

Psikologi Pendidikan Matematika

Memahami Bagaimana
Mengajarkan Matematika

Andi Aras, M. Pd
Dr. Buhaerah, M. Pd

Penerbit



Psikologi Pendidikan Matematika

Memahami Bagaimana
Mengajarkan Matematika

Andi Aras, M. Pd & Dr. Buhaerah, M. Pd.

Diterbitkan oleh:

IAIN Parepare Nusantara Press
E-mail : nusantarapress@iainpare.ac.id



Editor: Fawziah Zahrawati B, M. Pd

Layout: Nur Annisa Wara, S. Si.

Desain Cover: Alwi, S.T

Terbit: 27 Oktober 2020

ISBN: 978-623-6622-28-5

Hak Cipta dilindungi undang-undang

Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini dengan bentuk dan cara apa pun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit.

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah, penulis panjatkan kehadiran Allah SWT., karena dengan rahmat, taufik dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan buku Psikologi Pendidikan Matematika.

Buku psikologi pendidikan matematika ini sebagai solusi masalah didalam pembelajaran matematika. Sejauh ini mahasiswa prodi tadris matematika belajar mata kuliah psikologi umum terlepas dari konsep dan pembelajaran matematika, sementara dalam buku ini dipelajari psikologi yang dikaitkan secara langsung dengan konsep-konsep matematika.

Buku ini terdiri dari 9 Bab yang membahas tentang pengantar psikologi pendidikan matematika, pembentukan konsep-konsep matematika, gagasan skema matematika, kecerdasan intuitif dan reflektif, simbol-simbol matematika, representasi matematika, sistem numerasi, kebutuhan akan bilangan baru, dan sistem bilangan. Hadirnya buku ini tidak terlepas dari karya besar Skemp, R. R. (1971) *"The Psychology of Learning Mathematics"* dan Krutetskii, (1976)

“The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren”.

Penulis tertarik ketika melihat kenyataan bahwa masalah dalam belajar matematika tidak hanya berkaitan dengan masalah kecerdasan semata, tetapi juga berkaitan dengan masalah psikologi. Masalah pembelajaran merupakan masalah psikologis dan sebelum memperbaiki pembelajaran matematika terlebih dahulu kita perlu mengetahui bagaimana matematika itu dipelajari. Buku “Psikologi Pendidikan Matematika” ini dibuat sebagai solusi untuk memperbaiki pembelajaran matematika. Oleh karena itu, penulis berharap hal ini akan menambah minat tidak saja bagi mahasiswa calon guru matematika, tapi juga siswa dan siapa saja yang tertarik untuk mempelajari matematika.

Penulis sadar bahwa buku ini masih jauh dari kata sempurna, maka saran dan kritik yang konstruktif dari para pembaca sangatlah penulis harapkan untuk perbaikan buku ini pada edisi selanjutnya.

Parepare, Oktober 2020

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	iii
DAFTAR ISI.....	v
DAFTAR GAMBAR.....	ix
DAFTAR TABEL.....	xi
<i>OUTLINE</i> MATA KULIAH.....	xiii
BAB 1	
PENGANTAR PSIKOLOGI PENDIDIKAN MATEMATIKA	1
A. Pengertian Psikologi Pendidikan.....	1
B. Pembelajaran Matematika	3
C. Hierarki Pembelajaran Matematika	5
D. Teori-Teori Pokok Belajar	7
E. Psikologi Pembelajaran Matematika menurut Jean Piaget	23
F. Psikologi Pembelajaran Matematika menurut Van Hille	33
G. Psikologi Pembelajaran Matematika menurut Polya	42
H. Kepercayaan Diri (<i>Self-Efficacy</i>) dalam Pembelajaran Matematika	49
I. Kemampuan Meregulasi Diri (<i>Self-Regulated Learning</i>) dalam Pembelajaran Matematika	59
J. Daya Juang (<i>Adversity Quotient</i>) dalam Pembelajaran Matematika	69
K. Kesulitan Belajar Matematika	84
RANGKUMAN	100

Latihan Soal	102
BAB 2	
PEMBENTUKAN KONSEP-KONSEP MATEMATIKA	105
A. Pengertian Konsep	105
B. Konsep dalam Matematika	112
C. Pembentukan dan Pemahaman Konsep Matematika	114
D. Pengajaran Konsep Matematika	123
RANGKUMAN	132
Latihan Soal	133
BAB 3	
GAGASAN SKEMA MATEMATIKA	135
A. Pengertian Skema	135
B. Skema sebagai Alat Pembelajaran Lebih Lanjut	138
C. Kegunaan Skema dalam Pembelajaran Matematika	143
D. Memahami Gagasan dari Skema	145
E. Pembelajaran dengan Meningkatkan Pemahaman	151
RANGKUMAN	158
Latihan Soal	159
BAB 4	
KECERDASAN INTUITIF DAN REFLEKTIF	161
A. Pengertian Kecerdasan Intuitif dan Kecerdasan Reflektif	163
B. Mengembangkan Kecerdasan Intuitif dan Reflektif	167
C. Kecerdasan Intuitif dan Kecerdasan Reflektif dalam Pembelajaran Matematika	174

