena membentuk siklus 4
7	7	
8	8	Ditolak, karena membentuk siklus 4
9	8	Ditolak, karena membentuk siklus 4
10	9	Ditolak, karena membentuk siklus 4

Jadi, apabila algoritma Kruskal dilakukan terhadap graf pada Gambar 5.47, maka hasilnya diperlihatkan dengan sisi yang dicetak tebal. Dengan demikian diperoleh pohon pembangun dengan bobot minimum: 2 + 3 + 5 + 7 = 17.

IV. Uji Kompetensi

Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini

1. Kota *A* dan kota *B* dihubungkan oleh sebuah jalan umum biasa, sedangkan kota B dan kota C dihubungkan oleh dua jalan: satu jalan umum biasa dan satu lagi jalan bebas hambatan yang dikenakan biaya bagi siapa saja yang melaluinya. Buatlah dua graf yang menggambarkan situasi seperti ini.
2. Silsilah keluarga dapat dibuat atau dinyatakan dalam bentuk sederhana berupa graf. Graf tersebut biasanya berbentuk.

PERTEMUAN 12-13

PERTEMUAN XII-XIII

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Graf Planar

II. Sasaran Pembelajaran

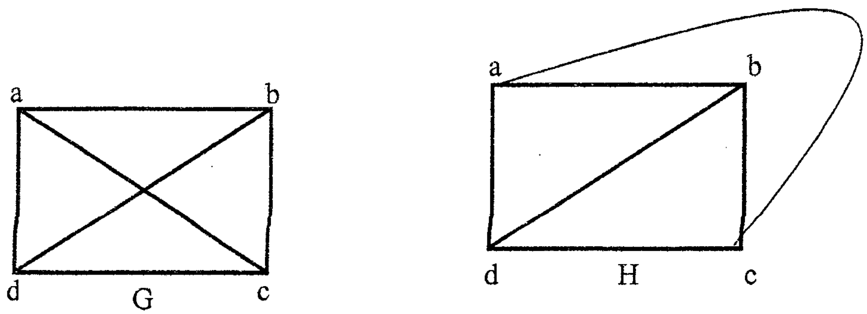
Mahasiswa memahami penerapan graf planar

III. Ringkasan Materi

Graf Planar

Definisi

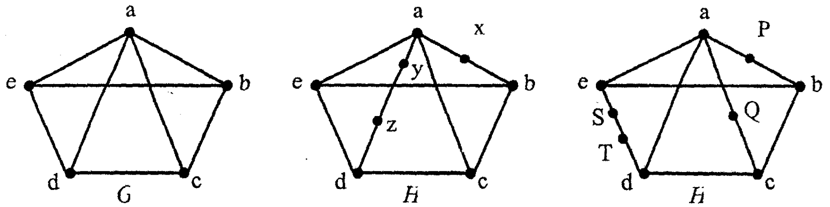
Sebuah graf G disebut planar, jika G dapat digambar pada bidang datar sedemikian hingga sisi-sisinya tidak ada yang saling nberpotongann, kecuali mungkin pada titik-titik akhir dari sisi-sisi tersebut. Graf planar G yang digambar pada bidang sedernikian hingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan kecuali mungkin pada titik-titik akhir sisi-sisi tersebut disebut graf bidang; atau sering-pula disebut pajangan (*embedding*) G. Graf bidang pasti graf planar, tetapi sebaliknya tidak berlaku. Sebagai contoh, graf G pada Gambar 12.1 di bawah adalah graf planar karena dapat digambar seperti graf *H;* tetapi graf G bukan graf bidang karena sisi-sisi *ac* dan *bd* dari G digambar saling berpotongann.



Gambar 12. 1 Graf Planar

Perlu dicatat bahwa sebuah graf G planar jika dan hanya jika graf sederhana yang dibentuk dari G dengan menghapus gelang (*loop*) dan mengganti sisi rangkap dengan sebuah sisi adalah graf planar. Sehingga dalam membicarakan graf-graf planar cukup dibatasi pada graf-graf sederhana saja.

Pandang sebuah graf G, Bentuk graf H dari G dengan cara menambah (menyisipkan) beberapa (mungkin nol) titik pada beberapa sisi G. Graf H disebut graf subdivisi dari G. Selanjutnya, jika Hl juga sebuah graf subdivisi dari G, maka kita sebut *H* dan *Hl homeomorfik* (lihat Gambar 12.2).



Gambar 12.2 Graf G, H, dan H1 Homeomorfik

Perhatikan bahwa, selain *H* homeomorfik dengan H_i, *H* juga homeomorfik dengan G. Begitu pula G dengan Hl adalah graf-graf yang homeomorfik. Jelas bahwa, sebuah graf homeomorfik dengan dirinya sendiri. Begitu pula, graf G planar jika dan hanya jika subdivisi G planar.

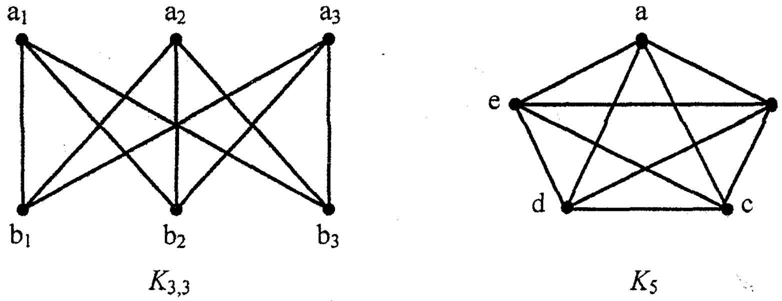
Teorema Kuratowski

Kuratowski memberikan karakteristik dari graf-graf yang tidak planar (nonplanar). Kuratowski membuktikan bahwa setiap graf nonplanar pasti memuat sebuah graf bagian yang isomorfik dengan subdivisi dari graf $K3,_3$ atau graf K5.

Sebelum membicarakan Teorema Kuratowski lebih lanjut, perlu ditunjukkan bahwa graf.bipartit komplit K_3,3 dan graf komplit *K5* adalah graf-graf yang tidak planar. Untuk menunjukkan bahwa graf $K_{3,3}$ atau graf Ks tidak planar akan digunakan nTeorema Kurva Jordann yang berbunyi sebagai berikut:

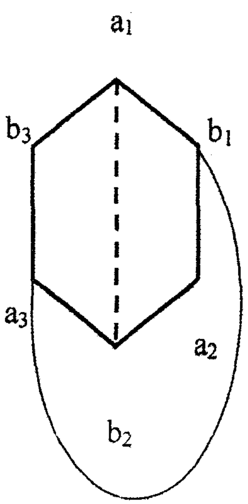
> *Misalkan J adalah sebuah kurva tertutup sederhana pada bidang datar D dan titik x terletak di interior J,- titik y terletak di exterior J Jika dibuat sebuah kurva yang menghubungkan titik x dan y pada bidang D, maka kurva tersebut pasti memotong kurva Jn.*

Kita tidak bermaksud membuktikan teorema ini, namun secara intuitif teorema tersebut mudah dipahami.



Gambar 12.3 Graf G

Pandang graf $K_{3,3}$ pada Gambar 12.3 (a). Graf tersebut memuat siklus C = a_i b_i a_2 b_2 a_3 b3 a_3.



Sisi $a_l b_2$ dari $K_{3,3}$ dapat digambar ndi dalamn atau ndi luarn siklus C.

Andaikata $a_l b_2$ digambar ndi dalamn siklus C, maka sisi $b_l a_3$ dari $K_{3,3}$ harus digambar ndi luarn siklus C (lihat Gambar 12.4).

Gambar 12.4 Graf G

Selanjutnya, pada siklus C = as b_l a_2 b_2 a_3 b_3 a_l pada Gambar 12.51, titik a_2 terletak ndi dalamn siklus C demikian juga titik b_3 terletak ndi dalamn siklus C. Maka, berdasarkan teorema kurva Jordan, sisi b_3a_2 akan memotong sisi alb2 dari $K_{3,3}$. Dengan demikian $K_{3,3}$ adalah graf nonplanar. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa graf K_5 nonplanar. Karena $K_{3,3}$ dan K_5 adalah graf-graf nonplanar memuat graf bagian yang isomorfik dengan subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_5. Kita sajikan temuan Kuratowski ini dalam teorema berikut tanpa membahas buktinya.

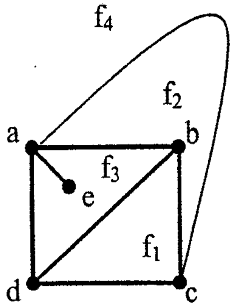
Teorema 12.1

Sebuah graf G nonplanar jika dan hanya jika G memuat sebuah graf bagian yang horneomorfik dengan graf $K_{3,3}$ atau K_5.

Walau secara matematis karakterisasi geometrik ini baik, namun secara praktis sulit untuk dipakai, sebab sulit menentukan apakah suatu graf tertentu memuat graf bagian yang homeomorfik dengan K3,3 atau K5. Pertanyaan yang muncul: Adakah karakterisasi secara aritmatik untuk menentukan apakah suatu graf itu planar atau nonplanar? Sampai saat ini, jawabnya nbelum adan! Namun usaha-usaha ke arah sana itu sudah dilakukan, seperti akan terlihat pada pembicaraan selanjutnya.