RANGKUMAN	182
Latihan Soal	183
BAB 5	
SIMBOL-SIMBOL MATEMATIKA	185
A. Pengertian Simbol	185
B. Fungsi Simbol	187
C. Simbol Matematika	197
RANGKUMAN	211
Latihan Soal	212
BAB 6	
REPRESENTASI MATEMATIKA	213
A. Simbol Visual dan Simbol Verbal	213
B. Simbol-Simbol Visual di dalam Geometri	217
C. Representasi dalam Pembelajaran Matematika	225
RANGKUMAN	234
Latihan Soal	236
BAB 7	
SISTEM NUMERASI	237
A. Sejarah Perkembangan Bilangan	237
B. Himpunan	247
C. Numerasi	250
D. Penjumlahan	253
E. Perkalian	259
F. Sifat Distributif	260
G. Dua Sifat Pada Penjumlahan	264
H. Perkalian adalah Asosiatif dan Komutatif	265
I. Lima Sifat Sistem Bilangan Asli	268

RANGKUMAN	269
Latihan Soal	270
BAB 8	
KEBUTUHAN AKAN BILANGAN BARU	271
A. Sejarah Bilangan Pecahan	272
B. Bilangan Pecahan	275
C. Pecahan Ekuivalen	277
D. Penjumlahan Bilangan Pecahan.....	278
E. Perkalian Bilangan Pecahan	281
F. Sifat Dari Bilangan Pecahan.....	284
RANGKUMAN	286
Latihan Soal	287
BAB 9	
SISTEM BILANGAN	289
A. Bilangan dari Sistem yang Berbeda	291
B. Lawan yang Menghapus	294
C. Bilangan Bulat	295
D. Bilangan Rasional	299
E. Bilangan Irasional	309
RANGKUMAN	325
Latihan Soal	326
DAFTAR PUSTAKA	327
GLOSARIUM.....	335
BIOGRAFI PENULIS.....	343

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	<i>Classical Conditioning</i>	12
Gambar 1.2	<i>Analisis Triadik Self-regulated</i>	61
Gambar 2.1	Proses Pembentukan Konsep	107
Gambar 4. 1	Skema Kecerdasan Intuitif	164
Gambar 4. 2	Skema Kecerdasan Reflektif	166
Gambar 4. 3	Skema Kecerdasan Reflektif Lebih Lanjut	167
Gambar 4. 4	Melatih Kebiasaan	172
Gambar 6. 1	Menyatakan Teorema 1 dalam Simbol Visual	219
Gambar 6. 2	Menyatakan Teorema 2 dalam Simbol Visual	219
Gambar 6. 3	Konversi dari Teorema	220
Gambar 6. 4	Menyatakan Teorema 3 dalam Simbol Visual	221
Gambar 6. 5	Menyatakan Teorema 4 dalam Simbol Visual	222
Gambar 6. 6	Keuntungan Penyajian Secara Visual	223

Gambar 6. 7	Pembuktian Teorema denga Simbol Visual	224
Gambar 6. 8	Pembuktian Lebih lanjut	224
Gambar 6. 9	Representasi Siswa sebagai Hasil dari Menduakalikan Ukuran Panjang Sisi-Sisi Persegi Panjang	233

DAFTAR TABEL

Tabel 2. 1	Langkah Strategi Pembentukan Konsep	117
Tabel 2.2	Langkah Strategi Pemahaman Konsep Model Penerimaan	120
Tabel 2.3	Langkah Strategi Pemahaman Konsep Model Pilihan	122
Tabel 2.4	Langkah Strategi Pemahaman Konsep untuk Data yang Tidak Terorganisir	123
Tabel 3.1	Pasangan Bilangan dan Ide Penghubung	138
Tabel 5.1	Simbol Matematika dan Artinya	198
Tabel 7.1	Sifat-sifat Bilangan Asli	268

OUTLINE MATA KULIAH

PSIKOLOGI PENDIDIKAN MATEMATIKA

SEMESTER GANJIL 2020

1. Program Studi	:	Tadris Matematika
2. Nama MataKuliah	:	Psikologi Pendidikan Matematika
3. Kode Mata Kuliah	:	
4. Semester	:	Ganjil
5. SKS	:	2 SKS
6. Dosen Pengampu	:	Andi Aras, M. Pd
7. Arti Penting Mata Kuliah :		<p>Psikologi Pendidikan Matematika merupakan mata kuliah lanjut. Oleh karena itu, setelah selesai mengikuti perkuliahan ini selain mengetahui berbagai strategi pembelajaran matematika, dapat menerapkannya, juga mengetahui bahwa pendidikan matematika itu merupakan disiplin ilmu yang pengembangannya harus dilakukan melalui penelitian. Demi memiliki pengetahuan dan kemampuan di atas mahasiswa harus mengetahui hakekat matematika, pembentukan konsep-konsep matematika, cara-cara mengajarkannya, dan cara pengembangannya sebagai suatu disiplin ilmu.</p> <p>Agar dapat mengikuti perkuliahan ini dengan baik, selain sudah menguasai matematika sekolah juga harus sudah memahami hakekat anak. Tahap penguasaan mahasiswa selain melalui UTS dan UAS juga mendiskusikan</p>

hasil percobaan-percobaan kecil mengenai perkembangan mental anak-anak Indonesia dalam memahami matematika.

8. Capaian Pembelajaran Lulusan

Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji konsep berbagai strategi pembelajaran matematika, dapat menerapkannya, dan dapat mengetahui hakekat anak didik Indonesia lebih lanjut dalam belajar matematika, pembentukan konsep-konsep matematika, cara-cara mengajarkannya, dan cara pengembangannya sebagai suatu disiplin ilmu.

9. Capaian Pembelajaran Perkuliahan/Kemampuan Akhir Tiap Tahap Pembelajaran

- 1) Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji konsep pengantar psikologi Pendidikan matematika.
- 2) Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji pembentukan konsep-konsep matematika.
- 3) Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep gagasan skema matematika.
- 4) Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep kecerdasan intuitif dan reflektif.
- 5) Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep simbol-simbol matematika.
- 6) Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep representasi matematika.
- 7) Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep sistem numerasi.
- 8) Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep kebutuhan akan bilangan baru.

- 9) Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep system bilangan.

10. Indikator

- 1) Mahasiswa pada Prodi Tadris Matematika mampu menganalisis dan mengkaji konsep pengantar psikologi Pendidikan matematika.
- 2) Mahasiswa pada Prodi Tadris Matematika mampu menganalisis dan mengkaji pembentukan konsep-konsep matematika.
- 3) Mahasiswa pada Prodi Tadris Matematika mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep gagasan skema matematika.
- 4) Mahasiswa pada Prodi Tadris Matematika mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep kecerdasan intuitif dan reflektif.
- 5) Mahasiswa pada Prodi Tadris Matematika mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep simbol-simbol matematika.
- 6) Mahasiswa pada Prodi Tadris Matematika mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep representasi matematika.
- 7) Mahasiswa pada Prodi Tadris Matematika mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep sistem numerasi.
- 8) Mahasiswa pada Prodi Tadris Matematika mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep kebutuhan akan bilangan baru.
- 9) Mahasiswa pada Prodi Tadris Matematika mampu menganalisis dan mengkaji tentang konsep sistem bilangan.

11. Standar Isi Pembelajaran

- 1) BAB I: Pengantar Psikologi Pendidikan Matematika
- 2) BAB II: Konsep-Konsep Matematika
- 3) BAB III: Gagasan Skema Matematika
- 4) BAB IV: Kecerdasan Intuitif dan Reflektif
- 5) BAB V: Simbol-Simbol Matematika
- 6) BAB VI: Representasi Matematika
- 7) BAB VII: Sistem Numerasi
- 8) BAB VIII: Kebutuhan akan Bilangan Baru
- 9) BAB IX: Sistem Bilangan

12. Metode Pembelajaran

Metode yang digunakan dalam perkuliahan ini yaitu diskusi kelas, *brain storming*, penugasan, *guinded learning*, dan *the power of two*.

13. Penilaian yang direncanakan

No	<i>Asigments</i>	Bobot
1	Laporan topik perkuliahan mingguan	20 %
2	Partisipasi kelas: pertanyaan dan atau komentar	20 %
3	Ujian Tengah Semester (UTS)	20 %
4	1 Laporan penelitian dalam bentuk artikel	40 %
Jumlah		100%

14. Deskripsi Tugas

- 1) Laporan topik perkuliahan mingguan secara individual: tugas meresume materi perkuliahan secara individual sesuai dengan topik.

- 2) Partisipasi kelas: kemampuan menyampaikan ide, kemampuan menyampaikan argumentasi, memberikan kontribusi pemikiran baik berupa pertanyaan maupun komentar dalam suasana bebas resiko (*free risk environment*) saat diskusi kelas.
- 3) Ujian Tengah Semester (UTS): tes yang dilaksanakan di pertengahan semester terkait dengan materi pada pertemuan 2-12.
- 4) Laporan penelitian dalam bentuk artikel: membuat satu laporan mini riset masalah psikologi pendidikan matematika sesuai kaidah penelitian sebanyak 10-13 halaman.

15. Format Dan Sistematika Artikel

1) Format Artikel :

- Jumlah halaman hanya antara 10 s/d 13. Jarak 1.5 spasi.
- Satu model transliterasi.
- Catatan berada di kaki (*footnote*), tidak masuk tulisan ataupun di akhir tulisan (*end-note*)

2) Sistematika Jurnal :

- Judul
- Nama penulis
- Abstrak
- Pendahuluan
- Metode penelitian
- Hasil penelitian dan pembahasan
- Penutup
- Daftar Pustaka

16. Standar Penilaian Tugas Artikel

No	NILAI	UNSUR dan KRITERIA
----	-------	--------------------

	15 %	Pendahuluan
	5	Menyatakan jelas pokok masalah, teori yang digunakan dan latar penelitian.
	4	Lebih lemah dari versi 5
	3	Pendahuluan terlalu panjang. Kerangka pikir diungkapkan tetapi tidak jelas
	2	Lebih lemah dari versi 3
	1	Sedikit atau tidak ada usaha deskripsi kerangka pikir dalam pendahuluan atau deskripsi.
	50 %	Kualitas Argumen
	5	Mengembangkan argumen logis, ide yang relevan dengan bukti yang jelas.
	4	Lebih lemah dari versi 5
	3	Beberapa aspek argumen dan penggunaan bukti-bukti lemah
	2	Lebih lemah dari versi 3
	1	Kelemahan terbesar dalam argumen dan penggunaan bukti atau tidak ada argumen.
	20 %	Penggunaan Bukti-Bukti
	5	Menggunakan bukti-bukti. Memperlihatkan hubungan antara bukti dan kerangka pikir
	4	Lebih lemah dari versi 5
	3	Beberapa pencantuman materi yang tidak relevan.
	2	Lebih lemah dari versi 3
	1	Kebanyakan materi tidak relevan

	5 %	Presentasi
	5	Penggunaan bahasa yang efektif dan benar. Referensi tepat dan jelas
	4	Lebih lemah dari versi 5
	3	Beberapa kesalahan kecil dalam tata bahasa, sintaksis, dan pengacuan.
	2	Lebih lemah dari versi 3
	1	Banyak kesalahan.
	10 %	Kesimpulan
	5	Menggambarkan uraian argumen yang koheren terhadap pertanyaan
	4	Lebih lemah dari versi 5
	3	Kesimpulan jelas berdasarkan argumen dan bukti-bukti yang disajikan
	2	Lebih lemah dari versi 3
	1	Sedikit/tidak ada kesimpulan/tidak berdasarkan argumen dan bukti dalam makalah

16) Referensi dan Sumber Informasi

- 1) Bell, F.H. (1981). *Teaching and Learning Mathematics (In Secondary School)*. United States of America: Wm. C. Brown Company Publishers.
- 2) Hiebert, J. & Carpenter P. T. (1992). *Learning and Teaching with Understanding*. Dalam D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*.(h. 65 -100).New York: Macmillan Publishing Company.