Formula Euler

Sebuah graf *G* membagi bidang menjadi beberapa daerah yang masing-masing disebut nmukan (*face*), yang disimbolkan dengan *f*. Himpunan semua nmukan graf bidang *G* dinotasikan dengan F(G). Banyaknya sisi *G* yang membatasi suatu muka *f* dari G disebut deraj at dari muka *f* dan dinotasikan dengan $d_G(f)$ atau d(*f*).



Misalnya, graf G pada gambar di samping ini mempunyai 4 muka yaitu: f_1, f_2, f_3 dan f_4. Jadi $F(G) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Gambar 12.5 Graf G

Terdapat 3 sisi yang membatasi muka f_1, yaitu *bc, cd* dan *bd;* dengan demikian $d(f_1) = 3$. Begitu pula terdapat 4 sisi yang membatasi muka f3 yaitu *ab, bd, ad* dan *ae;* sehingga $d(f_3) = 4$. Mudah dicek bahwa $d(f_2) = d(f_4) = 3.$

Berikut kita tinjau hubungan antara banyaknya titik, banyaknya sisi dan banyaknya muka dari suatu graf bidang yang terhubung.

Teorema 12.2 (Formula Euler)

Jika G graf bidang terhubung, maka

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Bukti: (Induksi pada $|E(G)|$)

Untuk $|E(G)| = 0$ diperoleh $|V(G)| = 1$ dan $|F(G)| = 1$.

Sehingga

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 - 0 + 1 = 2.$$

Asumsikan pernyataan berikut benar: Jika *G* graf bidang terhubung dengan

$$|E(G)| = k \geq 1, \text{ maka } |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Akan ditunjukkan pernyataan itu juga benar untuk $|E(G)| = k + 1$.

Misalkan G adalah sebuah graf bidang terhubung dengan k + 1 sisi.

Kita tinjau 2 kasus yaitu *G* memuat siklus dan G tidak memuat siklus.

Kasus 1: G memuat siklus

Misalkan e adalah sebuah sisi di siklus yang terdapat di *G,* maka graf $H = G - e$ merupakan graf bidang terhubung dengan *k* sisi. Sehingga berdasarkan asumsi berlaku $|V(H)| - |E(H)| + |F(H)| = 2$.

Selanjutnya, karena $|V(H)| = |V(G)|$, $|E(H)| = |E(G)| - 1$ *dan* $|F(H)| = |F(G)| - 1$,

maka $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = |V(H)| - (|E(H)| + 1) + (|F(H)| + 1)$

$= |V(H) - |E(H)| + |F(H)| - 1 + 1$

$= 2$

Jadi teorema terbukti untuk kasus ini.

Kasus 2: G tidak memuat siklus

Karena *G* terhubung dan tidak memuat siklus, maka G pohon. Jadi G memuat sebuah titik yang berderajat 1. Misalkan v adalah sebuah titik yang berderajat 1 di *G,* maka graf T = G - v tetap merupakan pohon. Jadi graf bidang terhubung dengan k sisi. Sehingga berdasarkan asumsi berlaku

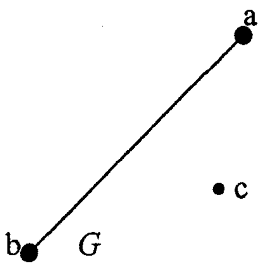
$$|V(Y)| - |E(1)| + |F(7)| = 2$$

Karena $|V(7)| = |V(G)| - 1$, $|E(7)| = |E(G)| - 1$ dan $|F(7)| = |F(G)|$,
maka

$$\begin{aligned} |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| &= (|V(7)| + 1) - (|E(7)| + 1) + |F(7)| \\ &= |V(7)| - |E(7)| + |F(7)| + 1 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

dengan demikian teorema terbukti.

C A T A T A N : Formula Euler di atas tidak berlaku untuk graf bidang tak terhubung. Misalnya, untuk graf bidang tak terhubung G pada Gambar 12.53 berikut diperoleh



|V(G)| = 3; |E(G)| = 1,dan |F(G)| = 1,
sehingga $|V(G)| - |E(G)| + F(G)| = 3 \neq 2$.

Gambar 12.6 Graf bidang tak terhubung

Dengan menggunakan teorema di atas, kita buktikan teorema berikut.

Teorema 12.3

Jika G graf sederhana planar dengan $|E(G)| > 1$, *maka* $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.

Bukti:

Kita tinjau dua kasus yaitu *G* terhubung atau *G* tidak terhubung.

Kasus 1: G graf terhubung

Misalkan G_l = graf bidang G. Jelas bahwa $|V(G1)| = |V(G)|$ dan $|E(G_1)| = |E(G)|$, karena G_1 isomorfik dengan *G.*

Jika $|E(G_1)| = 2$, maka $|V(G)| = 3$ (karena G sederhana dan terhubung). Sehingga $|E(G)| = 2 \leq 3 = 3\ |V(G)| - 6$. Jika $|E(G)| \geq 3$, maka $|E(G_1)| > 3$. Karena G_l sederhana dan $|E(G_1)| \geq 3$, $d(f) \geq 3$.

Dengan demikian $\sum_{f \in F(G_1)} d\ (f) \geq 3\ |F(G)|$ .... (1)

Karena setiap sisi G membatasi paling banyak dua muka,

$$\sum_{f \in F(G_1)} d\ (f) \leq 2\ |E(G_1)| \text{ .... (2)}$$

dari (1) dan (2) diperoleh

$$3\ |F(Gl)| \leq 2\ |E(G_l)| \text{............. (3)}$$

dari Teorema 12.3 di atas diperoleh

$$|F(G_1)| = 2 + |E(G_1)| - |V(G_1)|$$

sehingga (3) menjadi

$$3\ (2 + |E(G_1)| - |V(G_1)|) < 2\ |E(G_1)|\ ,$$

ekuivalen dengan

$$|E(G_1)f < 3\ |V(G_1)| - 6$$

karena $|E(G_1)| = |E(G)|$ dan $|V(G_l)| = |V(G)|$, maka $|E(G)| <$

$3\ |V(G)| - 6.$

Jadi teorenna terbukti untuk kasus G graf terhubung. 0

Kasus 2: G graf tak terhubung

Misalkan G_1, G_2, …, G_k adalah komponen-komponen dimana $k \geq 2.$ Karena G planar, $V_1,\ 1 \leq i \leq k$ terhubung, G_1 terhubung dan planar. Misalkan dari k komponen tersebut, terdapat k_1 komponen yang masing-masing komponen berisi satu titik (nol sisi) dan k_2 komponen yang masing-masing komponen berisi satu sisi (dua titik) dan k_3 komponen yang masing-masing berisi lebih *dan* satu sisi.

Jelas bahwa

$$k_1 + k_2 + k_3 = k.$$

Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan

$$|E(G_i)| = 0,\ V_i,\ 1 \leq i \leq k,$$
$$|E(G)| = 1, V_i,\ k_1 + 1 \leq i \leq k,$$
$$|E(G)| = 2,\ V_i,\ k_1 + k_2 + 1 \leq i \leq k$$

Selanjutnya kita tinjau dua sub kasus, yaitu $k_3 = 0$ dan $k_3 \geq 1.$

Sub kasus 2.1: $k_3 = 0$

Dalam hal ini, $|V(G)| = k_i + 2\ k_2$ *dan* $|E(G)| = k_2.$

Karena $k_3 = 0$ dan $|E(G)| \geq 2,$ maka $k_2 \geq 2.$

Sekarang untuk $k_2 \geq 2$ dan $k_2 \geq 0$ diperoleh

$|E(G)| = k2 \leq 6k_2 - 6 + 3ki = 3(k_1 + 2k_2) - 6 = 3|V(G)| - 6.$

Sub kasus2.2: $k_3 \neq 0$ ($k_3 \geq 1$)
Dalam hal ini kita peroleh

$$|E(G)| = \sum_{i+1}^{k_1} |E(G_i)| + \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} |E(G_1)| + \sum_{i=k_1+k_2+1}^{k} |\ E(G)|$$

$$= 0 + k_2 + \sum_{i=k_1+k_2+1}^{k} |\ E(G_1)|$$

$$= k_2 + 3 \sum_{i=k_1+k_2+1}^{k} |\ V(G_1)|$$

$$= k_2 + 3(|V(G)| - k_i - 2k_2) - 6(k - k_1 - k_2)$$

$$= 3\ |V(G)| - 6k + 3\ k_1 + k_2$$

$$= 3\ |V(G)| - 6 + (6 - 6k + 3\ k_1 + k_2).$$

Karena $k_3 \geq 1$ (dan $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$), maka $3\ k_1 + 5\ k_2 + 6\ k_3 \geq 6.$
Karena $k_3 = k - k_1 - k_2$, diperoleh

$$3\ k_1 + 5\ k_2 + 6\ (k - k_1 - k_2) > 6,$$

atau

$$6k - 3k_1 - k_2 > 6.$$

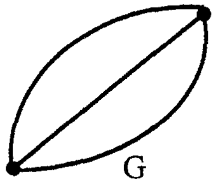
Jadi,

$$|E(G)| < 3\ |V(G)| - 6 + (6k - 3k_1 - k_2) < 3\ |V(G)| - 6.$$

Dengan demikian lengkaplah bukti teorema.

C A T A T A N :

1) Kata nsederhanan dalam teorema tidak boleh ndihilangkann. Sebagai contoh, graf *G* di bawah ini adalah graf planar dengan *3 sisi,* tetapi



$|E(G)| = 3 > 0 = 3\ |V(G)| - 6.$

Gambar 12.7 Graf Planar

2) Syarat n I $E(G)|$ > 1n dalam teorema tidak boleh ndikendorkann. Seperti terlihat pada graf sederhana planar berikut mempunyai tepat satu sisi. Ternyata

Gambar 12.8 Graf Planar Sederhana

$|E(G)| = 1 > 0 = 3\ |V(G)| - 6.$

3) Perhatikan graf lengkap dengan 5 titik, *K5.*
   Karena $|E(K_5)|$ = 10 > 3(5) − $6 = 3$ |V(K5)| − 6, maka dengan menggunakan teorema, kita simpulkan K_5 nonplanar.

4) Teorema memberikan nsyarat perlun sebuah graf planar, tetapi bukan nsyarat cukupn, karena graf bipartit komplit $K_{3,3}$ memenuhi hubungan $|E(K_{3,3})| = 9 \leq$ 12 = 3 $|V(K_{3,3})|$ − 6 , tetapi ternyata $K_{3,3}$ nonplanar.

Dengan menggunakan Teorema 12.14 di atas, dapat dibuktikan bahwa setiap graf planar sederhana memuat sebuah titik yang berderajat tidak lebih dari 5.

Teorenna 5.15

Jika G graf planar sederhana, maka 8(G) ≤ 5.

Bukti

Untuk |*E*(*G*)*| = 1* atau |*E*(*G*)*|* = 0, jelas pernyataan di atas benar. Sekarang, misalkan |E(G)| > 1.
Karena G planar dan sederhana, inaka menurut Teorema 12.14 berlaku

|E(*G*)*| < 3 |V*(*G*)*| – 6. ………………* (*)

Andaikata δ (G) < 5. Ini berarti v $\in$ *V*(*G*)*,* d(v) ≥ 6. Sehingga menurut nLemma Jabat Tangann

$$|E(G)| = ½ \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

$$\geq ½ \sum_{v \in V(G)} d(v) 6 = 3\ |V(G)|$$

> 3 |*V*(*G*)*|* – 6, kontradiksi dengan (*).

Jadi pengandaian δ (*G*) *> 5* salah. Dengan demikian haruslah δ (*G*) *< 5.*
Teorema terbukti.

IV. Uji Kompetensi

Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini

1. Misalkan G adalah sebuah graf dengan 7 titik. Tunjukkan bahwa G bukanlah graf teratur dalam derajat 3.
2. Unjukkan bahwa jika G adalah sebuah graf sederhana

yang mempunyai paling sedikit 2 titik, maka G mempunyai 2 titik atau lebih yang derajatnya sama.

3. Misalkan δ = derajat minimum titik pada graf G,
   Δ = derajat maksimum titik pada graf G,
   ε = banyaknya sisi dari graf G dan
   v = banyaknya titik dari graf G.

PERTEMUAN 14-15

PERTEMUAN XIV-XV

Mata Kuliah	: Teori Graf
Kode Mata Kuliah	: 39TAD1263
Bobot	: 2 SKS

I. Pokok Bahasan

Pewarnaan Graf

II. Sasaran Pembelajaran

Mahasiswa memahami pewarnaan graf

III. Ringkasan Materi

Pewarnaan Graf

Pada akhir abad ke-19, seorang kepala sekolah memberikan soal yang sangat menantang kepada murid-muridnya. Soal itu sebagai berikut nTunjukkan bahwa semua peta hanya memerlukan empat warna, sehingga negara-negara atau propinsi-propinsi yang bertetangga mendapat warna yang berbeda.

Kepala sekolah tersebut mengatakan hanya mau menerima pembuktian yang tidak lebih dari 30 baris tulisan dan satu halaman diagram. Tampaknya soal ini sederhana sekali, tetapi sebenarnya tidak demikian. Soal ini menjadi masalah besar di dunia matematika, yang kemudian terkenal dengan nama Konjektur Empat Warna. Baru pada tahun 1976 ditemukan penyelesaian masalah ini. Pada tahun tersebut Kenneth Appel dan Wolfgang Haken, matematikawan dari

Universitas Illionis di Amerika Serikat, dapat membuktikan (dengan bantuan komputer) dugaan empat warna dengan menyita waktu sekitar 1200 jam komputer untuk menghasilkan beratus-ratus halaman kertas hasil analisis menyeluruh terhadap sekitar 2000 graf dengan jutaan kemungkinan bentuknya.

Salah satu cara yang digunakan adalah menggunakan graf yang titiknya menunjukkan propinsi dan garis menunjukkan hubungan dua propinsi itu sebagai tetangga.

Konsep-konsep yang dikaji dan diuraikan di dalam pembahasan ini terdiri atas topik-topik yang menyangkut pewarnaan titik, pewarnaan sisi (pewarnaan garis) dan pewarnaan peta.

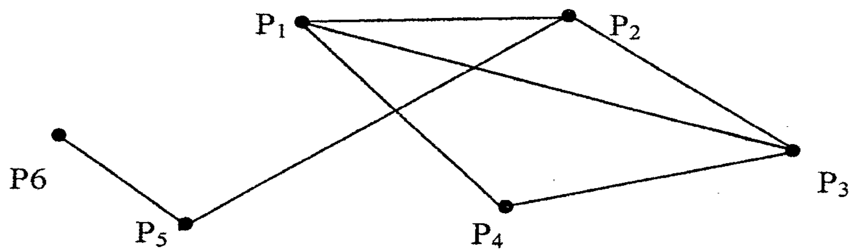
Pewarnaan Titik Suatu Graf

Agar kita lebih memahami pengertian tentang pewarnaan titik suatu graf, perhatikan contoh-contoh serta penj elasannya berikut ini.

Andaikan sebuah pabrik kimia ingin mengirim hasil produksinya dengan menggunakan kereta api. Sesuai dengan aturan yang ada, tidak semua zat kimia ini dapat dimuat dalam satu kereta karena kemungkinan bercampurnya zat itu yang dapat menyebabkan terjadinya reaksi berupa ledakkan yang membahayakan. Bagaimana zat-zat kimia ini dapat dikirim? Dengan maksud meminimumkan biaya, pabrik itu ingin menggunakan gerbong kereta api sesedikit mungkin. Berapa banyaknya gerbong kereta api itu?

Pada contoh di atas ada objek (hasil zat kimia) dan ada keterhubungan (tidak dapat dimuat dalam satu gerbong kereta) diantara objek itu. Karena hal ini merupakan ide dasar suatu graf, hal biasa untuk menyajikan dengan menggunakan graf. Pada contoh di atas, titik-titiknya adalah zat kimia dan sisinya menghubungkan zat-zat kimia yang tidak dapat diangkut dalam gerbong kereta yang sama.

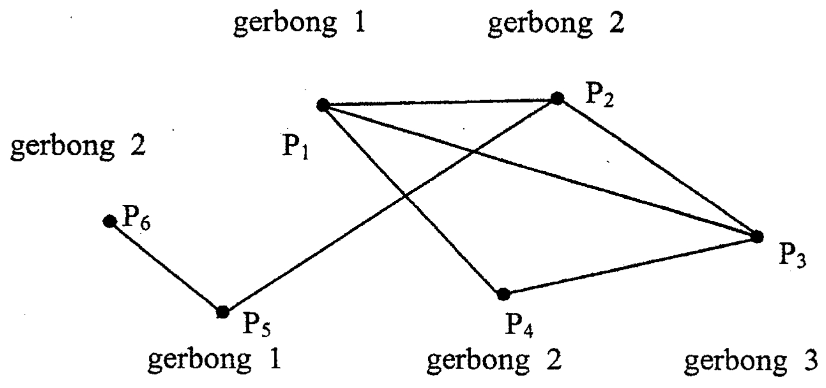
Sebagai ilustrasi, diasumsikan bahwa pada Contoh; 14.1 ada enam hasil zat kimia P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 *dan* P_6. Andaikan P_1 dengan P_2, P_3, atau P_4 tidak dapat diangkut dengan kereta yang sama; juga P_2 dengan P_3 atau P_5; P_3 dengan P_4 dan P_5 dengan P_6. Graf yang menyajikan hal ini dapat dilihat pada Gambar 5.56, yang titik-titiknya menunjukkan enam zat kimia dan sisinya menghubungkan pasangan zat kimia yang tidak dapat dimuat dalam gerbong kereta yang sama.



Gambar 14.1 Graf G

Berapa banyak minimum gerbong kereta yang diperlukan? Dalam graf pada Gambar 14.2, zat kimia yang disajikan dengan titik berdekatan harus, dimuat dalam gerbong kereta yang tidak sama. Misal zat P_1 dan P_2

berdekatan, gerbong kereta lain diperlukan untuk memuat P_2, katakan gerbong kereta 2. Karena P_3 berdekatan dengan P_1 dan P_2, maka diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_3, katakan gerbong kereta 3. Tetapi tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_4, gerbong kereta 2 dapat digunakan lagi. Demikian pula halnya, tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_5, karena gerbong kereta 1 atau 3 dapat digunakan lagi. Misal dipilih gerbong kereta 1, maka untuk P_6 dipilih gerbong kereta 2 atau 3, katakan gerbong kereta 2. Graf pada Gambar 14.2 menunjukkan bagaimana titik-titik itu diberi nama (label) sehingga zat kimia yang tidak dapat berada bersama dimuat dalam gerbong kereta berbeda. Juga karena *P_1, P_2 dan* P_3 saling berdekatan, maka paling sedikit harus digunakan tiga gerbong kereta berbeda. Sehingga banyak minimum gerbong kereta yang harus digunakan ada tiga.