- 3) Krutetskii. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.
- 4) Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Great Britain: Richard Clay (The Chaucer Press) Ltd, Bungay, Suffolk.
- 5) Zubaidah A, & Risnawati. (2015). *Psikologi Pembelajaran Matematika*. Yogyakarta: Aswaja Pressindo.

17) Rencana Kegiatan Pembelajaran Mingguan

Pert.	Capaian Pembelajaran Perkuliahan	Materi Ajar	Waktu/menit	Metode
1	Mahasiswa mengetahui dan memahami out line mata kuliah psikologi Pendidikan matematika	Kontrak Perkuliahan	100	Ceramah dan tanya jawab
2-4	1. Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji materi tentang: pembelajaran matematika, hirarki pembelajaran matematika, dan	BAB 1: Pengantar Psikologi Pendidikan	3x100	Diskusi, tanya jawab, ceramah, <i>brain storming</i> , dan

	<p>teori-teori pokok belajar</p> <p>2. Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji materi tentang: psikologi pembelajaran matematika menurut Jean Piaget, psikologi pembelajaran matematika menurut Van Hille, dan psikologi pembelajaran matematika menurut Polya.</p> <p>3. Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji materi tentang: kepercayaan diri (<i>self-efficacy</i>) dalam pembelajaran matematika, kemampuan meregulasi diri (<i>self-regulated learning</i>) dalam pembelajaran matematika, dan daya juang (<i>adversity quotient</i>) dalam pembelajaran</p>	<p>Matematika</p>		<p>penugasan.</p>
--	--	-------------------	--	-------------------

	matematika, dan kesulitan belajar matematika.			
5	Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji materi tentang Pembentukan Konsep-Konsep Matematika: pengertian konsep, konsep dalam matematika, pembentukan dan pemahaman konsep matematika, dan pengajaran konsep matematika,	BAB 2: Pembentukan Konsep-Konsep Matematika	100	Diskusi, tanya jawab, ceramah, <i>brain storming</i> , dan penugasan.
6	Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji materi tentang Gagasan Skema Matematika: pengertian skema, skema sebagai alat pembelajaran lebih lanjut, kegunaan skema dalam pembelajaran matematika, dan pembelajaran dengan meningkatkan pemahaman.	BAB 3: Gagasan Skema Matematika	100	Diskusi, tanya jawab, ceramah, <i>brain storming</i> , dan penugasan.

7	Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji materi tentang Kecerdasan Intuitif dan Reflektif: pengertian kecerdasan intuitif dan kecerdasan reflektif, mengembangkan kecerdasan intuitif dan reflektif, kecerdasan intuitif dan kecerdasan reflektif dalam pembelajaran matematika.	BAB 4: Kecerdasan Intuitif dan Reflektif	100	Diskusi, tanya jawab, ceramah, <i>brain storming</i> , dan penugasan.
8	Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji materi tentang Simbol-Symbol Matematika: pengertian simbol, fungsi simbol, dan simbol matematika.	BAB 5: Simbol-Symbol Matematika	100	Diskusi, tanya jawab, ceramah, <i>brain storming</i> , dan penugasan.
9	Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji materi tentang Representasi Matematika: simbol	BAB 6: Representasi	100	Diskusi, tanya jawab, ceramah, brain

	visual dan simbol verbal, simbol-simbol visual dalam geometri, dan representasi dalam pembelajaran matematika.	Mate matika		storming , dan penugasan.
10	Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji materi tentang Sistem Numerasi: sejarah perkembangan bilangan, himpunan, numerasi, penjumlahan, dan perkalian.	BAB 7: Sistem Numerasi	100	Diskusi, tanya jawab, ceramah, <i>brain storming</i> , dan penugasan.
11	Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji materi tentang Kebutuhan akan Bilangan Baru: sejarah bilangan pecahan, penjumlahan ekuivalen, penjumlahan bilangan pecahan, dan perkalian bilangan pecahan.	BAB 8: Kebutuhan akan Bilangan Baru	100	Diskusi, tanya jawab, ceramah, <i>brain storming</i> , dan penugasan.
12	Mahasiswa mampu menganalisis dan mengkaji materi tentang Sistem	BAB 9: Sistem	100	Diskusi, tanya jawab, ceramah,

	Bilangan: bilangan dari sistem yang berbeda, lawan yang menghapus, bilangan bulat, bilangan rasional, dan bilangan irasional.	Bilangan		<i>brain storming</i> , dan penugasan.
13	UTS		100	
14-16	Mini Riset (UAS)	Laporan penelitian dalam bentuk artikel	3 x 100	

18) Saran-Saran

- 1) Setiap mahasiswa berkontribusi dalam menciptakan suasana perkuliahan yang kondusif, tertib, aman dan lancar serta mengarah pada pembentukan kepribadian yang berkarakter Intelektual Islami, yakni:
 - a. Tidak menggunakan sepatu santai/tidak menggunakan pakaian yang berbahan levis/jeans.
 - b. Tidak mengenakan cadar serta tidak mengenakan jilbab yang menonjolkan mode berlebihan bagi perempuan.
 - c. Berpenampilan rambut yang tertata rapi bagi laki-laki.
 - d. Hp *disilent* atau dinonaktifkan pada saat perkuliahan berlangsung.
 - e. dll (*secara jelas dapat dilihat dalam Kode Etik mahasiswa IAIN Parepare*).