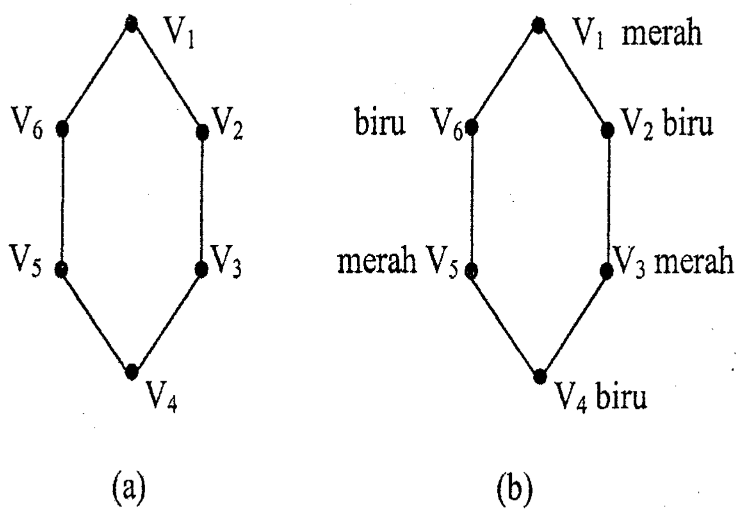
Gambar 14.2 Graf G

Apa yang telah dilakukan di atas, adalah memberi label pada titik-titik graf sehingga titik yang berdekatan mendapatkan label yang berbeda. Ide ini sering terjadi dalam teori graf dan label ini disebut warna. Mewarnai sebuah graf berarti memberi warna pada setiap titik graf itu sedemikian hingga titik yang berdekatan mendapat warna berbeda. Menanyakan banyak minimum gerbong kereta yang diperlukan pada Contoh 14.2 adalah sama seperti menanyakan banyak minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai graf pada Gambar 14.2, dengan warna mewakili gerbong kereta.

Bila suatu graf G dapat diwarna dengan tidak kurang dari n warna, maka G dikatakan memiliki bilangan khromatik (x(G)) n. Jadi graf G pada Gambar 5.56 memiliki bilangan khromatik 3.

Contoh 14.3

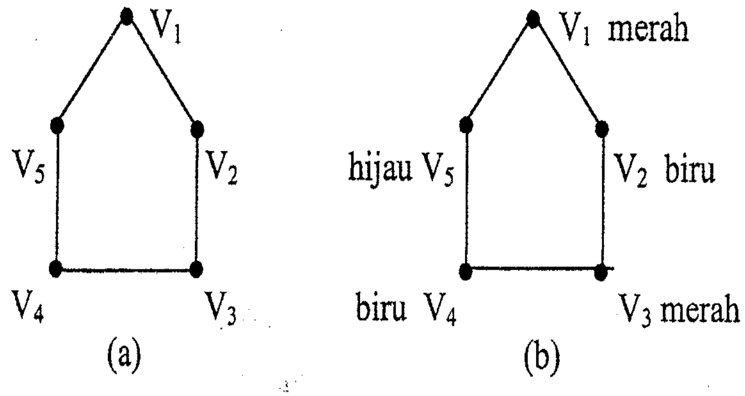
Graf pada Gambar 14.3(a) memiliki bilangan khromatik 2 karena titik V_1, V_3 *dan* V_5 dapat diwarnai dengan satu warna (misalkan merah) dan tiga titik lainnya dengan warna kedua (misalkan biru), seperti yang terlihat pada Gambar 5.58(b). Secara umum, jika suatu siklus memiliki titik yang banyaknya genap, maka sikius itu dapat diwarnai menggunakan dua warna.



Gambar 14.3 Graf G

Contoh 14.2

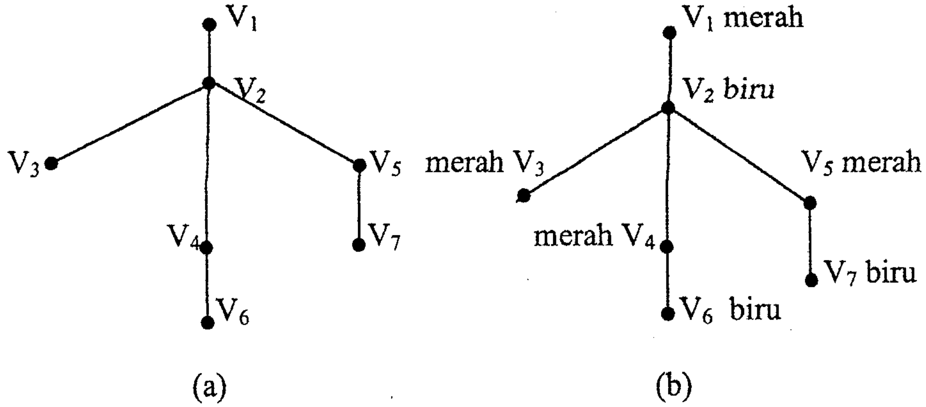
Bila suatu siklus memiliki titik yang banyaknya ganjil, seperti pada Gambar 14.4(a), maka harus digunakan tiga warna. Bila dicoba menggunakan warm itu secara berselang seperti pada Gambar 14.4, warna merah untuk titik V_1 dan V_3 serta wama biru untuk V_2 dan V_4, maka warna merah atau biru tidak dapat digunakan lagi untuk V_5. Penggunaan tiga warna untuk mewamai siklus yang banyak titiknya ganjil diilustrasikan pada Gambar 14.4(b).



Gambar 14.4 Graf G

Contoh 14.19

Graf lengkap K_n dapat diwarnai dengan menggunakan n warna. Karena setiap titik saling berdekatan dengan titik lainnya, maka kurang dari n wama tidak cukup untuk mewama graf itu. Jadi K_n memiliki bilangan khromatik n.



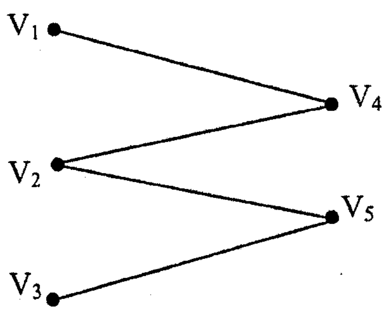
gambar 14.5 Graf G

Contoh 14.20

Graf pada Gambar 14.5a) dapat diwarnai dengan menggunakan dua warna, seperti yang terlihat pada Gambar 14.5b).

Contoh 14.21

Graf pada Gambar 5.61 memiliki bilangan khromatik 2 karena titik di sebelah kiri dapat diwarnai dengan menggunakan warna pertama dan titik di sebelah kanan dengan menggunakan warna kedua.



Gambar 14.6 Graf G

Secara umum, sangat sulit untuk menentukan banyak minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai graf. Salah satunya dengan mendaftar semua cara mewarnai (yang berbeda) titik-titik graf, kemudian memeriksa setiap cara itu untuk menentukan mana yang menggunakan banyak warna minimum. Sayangnya, walaupun titik graf tidak seberapa banyak dan kita menggunakan komputer super, proses ini sangat makan waktu, bahkan'sampai berabad-abad.

Tetapi, ada beberapa cara yang berhasil diperoleh untuk dapat menunjukkan bilangan khromatik suatu graf. Misal, seperti yang terlihat pada Contoh 14.6, siklus yang panjangnya ganjil memiliki bilangan khromatik 3. Jadi setiap graf yang memiliki siklus jenis ini membutuhkan minimum 3 warna. Graf pada Gambar 14.6 merupakan salah satu contohnya. Bila tidak ada siklus yang panjangnya ganjil pada suatu graf, maka 2 warna sudah cukup.

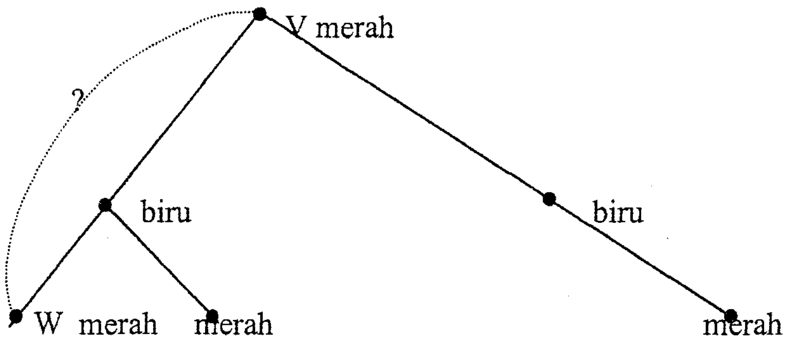
Teorema 14.1

Suatu graf G tidak nienailiki siklus yang panjangnya ganjil, jika dan hanya jika G dapat diwarna dengan 2 warna.

Bukti:

Seperti uraian di atas, bila *G* memiliki siklus yang panjangnya ganjil, maka pewarna G membutuhkan paling sedikit 3 warna.

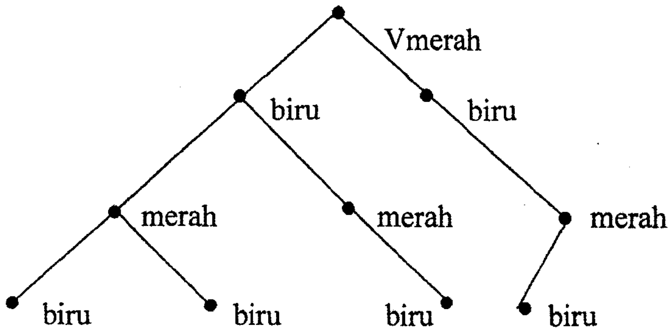
Sekarang andaikan G tidak memiliki siklus yang panjangnya ganjil. Pilih suatu titik V yang diberi warna merah. Kemudian pada setiap titik yang berdekatan dengan V diberi warna biru. Sekarang, pada titik-titik yang berdekatan dengan titik yang baru diberi warna biru itu, diberi warna merah. Dapatkah salah satu dari titik yang berwarna merah ini, katakan titik W, berdekatan dengan titik V yang juga berwarna merah? Diagram pada Gambar 14.7 mengilustrasikan situasi ini.