- 2) Mahasiswa hadir tepat waktu pada perkuliahan dan selambat-lambatnya 15 menit setelah perkuliahan dimulai.
- 3) Mahasiswa yang terlambat hadir (paling lambat 15 menit setelah perkuliahan dimulai) terlebih dahulu memberi kabar melalui pesan/WA.
- 4) Mahasiswa berpartisipasi aktif dalam perkuliahan dan mengumpulkan tugas tepat waktu.
- 5) Ujian susulan dapat diberikan kepada mahasiswa yang tidak sempat mengikuti UTS dan UAS. Alasan pemberian ujian susulan hanyalah sakit, kematian keluarga dekat dan pernikahan mahasiswa yang bersangkutan atau berdasarkan kontrak kuliah yang telah dibuat.
- 6) Kehadiran minimal 75 % dan mahasiswa yang kehadirannya dalam tatap muka perkuliahan berkisar antara 50% hingga 74%, maka mahasiswa ybs dapat diberi tugas tambahan. Penambahan tatap muka kepada mahasiswa maksimal 3 kali tatap muka.
- 7) Mahasiswa yang tidak mencapai tatap muka minimal 50% dinyatakan GUGUR dalam mata kuliah yang bersangkutan.
- 8) Remedial (pengulangan ujian) hanya diberikan kepada mahasiswa (i) yang nilai Ujian Akhir Semester (UAS) dibawah 60.

Parepare, 20 September 2020

Disahkan oleh Ka. Prodi
Tadris Matematika

Yang Membuat
Dosen Pengampu

(Dr. Buhaerah, M. Pd.)

(Andi Aras, M. Pd.)

BAB 1

PENGANTAR PSIKOLOGI PENDIDIKAN MATEMATIKA

A. Pengertian Psikologi Pendidikan

Psikologi terbentuk dari dua suku kata *psyche* dan *logos* kata *psyche* yang berarti “jiwa” dan *logos* berarti “ilmu”. Dari bentuk kata tersebut dapatlah diartikan bahwa psikologi adalah ilmu yang mempelajari tentang jiwa. Secara umum psikologi dapat diartikan sebagai ilmu pengetahuan yang mengkaji perilaku individu (khususnya manusia) dalam interaksinya dengan lingkungan. Perilaku yang dimaksud adalah dalam pengertian yang luas, yaitu sebagai manifestasi hayati (hidup) yang terwujud sebagai hasil interaksi dengan lingkungannya (Wade & Travis, 2011). Secara umum psikologi adalah ilmu yang mempelajari gejala kejiwaan seseorang yang sangat penting adanya dalam proses pendidikan. Psikologi pendidikan merupakan alat dalam mencapai tujuan pendidikan yang telah ditetapkan karena prinsip yang terkandung dalam

psikologi pendidikan dapat dijadikan landasan berpikir dan bertindak dalam mengelola proses belajar-mengajar, yang merupakan unsur utama dalam pelaksanaan setiap sistem pendidikan.

Dalam menerapkan prinsip psikologis tersebut diperlukan adanya figur guru yang kompeten, dan guru yang kompeten adalah guru yang mampu melaksanakan profesinya secara bertanggung jawab yang mampu mengelola proses pembelajaran sebaik mungkin sesuai dengan prinsip-prinsip psikologi. Dengan demikian, sudah saatnya sekarang pendidikan kita untuk melayani kebutuhan dan hakikat psikologis peserta didik. Pemahaman pada peserta didik yang berkaitan dengan aspek kejiwaan merupakan salah satu kunci keberhasilan pendidikan. Oleh karena itu, hasil kajian dan penemuan psikologi sangat diperlukan penerapannya dalam bidang pendidikan, termasuk pada pendidikan matematika. Untuk itu, psikologi menyediakan sejumlah informasi tentang kehidupan pribadi manusia pada umumnya serta berkaitan dengan aspek pribadi. Individu memiliki bakat, kemampuan, minat, kekuatan yang perkembangannya berbeda satu dengan yang lain. Sebagai implikasinya pendidik tidak mungkin memperlakukan sama kepada setiap peserta didik, sekalipun mereka mungkin memiliki

beberapa persamaan. Penyusunan kurikulum perlu berhati-hati dalam menentukan jenjang pengalaman belajar yang akan dijadikan garis-garis besar program pengajaran serta tingkat keterincian bahan belajar yang digariskan. Landasan Psikologi pendidikan adalah suatu landasan dalam proses pendidikan yang membahas berbagai informasi tentang kehidupan manusia pada umumnya serta gejala-gejala yang berkaitan dengan aspek pribadi manusia pada setiap tahapan usia perkembangan tertentu untuk mengenali dan menyikapi manusia sesuai dengan tahapan usia perkembangannya yang bertujuan untuk memudahkan proses pendidikan. Kajian psikologi yang erat hubungannya dengan pendidikan adalah yang berkaitan dengan kecerdasan, berpikir, dan belajar (Pratama & Dalyono, 1997).