Gambar 14.7 Graf G

Terlihat bahwa jika *V* dan *W* berdekatan, maka akan ada siklus yang panjangnya 3. Dengan demikian, setiap titik lain yang baru saja diwarnai merah tidak berdekatan dengan titik yang berwarna merah, karena jika tidak demikian berarti ada siklus yang panjangnya ganjil. Berikutnya, titik yang berdekatan dengan yang baru saja diwarnai merah diberi warna biru. Hal ini diperlihatkan pada Gambar 14.8.

Kemudian, jika dua titik yang diwamai biru terletak berdekatan, maka ada sikius yang panjangnya ganjil. Kemudian dilanjutkan dengan mewamai merah titik yang berdekatan dengan titik yang baru diwarnai biru. Seperti sebelumnya, tidak ada titik yang baru diwarnai merah dapat terletak berdekatan dengan titik yang telah berwarna merah. Proses ini diulangi sampai tidak ada titik yang belum mendapat warna terletak berdekatan dengan titik yang telah diwarna.

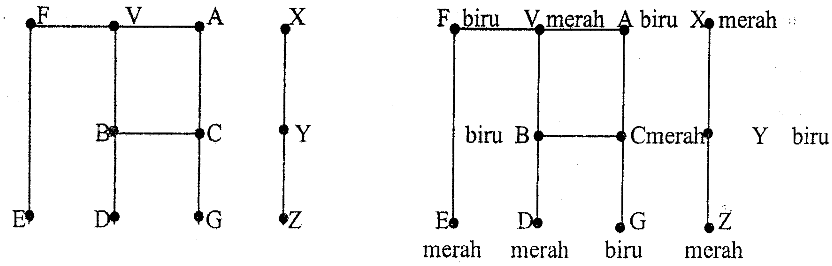


Gambar 14.8 Graf G

Jika grafnya tidak terhubung, maka akan ada titik yang tidak berdekatan dengan titik yang telah berwarna, sehingga belum mendapat warna. Untuk titik-titik seperti itu, proses di atas diulang lagi dengan menggunakan warna merah dan biru. Akhirnya semua titik dapat diwarnai dengan warna merah dan biru.

Contoh 14.22

Pada graf dalam Gambar 14.9(a), proses pewamaan di atas dimulai dengan memilih titik *V* dan memarnainya dengan warna merah. Karena *F, B dan A* terletak berdekatan dengan V, maka warna biru diberikan pada titik itu. Titik yang belum mendapat warna dan terletak berdekatan dengan titik biru itu adalah *C, D dan* E, sehingga diberi warna merah. Akhirnya, titik G adalah titik yang belum diwarnai dan terletak berdekatan dengan titik merah, sehingga diwarnai biru. Sekarang, *X* adalah titik belum diwarnai yang terletak tidak berdekatan dengan titik yang berwarna, sehingga *X* diberi warna merah. Kemudian *Y* diberi warna biru, serta akhirnya *Y* diberi warna merah. Lihat Gambar 14.9(b).



(a) (b)

Gambar 14.9 Graf G

Teorema berikut ini memberikan batas atas pada banyak warna yang diperlukan untuk mewarnai sebuah graf.

Teorema 14.2

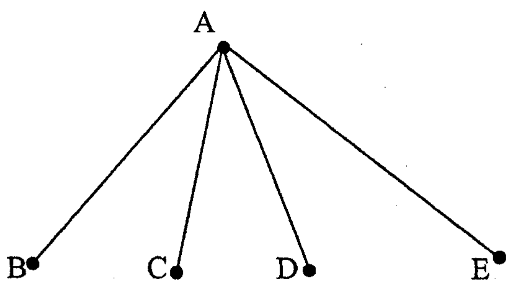
Jika G graf sederhana dengan derajat maksimum d(*G*), *maka*
$\chi(G) - \Delta(G) + 1.$

Bukti:

Misalkan k adalah derajat maksimum titik dari G. Akan ditunjukkan bahwa G dapat diwarnai dengan menggunakan *k + l* warna C_0, ..., C_k. Mula-mula titik *V* dipilih dan diberi warna C_0. Kemudian, beberapa titik W lain dipilih. Karena paling banyak ada *k* titik yang berdekatan dengan *W* dan ada paling sedikit *k + l* warna *yang* tersedia, maka paling sedikit ada satu warna (dapat lebih banyak) yang belum digunakan untuk mewarnai titik yang berdekatan dengan W. Pilih warna itu. Proses ini dapat dilanjutkan sampai semua titik dari G mendapat warna. 0

Contoh 14.23

Proses yang digambarkan pada Teorema 14.2 dapat menggunakan lebih banyak warna daripada yang sebenarnya diperlukan. Graf pada Gambar 14.9 memiliki titik berderajat 4, yang merupakan derajat maksimumnya, sehingga dengan Teorema 14.2 di atas, graf itu dapat diwarnai dengan menggunakan 4 + 1 = 5 warna. Tetapi, dengan menggunakan prosedur yang digambarkan pada Teorema 14.2, graf itu dapat diwarnai dengan menggunakan 2 warna.



Gambar 14.10 Graf G

Berikut ini akan diuraikan algoritma, yang ditemukan Welsh dan Powell, untuk pewarnaan titik-titik dari suatu graf.

Algoritma Welsh dan Powell

Algoritma ini memberikan cara mewarnai sebuah graf dengan memberi label titik-titiknya sesuai dengan derajatnya.

Langkah 1 (melabel titik dengan derajatnya). Label titik v_1, v_2, …, v_n. sedemikian hingga $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq$

$d(v_n)$.

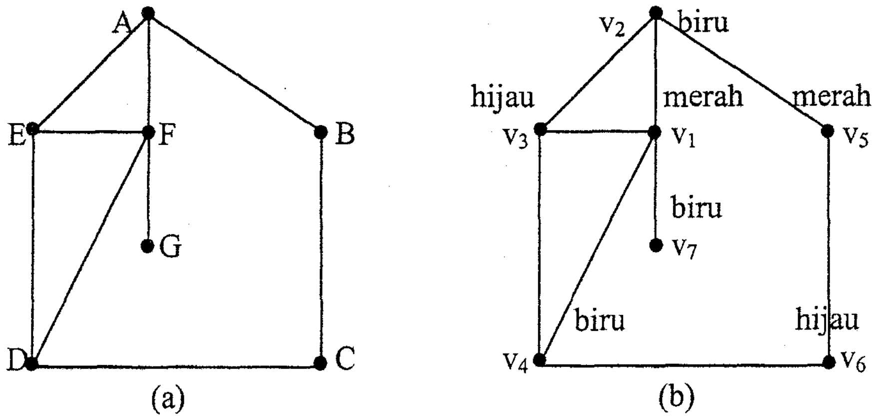
Langkah 2 (warnai titik pertama dari titik-titik yang belum berwarna, yang berdekatan dengan titik itu). Berikan wama yang belum digunakan, pada titik pertama yang belum berwarna pada daftar titik itu.
Lakukan hal itu pada semua titik dalam daftar secara terurut.
Berikan warna baru ini pada setiap titik yang tidak berdekatan dengan setiap titik lain yang telah diwarnai ini.

Langkah 3 Jika terdapat titik yang belum berwarna, maka kembalilah ke langkah 2.

Langkah 4 (selesai). Pewarnaan graf telah dilakukan.

Contoh 14.24

Untuk graf pada Gambar 14.11 (a), titik F memiliki derajat terbesar, yaitu 4 sehingga *F* diberi label v1. Titik *A, D dan* E berderajat 3 sehingga diberi label v_2, v_3 *dan* v_4 secara random. Demikian pula titik B dan C yang berderajat 2 diberi label v_5 dan v_6. Titik G yang merupakan satu-satunya titik yang tersisa, diberi v_7. Hal ini diperlihatkan pada Gambar 14.12 (b).



Gambar 14.12 Graf G

Penyajian dalam bentuk daftar berdekatan sangat mudah digunakan dengan algoritma Welsh dan Powell ini. Untuk graf pada Gambar 14.12 (b), penyajian daftar berdekatannya adalah sebagai berikut.

$v_1 : v_2, v_3, v_4, v_7$

$v_2 : v_1, v_3, v_5$

$v_3 : v_1, v_2, v_4$

$v_4 : v_1, v_3, v_6$

$v_5 : v_2, v_6$

$v_6 : v_4, v_5$

$v_7 : v_1$

Pada Aggoritma Welsh dan Powell ini titik belum berwama pertama dalam daftar adalah v_1 yang diberi warna merah. Kemudian dicari titik berikut yang tidak berdekatan dengan v_1 pada daftar, yaitu titik dibawah v_1 yang tidak mengikuti v_1. Diperoleh titik v_5, yang diberi warna merah.