B. Pembelajaran Matematika

Pembelajaran matematika adalah suatu proses belajar mengajar yang dibangun oleh guru untuk mengembangkan kreativitas berpikir siswa yang dapat meningkatkan kemampuan berpikir siswa, serta dapat meningkatkan kemampuan mengkonstruksi pengetahuan baru sebagai upaya meningkatkan penguasaan yang baik terhadap materi matematika. Dalam proses pembelajaran

matematika, baik guru maupun murid bersama-sama menjadi pelaku terlaksananya tujuan pembelajaran. Tujuan pembelajaran ini akan mencapai hasil yang maksimal apabila pembelajaran berjalan secara efektif. Pembelajaran yang efektif adalah pembelajaran yang mampu melibatkan seluruh siswa secara aktif baik dari segi proses maupun dari segi hasil. Pertama, dari segi proses, pembelajaran dikatakan berhasil dan berkualitas apabila seluruhnya atau sebagian besar peserta didik terlibat secara aktif, baik fisik, mental, maupun sosial dalam proses pembelajaran, di samping menunjukkan semangat belajar yang tinggi dan percaya diri. Kedua, dari segi hasil, pembelajaran dikatakan efektif apabila terjadi perubahan tingkah laku ke arah positif, dan tercapainya tujuan pembelajaran yang telah ditetapkan. Perubahan tersebut terjadi dari tidak tahu menjadi tahu konsep matematika, dan mampu menggunakannya dalam kehidupan sehari-hari. Menurut Hans Freudental, matematika merupakan aktivitas manusia dan harus dikaitkan dengan realitas. Dengan demikian, matematika merupakan cara berpikir logis yang direpresentasikan dalam bilangan, ruang, dan bentuk dengan aturan-aturan yang telah ada yang tak lepas dari aktivitas manusia. Pada hakikatnya, matematika tidak terlepas dari kehidupan sehari-hari. Semua masalah

kehidupan yang membutuhkan pemecahan secara cermat dan teliti mau tidak mau harus berpaling kepada matematika (Mulyana, 2014).

C. Hierarki Pembelajaran Matematika

Sebelum dijelaskan apa yang dimaksud dengan Hierarki Belajar Matematika, terlebih dahulu harus diketahui Apa itu Hierarki Belajar, para guru tentunya sudah memahami bahwa suatu Kompetensi Dasar diajarkan mandahului Kompetensi Dasar lainnya satu Kompetensi Inti yang di ajarkan mendahului Kompetensi Inti lainnya. Pada dasarnya, pengetahuan yang lebih sederhana harus dikuasai para siswa terlebih dahulu dengan baik agar ia dapat dengan mudah mempelajari pengetahuan yang lebih kompleks. Pertanyaan yang sering muncul adalah mengapa suatu Kompetensi Dasar harus diajarkan mendahului Kompetensi Dasar lainnya? Gagne memberikan alasan pemecahan dan pengurutan materi pembelajaran dengan selalu menanyakan pertanyaan ini: "Pengetahuan apa yang lebih dahulu harus dikuasai siswa agar ia berhasil mempelajari suatu pengetahuan tertentu?". Setelah mendapat jawabanya, ia harus bertanya lagi seperti pertanyaan yang di atas tadi untuk mendapatkan prasarat yang harus dikuasai dan dipelajari siswa sebelum ia

mempelajari pengetahuan tersebut. Begitu seterusnya sampai didapatkan urutan pengetahuan dari yang paling sederhana sampai yang paling kompleks. Dengan cara seperti itulah kita akan mendapatkan hierarki belajar. Apa yang dipaparkan di atas dapat diperjelas dengan tulisan Hill (2012) berikut ini: *“A hierarchy is generated by considering the target task and asking: “What would (this child) have to know and how to do in order to perform this task...?”* Karena itu, hierarki belajar menurut Gagne harus disusun dari atas ke bawah atau *top down*. Dimulai dengan menempatkan kemampuan, pengetahuan, ataupun keterampilan yang menjadi salah satu tujuan dalam proses pembelajaran di puncak dari hierarki belajar tersebut, diikuti kemampuan, keterampilan, atau pengetahuan prasyarat yang harus mereka kuasai lebih dahulu agar mereka berhasil mempelajari keterampilan atau pengetahuan di atasnya itu. Hierarki belajar dari Gagne memungkinkan juga prasyarat yang berbeda untuk kemampuan yang berbeda pula. Sebagai contoh, pemecahan masalah membutuhkan aturan, prinsip dan konsep-konsep terdefinisi sebagai prasyaratnya, yang membutuhkan konsep konkret sebagai prasyarat berikutnya, yang masih membutuhkan kemampuan membedakan sebagai prasyarat berikutnya lagi. Sebelum mempelajari perkalian,

siswa harus memahami konsep penjumlahan, dan tentunya harus mengenal konsep bilangan mulai dari konkret hingga abstrak (Zubaidah & Risnawati, 2015).