Dilanjutkan dengan melihat bagian bawah daftar untuk mencari titik berikutnya yang tidak berdekatan dengan v_1 maupun v_5. Karena titik seperti itu tidak ada, maka kembali dilihat bagian atas daftar dan ditentukan lagi titik belum berwarna yang pertama, yaitu v_2, yang diberi warna biru. Kemudian, titik belum berwarna berikutnya ditentukan yang tidak berdekatan dengan v_2. Diperoleh titik v_4 dan diberi warna biru. Cara ini dilanjutkan lagi dan diperoleh titik v_7 yang belum berwarna dan tidak berdekatan dengan v_2 maupun v_4. Sehingga V_7 diwarna biru, bagian atas daftar dilihat kembali dan ditentukan titik belum berwarna berikutnya, yaitu v_3, yang diberi warna hijau. Karena v_6 belum diwarnai dan tidak berdekatan dengan v_3, maka diberi warna hijau. Dengan demikian maka graf pada Gambar 14.12 (b) dapat diwarnai dengan tiga warna.

Penyajian daftar berdekatan membuat algoritma Welsh dan Powell mudah digunakan, karena titiknya dapat ditandai ketika diwarnai, sehingga tinggal memperhatikan titik belum berwarna sisanya dalam proses pewarnaan itu.

Pewarnaan Peta dan Pewarnaan Sisi

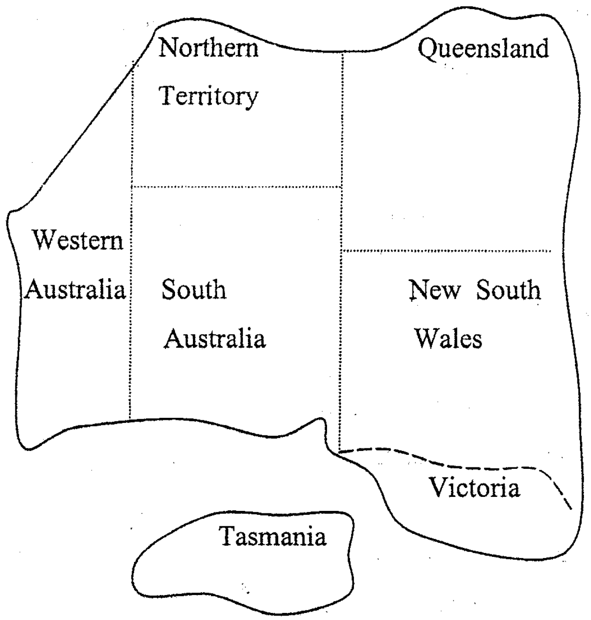
Pewarnaan Peta

Sebuah atlas akan sangat mudah dipahami kalau masing-masing daerah saling berbatasan mempunyai warna yang berlainan. Suatu masalah yang menarik di sini ialah menentukan banyaknya minimum warna yang harus disediakan agar tujuan tersebut terwujud, misalnya untuk mawama peta negara tetangga kita Australia seperti diperlihatkan pada pada Gambar 5.67. Pewarnaan peta sama dengan pewarnaan titiktitik graf dari gambar peta tersebut sedemikian hingga tidak ada dua titik berdekatan yang mendapat warna sama.

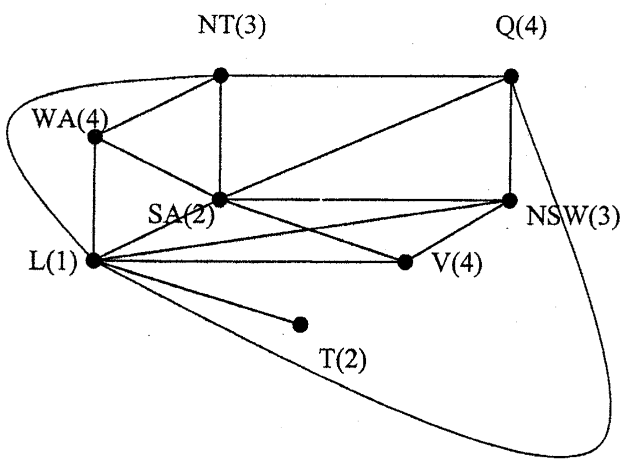
Dalam hal ini negara-negara bagiannya dan lautan yang mengelilinginya diwakili oleh titik-titik. Selanjutnya pasangan titik yang mewakili daerah-daerah yang saling berbatasan dihubungkan dengan sebuah sisi, sehingga model grafnya seperti tampak pada Gambar 5.68. Oleh karena itu derajat suatu titik mencerminkan banyaknya perbatasan yang mengelilingi daerah yang diwakili titik itu. Jadi rumusan persoalan grafnya ialah mewarnai semua titik graf sedemikian hingga titik-titik yang terhubungkan oleh sisi mempunyai wama berbeda satu sama lain.

Jadi dapat disimpulkan bahwa langkah-1angkah yang dilakukan dalam pemodelan dengan graf ialah menentukan:

1. Objek apa yang akan dikonversikan sebagai titik graf?
2. Hubungan apa yang dicerminkan oleh sisi graf? Pasangan titik apa saja yang harus dihubungkan oleh sisi?
3. Merumuskan masalah nyata dalam bahasa teori graf.



Gambar 14.13 Peta Australia

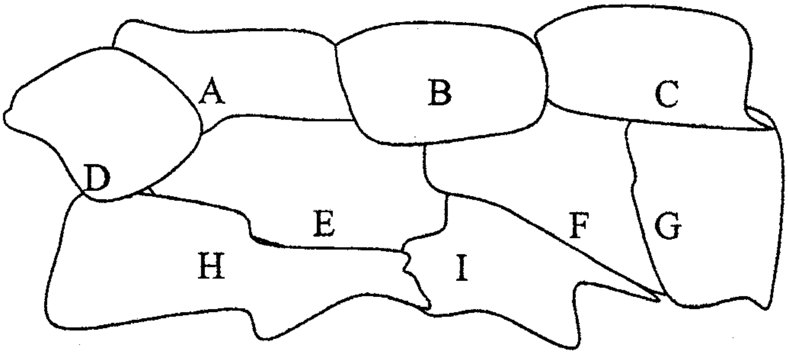


Gambar 14.14 Model Graf Australia

Angka-angka pada Gambar 14.14 menyatakan kemungkinan penempatan warna dan masih ada pula kemungkinan penempatannya yang lain. Dari graf tersebut tampak bahwa dengan empat macam warna kita telah mampu membuat peta Australia sedemikian hingga dua negara bagian yang saling berbatasan dapat dibedakan dengan jelas.

Contoh 14.25

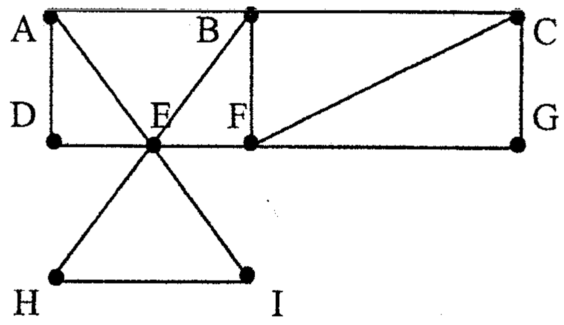
Wamai peta pada Gambar 5.69, kemudian tentukan bilangan khromatiknya.



Gambar 14.15 Graf G

Jawab:

Peta pada Gambar 5.69 dapat dilukiskan dalam bentuk graf seperti pada Gambar 5.70 berikut ini.



Gambar 14.16

(1) Pengurutan derajat titik

Titik	E	F	B	A	C	I	D	G	H
Derajat Titik	6	5	4	3	3	3	3	2	3

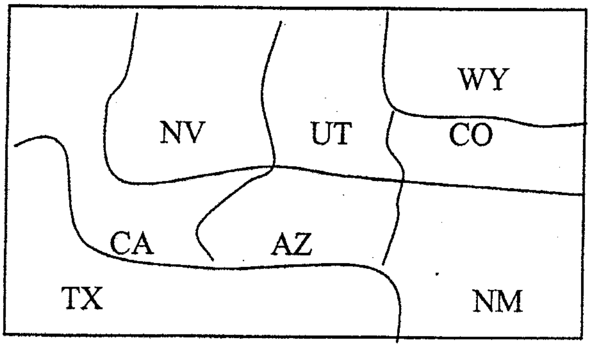
(2) Pewarnaan Titik

Pertama tandailah titik E dengan angka 1. Telusuri daftar titik tadi dan amati gambar grafnya, ternyata titik C adalah titik pertama yang tidak berdekatan dengan *E;* berilah tanda 1. Tampak bahwa titik-titik lainnya berdekatan dengan *E atau C.* Kembali ke daftar titik, tandai titik F dengan angka 2 dan juga titik-titik A dan H, karena tidak berdekatan dengan F. Penelusuran ketiga kalinya terhadap daftar titik akan menandai titik *B* dengan angka 3; lalu tandai pula titik *I, D* dan G dengan angka 3. Dengan demikian bilangan khromatik graf tersebut adalah 3. Langkahlangkah tersebut dapat dirangkum dalam bentuk tabel berikut:

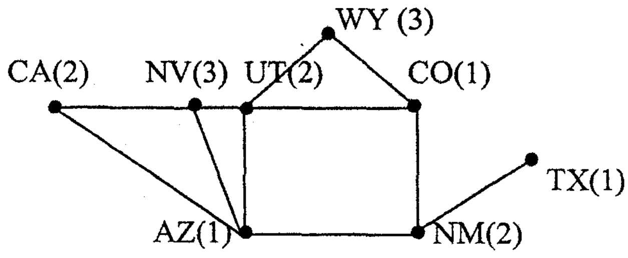
Titik	Warna		
	Tahap 1	Tahap 2	Tahap 3
E	1		
F		2	
B			3
A		2	
C	1		
I			3
D			3
G			3
H		2	

Contoh 14.26

Gambar 14.16 merupakan bagian dari peta Amerika Serikat. Grafnya beserta warna (label) diperlihatkan pada Gambar 14.17 dengan menggunakan algoritma Welsh dan Powell.



Gambar 14.16



Gambar 5.71(b)

Gambar 14.17

Berikut ini tabel yang menunjukkan hubungan antara titik, derajat titik dan warna.

Titik	AZ	UT	NV	CO	NM	CA	WY	TX
Derajat Titik	4	4	3	3	3	2	2	1
Wama	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)	(3)	(1)

Dengan demikian, peta pada Gambar 5.71 (a) dapat diwarnai dengan 3 warna.

Pewarnaan Sisi

Pewarnaan sisi atau pewamaan garis pada suatu graf adalah penentuan wama sisi-sisi suatu graf sehingga setiap sisi yang berdekatan mendapatkan warna yang berbeda. Ukuran keterwamaan suatu graf didefinisikan sama dengan ukuran keterwarnaan titik, yaitu mengacu kepada banyaknya warna yang memungkinkan sehingga setiap sisi yang berdekatan mendapat wama yang berbeda.

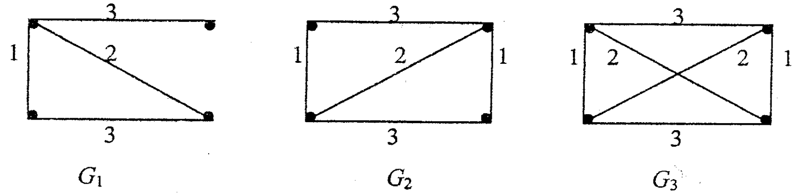
Jumlah warna minimal yang dapat digunakan untuk mewamai sisi-sisi dalam suatu graf G disebut indeks khromatik G dinotasikan e(G).

Teorema 14.3

Jika G adalah graf sederhana yang derajat maksimum titiknya adalah m, maka indeks khromatiknya $\chi'(G)$ adalah

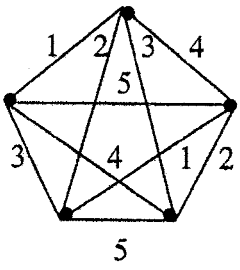
$$m \leq \chi'(G) \leq m + 1.$$

Contoh 14.27



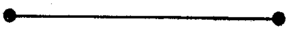
Derajat maksimum titik dari graf *G_1, G_2 dan* G3 adalah 3. Indeks khromatiknya adalah 3.

Contoh 14.28



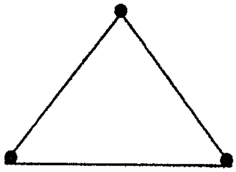
Derajat maksimum titik graf G adalah 4. Indeks khromatiknya adalah 5.

Untuk graf lengkap K„ mempunyai sifat khusus mengenai indeks khromatiknya. Perhatikan beberapa contoh graf lengkap berikut ini.



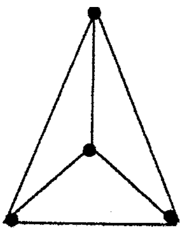
K_2

$\chi'(k_2) = 1$



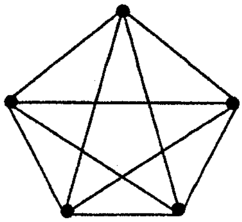
K_3

$\chi'(k_3) = 3$



K_4

$\chi'(k_4) = 3$



K_5

$\chi'(k_5) = 5$

Hubungan antara banyaknya titik graf lengkap dan indeks khromatik untuk graf itu dapat dirumuskan dalam Teorema 14.3 berikut ini.

Teorema 14.3

$\chi'(K_{,n}) = n$, jika n ganjil dan $n > 1$.

$\chi'(K_n) = n - 1$, jika n genap.

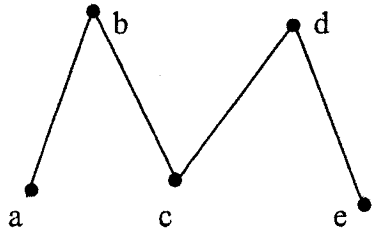
Contoh 14.29

$\chi'(K_5) = 5$; $\chi'(K_6) = 5$; $\chi(K_7) = 7$; $\chi(K_8) = 7$.

Teorema 14.3

Jika G adalah graf sederhana bipartit yang derajat maksimum titiknya ($d(G)$) adalah m, makes $\chi'(G) = m$.

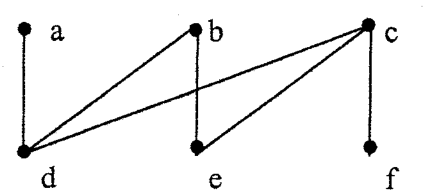
Contoh 14.30



G_1

$\Delta(G_1) = 2$

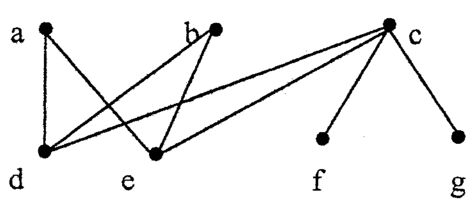
$\chi'(G_1) = 2$



G_2

$\Delta(G_2) = 3$

$\chi'(G_2) = 3$



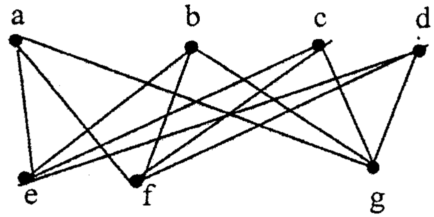
G_3

$\Delta(G_3) = 4$

$\chi'(G_3) = 4$

Berdasarkan Teorema 14.3 di atas, dapat disimpulkan bahwa $\chi'(K_{p,t})$ = max (p,t). $K_{p,t}$ adalah lambang untuk graf bipartit lengkap, yang himpunan titiknya terpisah menjadi himpunan pertama terdiri atas p titik dan himpunan kedua terdiri atas t titik. Tanda max (p,t) menyatakan yang terbesar di antara p dan t.

Contoh 14.31



$K_{3,4}$

$p = 3$
$t = 4$

$\chi'(K_{3,4}) = \max(3,4) = 4$

IV. Uji Kompetensi

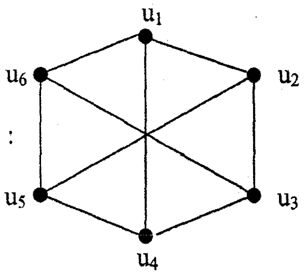
Selesaikan soal uji kompetensi berikut ini

1. Buktikan bahwa: a) $\varepsilon \leq \binom{v}{2}$

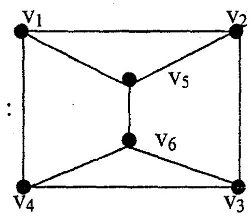
2. Jika G adalah graf sederhana dan $\varepsilon > \binom{v-1}{2}$ maka G adalah graf terhubung.

3. Dari tiga graf di bawah ini, tunjukkan dua graf yang isomorfik.

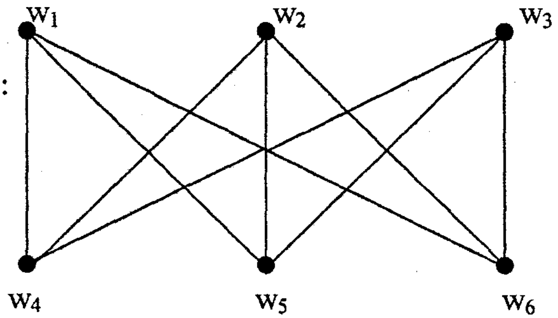
G_1 :



G_2 :



G_3 :



DAFTAR RUJUKAN

Abdy, M., Syam, R., & Putri, A. M. (2020). Spectrum Matriks Detour dari Graf Roda dengan n +1 Titik W_n. *Journal of Mathematics Computations and Statistics*, *3*(1). https://doi.org/10.35580/jmathcos.v3i1.19901

Akhsani, L., & Jaelani, A. (2018). Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Mahasiswa melalui Metode Snow Ball Throwing pada Mata Kuliah Teori Graf. *Kontinu: Jurnal Penelitian Didaktik Matematika*, *2*(1). https://doi.org/10.30659/kontinu.2.1.58-71

Alias, N., Rahman, N. A., Ismail, N. K., & Zulhilmi Mohamed Nor, M. N. A. (2016). Pengkelasan Teks Hadis dalam Kitab Shahih Bukhari berdasarkan kepada Perawi dengan menggunakan Teori Graf. *Simposium Kebangsaan Sistem Autentikasi Al-Quran Dan Al-Hadith*, *March*.