D. Teori-Teori Pokok Belajar

1. Teori Belajar Nativisme

Noam Chomsky sebagai pelopor utamanya teori belajar nativisme, kaum Nativis (*native*: alamiah, bawaan dari lahir) dengan tidak menganggap penting pengaruh lingkungan. Pandangan Nativis menyatakan bahwa kecerdasan seseorang ditentukan secara kodrati. Menurut Chomsky, anak lahir sudah dibekali dengan seperangkat alat yang memungkinkannya untuk dapat memperoleh pengetahuan (Bahasa). Alat ini memungkinkannya untuk mengamati secara sistematis bahasa di sekitarnya, apapun alasannya, sehingga ia dapat membangun dan mencamkan dalam hati (*internalize*) sistem bahasa tersebut. Alat itu dinamakannya *Language Acquisition Device* (alat pemerolehan bahasa) yang disingkat menjadi LAD. LAD ini dianggap sebagai suatu bagian fisiologi dari otak yang dikhususkan untuk memproses bahasa, dan hanya manusia yang memiliki alat ini, sehingga hanya manusia yang mampu berbahasa. Menurut pandangan ini, masukan (input), yakni bahasa yang digunakan di sekeliling anak,

hanya pemicu untuk mengaktifkan LAD ini sehingga anak dapat menguasai bahasa. Kalau manusia tidak memiliki alat kodrati ini, tidak mungkin ia bisa menguasai bahasa yang disuguhkan secara alami. Pandangan yang beranggapan bahwa kemampuan berbahasa merupakan pemberian biologis dalam bahasa Inggris disebut *Innateness Hypothesis* (Hipotesis Bawaan atau Hipotesis Kodrati).

Berikut ini beberapa argumentasi, atau pertimbangan, yang dikemukakan oleh kaum Nativis untuk mendukung Hipotesis Bawaan.

- 1) Anak-anak menguasai bahasa pertama sebelum mereka berusia lima tahun (Elliot, 1987). Dalam umur semula ini, anak menguasai suatu sistem yang kompleks tanpa arahan formal. Padahal, data bahasa yang dijadikan sumber rujukan sering tidak berurutan. Ujaran-ujaran orang dewasa yang didengar oleh anak-anak tidak selalu berwujud kalimat yang benar secara gramitikal. Kalimat-kalimat sering tidak lengkap dan sering terjadi salah ucap. Di samping itu, data bahasa berasal dari beberapa sumber yang berbeda. Misalnya tuturan ibu, kakak, nenek, kakek dan sebagainya tidak selalu sama dalam gaya bahasa penggunaan kosakata, pengucapan dan sebagainya. Oleh karena itu, anak

tidak mungkin menguasai bahasa dalam waktu singkat hanya dengan meniru saja.

- 2) Data bahasa yang diterima terbatas, namun kemampuan anak-anak memproses dan membentuk ujaran-ujaran tidak terbatas. Dengan kaidah bahasa dan kosakata yang telah mereka kuasai, mereka dapat menuturkan ujaran-ujaran yang belum pernah mereka dengar. Dengan kata lain, mereka memiliki kreativitas bahasa (*linguistic creativity*).
- 3) Anak-anak mampu menguasai kaidah-kaidah bahasanya walaupun mereka tidak secara formal menerima penjelasan mengenai tata bahasa atau kaidah bahasa.
- 4) Anak-anak mampu menguasai kurang lebih dua belas kata sehari (Chomsky, 1988). Mereka menguasai kosakata tanpa bersusah payah dan mungkin sambil bermain, berlari, bercerita dan sebagainya. Demikian pula hasil penelitian Clark (1982) pada anak-anak dengan latar belakang bahasa yang berbeda, yakni bahasa Inggris, Jerman, dan Prancis, menunjukkan bahwa anak-anak menciptakan kata-kata baru berdasarkan kata-kata yang telah dikuasai. Di dalam berbicara mengenai

tindakan (*action*), tampaknya anak-anak mengambil kata-kata benda yang telah diketahui untuk menciptakan kata kerja dengan makna baru.

Keempat hal tersebut di atas adalah beberapa argumentasi yang diajukan oleh kaum Nativis untuk menunjukkan bahwa anak-anak telah dilengkapi dengan alat khusus untuk memperoleh bahasa, baik tata bahasa, sistem bunyi, maupun kosakatanya. Tanpa LAD, tanpa dibekali kemampuan yang dibawa sejak lahir, mustahil anak-anak dapat memiliki kemahiran berbahasa.

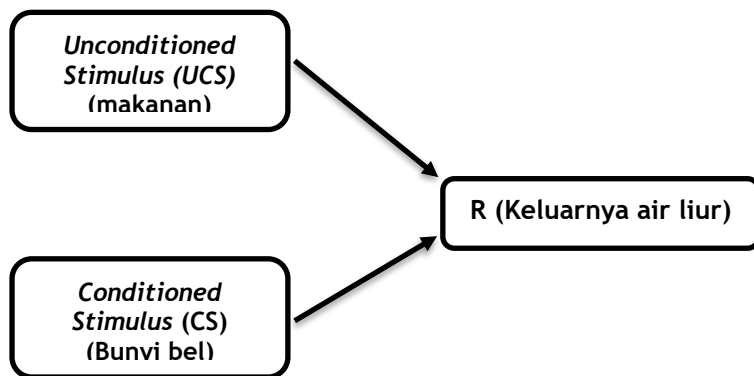
2. Teori Belajar Behaviorisme

Dalam teori behaviorisme, ada tiga konsep penting: (1) Rangsangan (*stimulus*) yang disimbolkan dengan S; (2) Tanggapan atau respons (*response*) dengan simbol R; dan (3) Penguatan (*reinforcement*) dengan simbol S+ dan S-. Istilah stimulus mengacu pada semua hal atau perubahan yang ada dalam lingkungan. Kata-kata atau kalimat dalam buku ini adalah contoh dari rangsangan. Stimulus dapat berasal dari luar (*external stimulus*), misalnya suara petir, suara manusia, ujaran, atau sinar dan dapat berasal dari dalam (*internal stimulus*) misalnya rasa lapar, atau keinginan untuk berbicara. Respons mengacu pada perubahan perilaku yang melibatkan adanya aktivitas yang disebabkan oleh otot dan kelenjar. Sama halnya dengan