ALKADAR, R., YANITA, Y., & WELYYANTI, D. (2021). GRAF KOPRIMA DARI SUBGRUP DI GRUP SIMETRI. *Jurnal Matematika UNAND*, *10*(1). https://doi.org/10.25077/jmu.10.1.93-98.2021

ANISA SYUHADA, S., NARWEN, N., & ZULAKMAL, Z. (2020). APLIKASI FUZZY ADAPTIVE MINIMUM SPANNING TREE (F-AMST) UNTUK PENGELOMPOKAN PARIWISATA KABUPATEN/KOTA PROVINSI SUMATERA BARAT. *Jurnal Matematika UNAND*, *9*(2). https://doi.org/10.25077/jmu.9.2.199-206.2020

Cahyono, H. (2021). Penggunaan Video Pembelajaran Berbasis Aplikasi Bandicam pada Mata Kuliah Teori Graf Untuk Meningkatkan Kemampuan Abstraksi Mahasiswa. *Jurnal Pendidikan Modern*, *6*(2). https://doi.org/10.37471/jpm.v6i2.205

Citra, N., & Eka, W. (2020). Aplikasi Teori Graf dalam Menentukan Jalur Tercepat Mitigasi Gunung Merapi Zona 1. *Jurnal Ilmiah Matematika*, *7*(2). https://doi.org/10.26555/konvergensi.v7i2.19610

Dafik Dafik. (2015). Teori Graf, Aplikasi dan Tumbuhnya

Keterampilan Berfikir Tingkat Tinggi. *The Conferment of Professorship, 19*.

Daniel, F., & Taneo, P. N. L. (2019). Pengembangan Buku Ajar Teori Graf untuk Meningkatkan Kemampuan Representasi Matematis Siswa pada Mata Kuliah Matematika Diskrit. *Edumatica : Jurnal Pendidikan Matematika*, *9*(02). https://doi.org/10.22437/edumatica.v9i02.7635

Febrinita, F., & Puspitasari, W. D. (2018a). PENGARUH PENDEKATAN KONTEKSTUAL BERBANTUAN THINKING MAP TERHADAP PENGUASAAN KONSEP TEORI GRAF DITINJAU DARI KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH. *Konstruktivisme: Jurnal Pendidikan & Pembelajaran*, *10*(1). https://doi.org/10.30957/konstruk.v10i1.458

Febrinita, F., & Puspitasari, W. D. (2018b). PENGARUH PENDEKATAN KONTEKSTUAL BERBANTUAN THINKING MAP TERHADAP PENGUASAAN KONSEP TEORI GRAF DITINJAU DARI KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH. *Konstruktivisme: Jurnal Pendidikan & Pembelajaran*, *10*(1). https://doi.org/10.30957/konstruk.v10i1.525

Juliangkary, E., & Yuliyanti, S. (2018). Analisis Pemahaman Konsep Matematika Mahasiswa Menggunakan Modul Teori Graf Dengan Pembelajaran Berbasis Masalah. *JISIP*, *2*(1).

KHAIRUNNISA, S., BAHRI, S., & LESTARI, R. (2021). MODEL PREDIKSI JUMLAH PENDERITA COVID-19 DENGAN LAJU PERTUMBUHAN TAK KONSTAN. *Jurnal Matematika UNAND*, *9*(4). https://doi.org/10.25077/jmu.9.4.302-309.2020

Lastri, D., Masriani, M., W, N., Hidayatullah, P., Misuki, W. U., & Romdhini, M. U. (2019). Aplikasi Algoritma Kruskal dalam Pembuatan Saluran Air PDAM di Wilayah KLU. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, *1*(1).

Mahardika, F. (2019). Penerapan Teori Graf Pada Jaringan Komputer Dengan Algoritma Kruskal. *Jurnal Informatika: Jurnal Pengembangan IT*, *4*(1). https://doi.org/10.30591/jpit.v4i1.1032

Mahfuza, D. U., & Mulyono. (2020). PENERAPAN PEWARNAAN GRAF MENGGUNAKAN ALGORITMA WELCH- POWELL UNTUK KEEFEKTIFAN PADA PENGATURAN LAMPU LALU LINTAS. *KARISMATIKA*, *6*(2).

Makalew, R. A. M., Montolalu, C. E. J. C., & Mananohas, M. L. (2021). Lintasan Hamiltonian pada Graf 4-Connected. *D'CARTESIAN*, *9*(2). https://doi.org/10.35799/dc.9.2.2020.29735

Mandey, J. F., Mananohas, M. L., & Montolalu, C. E. J. C. (2020). AUTOMORFISMA GRAF LOLIPOP. *D'CARTESIAN*, *9*(1). https://doi.org/10.35799/dc.9.1.2020.27675

Mardiani, D. (2018). EKSPLOITASI KESALAHAN KONSEP TEORI GRAF DALAM PERKULIAHAN MATEMATIKA DISKRIT MENGGUNAKAN METODE GAME "TANTANGAN BERHADIAH POINT." *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, *6*(3). https://doi.org/10.31980/mosharafa.v6i3.325

Maro, L., & Banabera, C. (2020). PEWARNAAN TITIK PADA KORONA GRAF KIPAS DENGAN GRAF KIPAS DAN GRAF BUKU SEGITIGA DENGAN GRAF BUKU SEGITIGA BERORDER SAMA. *Jurnal Axiomath: Jurnal Matematika …*.

MIftahurrahmah. (2019). Aplikasi teori graf dalam lampu lalu lintas. *Landasanteori.Com*.

Miftahurrahman. (2016). Aplikasi Teori Graf dalam Pengaturan Lampu Lalu Lintas. In *Aplikasi Teori Graf Dalam Pengaturan Lampu Lalu Lintas*.

Morihito, R. V. S. ., Chungdinata, S. E., Nazareth, T. A., Pulukadang, M. I., Makalew, R. A. ., & Pinontoan, B. (2017).

IDENTIFIKASI PERUBAHAN STRUKTUR DNA TERHADAP PEMBENTUKAN SEL KANKER MENGGUNAKAN DEKOMPOSISI GRAF. *JURNAL ILMIAH SAINS*, *17*(2). https://doi.org/10.35799/jis.17.2.2017.17368

Muflikhudin, B., & Pratama, D. (2021). Teknik Pewarnaan Graf Pada Penjadwalan Piket Osis Dengan Algoritma Welch-Powell Pada Smp Negeri 2 Kemranjen. *FUSIOMA (Fundamental Scientific Journal of Mathematics) :*, *1*(2).

Nasution, R. R., & Sitompul, P. (2018). Aplikasi Pewarnaan Graf Pada Penyusunan Jadwal Mata Kuliah Jurusan Matematika Di Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Medan. *Karismatika*, *6*(2).

Nursupiamin, N. (2018). Representasi Matematika Al-Qur�an Melalui Teori Graf. *Al-Khwarizmi: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam*, *3*(2). https://doi.org/10.24256/jpmipa.v3i2.234

Pembelajaran, M., Melatihkan, U., Komunikasi, K., & Siswa, D. A. N. K. (2019). *MODEL PEMBELAJARAN INVESTIGATION BASED SCIENTIFIC COLABORATIVE (IBSC) PASCASARJANA PROGRAM STUDI S3 PENDIDIKAN SAINS PROGRAM STUDI S3 PENDIDIKAN SAINS*.

Prihatmaja, P. A. (2017). Penerapan Teori Graf dalam Jaringan Komputer. *Makalah IF2120 Matematika Diskrit – Sem. I.*

Puspasari, R. (2019). Pengembangan Buku Ajar Kompilasi Teori Graf dengan Model Addie. *Journal of Medives : Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang*, *3*(1). https://doi.org/10.31331/medivesveteran.v3i1.702

Puspasari, R., & Suryaningsih, T. (2019). Pengembangan Buku Ajar Teori Graf untuk Mahasiswa Pendidikan Matematika. *Jurnal Tadris Matematika*, *2*(1). https://doi.org/10.21274/jtm.2019.2.1.85-100

Putra, F. N., & Fauziah, I. A. (2020). Pemetaan Lokasi Kejadian dalam Sistem Deteksi Kejadian dengan Data Twitter Menggunakan Teori Graf. *Briliant: Jurnal Riset Dan Konseptual*, *5*(2). https://doi.org/10.28926/briliant.v5i2.472

Rahma, A. N., Rahmawati, R., & Zukrianto, Z. (2021). Aplikasi Pewarnaan Graf Pada Peta Provinsi Riau Menggunakan Algoritma Greedy. *Square : Journal of Mathematics and Mathematics Education*, *3*(1). https://doi.org/10.21580/square.2021.3.1.7410

Rifanti, U. M., & Arifwidodo, B. (2019). Implementasi algoritma Floyd dalam menentukan rute terpendek transportasi pariwisata. *Register: Jurnal Ilmiah Teknologi Sistem Informasi*, *5*(2). https://doi.org/10.26594/register.v5i2.1683

Rudhito, M. A. (2016). Aljabar max-plus dan penerapannya. *Universitas Sanata Dharma Yogyakarta*.

Sari, M. R., & Dwiyanti, K. T. (2018). TEORI GRAF DALAM ANALISIS JEJARING SOSIAL: HUBUNGAN AKTOR UTAMA DENGAN PENGGUNA INTERNAL LAPORAN KEUANGAN. *Jurnal Akuntansi Dan Keuangan Indonesia*, *15*(1). https://doi.org/10.21002/jaki.2018.02

Satyanuraga, D. (2015). Penerapan Teori Graf Dalam Rencana Tata Ruang Kota. *Makalah IF2120 Matematika Diskrit – Sem. I Tahun*.

Suriyah, P., Waluya, S. B., Rochmad, R., & Wardono, W. (2020). Graph Theory as A Tool for Growing Mathematical Creativity. *Jurnal Pendidikan Edutama*, *7*(1). https://doi.org/10.30734/jpe.v7i1.744

Utomo, T., & Riskiana Dewi, N. (2018). Dimensi Metrik Graf Amal(nKm). *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, *15*(1). https://doi.org/10.12962/limits.v15i1.3376