stimulus, respons bisa berupa respons luar (*external*) dan respons dalam (*internal*). Penguatan (*reinforcement*) adalah peristiwa atau sesuatu yang dianggap sebagai hadiah atau hukuman yang menyebabkan makin besarnya kemungkinan stimulus (S) tertentu menghasilkan respons (R) tertentu. Belajar dapat digambarkan sebagai pembentukan hubungan antara S dan R. Atau dengan kata lain, belajar adalah kecenderungan S tertentu menghasilkan R tertentu. Prinsip yang menjadi dasar dari pendekatan pembelajaran S-R digunakan pada penelaahan perilaku *classical conditioning* dan *operant conditioning*. Kedua prosedur pengkondisian ini dimulai dari penelitian pada 'bagaimana hewan belajar dan diperluas pada pembelajaran bahasa'. Prosedur *conditioning* ini dijadikan dasar untuk program pengajaran bahasa kepada tuna rungu dan tuna grahita. Para pakar psikolog juga mengaplikasikan prinsip-prinsip pengkondisian dan pembelajaran makna dan bentuk-bentuk gramatika kaum Behavioris pada kliennya.

Classical conditioning yang juga disebut sebagai teori *contiguity* (keterdekatan dua objek atau lebih tanpa diselingi hal lain) dikembangkan oleh ahli fisiologi Rusia, Ivan Petrovich Pavlov (1894-1936). Dalam mengembangkan teori ini, Pavlov melakukan serangkaian

percobaan. Bagaimana percobaan atau eksperimennya? Mari ikuti paparan berikut ini. Dalam eksperimennya, Pavlov menunjukkan makanan kepada anjing yang kemudian, anjing memakan makanan itu. Setelah itu, setiap kali ditunjukkan makanan, anjing itu mengeluarkan air liur. Tampak bahwa makanan yang di sini disebut *unconditional stimulus* (UCS) menyebabkan respons (R), keluarnya air liur. Pada percobaan-percobaan berikutnya, bel dibunyikan sebelum makanan ditunjukkan kepada anjing. Sesudah beberapa kali percobaan, anjing mulai mengeluarkan air liur sebagai respons terhadap bunyi bel saja. Dengan kata lain anjing tersebut telah terkondisi untuk mentransferkan responnya, dalam hal ini, keluarnya air liur atas stimulus adalah wajar, yakni makanan ke stimulus yang terkondisi (*conditioned stimulus*) dalam hal ini bunyi bel. Gambar 1.1 di bawah ini menunjukkan penjelasan di atas.



Gambar 1.1. *Classical Conditioning*

Stimulus makanan disebut *unconditioned stimulus* karena stimulus itu dapat menimbulkan respons tanpa adanya pelatihan atau pembelajaran. Stimulus bunyi bel disebut *conditioned stimulus* atau stimulus terkondisi karena rangsangan ini dapat menimbulkan respons (R) yakni keluarnya air liur setelah latihan berulang kali, dan dengan memasangkannya bersamaan dengan stimulus makanan. Respons yang ditimbulkan oleh *conditioned stimulus* disebut respons terkondisi (*conditioned respons*). Penemuan Pavlov tentang kaitan antara stimulus dan respons ini berpengaruh besar terhadap pandangan para ahli tentang psikologi belajar. Berdasarkan penemuan Pavlov ini, John B. Watson dari Amerika Serikat menciptakan istilah behaviorisme. Ia menggunakan teori *classical conditioning* untuk segala hal yang bertalian dengan belajar. Dengan proses pengkondisian, dibentuk serangkaian kaitan stimulus-respons dan tingkah laku yang lebih rumit dipelajari dengan membentuk rangkaian-rangkaian respons. Dalam lingkup pemerolehan bahasa pertama, *classical conditioning* ini dapat menjelaskan bagaimana manusia belajar makna kata. Seperti diketahui, di lapangan, banyak rangsangan bahasa yang dapat menimbulkan emosi positif atau negatif. Jika rangsangan-rangsangan bahasa, misalnya kata, frasa, atau kalimat,

sering terjadi bersamaan dengan rangsangan-rangsangan dari lingkungan, maka pada akhirnya rangsangan bahasa tersebut dapat menimbulkan respons emosional walaupun tidak ada rangsangan lingkungan. Untuk jelasnya Anda pelajari contoh berikut ini.

Budi yang berumur sekitar 15 bulan akan menarik taplak meja makan. Ibunya segera mengatakan, “Jangan! Jangan!” sambil menepis tangannya dengan harapan Budi akan menghubungkan sakit di tangannya dengan kata “Jangan! Jangan!” Diharapkan tindakan ibu Budi ini akan menimbulkan respons makna yang tidak menyenangkan bagi Budi. Jika hal ini terjadi berulang kali dan respons emosional sudah ditransferkan dari hukuman fisik ke ujaran “Jangan! Jangan!”, maka pembiasaan telah berhasil. Jadi, kata “Jangan” menghasilkan respons emosional, sama halnya dengan bunyi bel menimbulkan respons air liur. Dengan demikian, ibu tersebut telah berhasil mengajarkan makna “Jangan”. Dengan kata lain, Budi memahami makna “Jangan” yang berarti suatu larangan.

Teori *Operant Conditioning* dikemukakan oleh tokoh psikologi B.F. Skinner dengan karyanya yang terkenal berjudul *Verbal Behavior* (1957). Menurut Skinner, perilaku yang berpengaruh pada lingkungan disebut perilaku *operant* (*to operate*: menghasilkan efek yang

dikehendaki, mempengaruhi). *Operant Conditioning* merujuk pada pengkondisian atau pembiasaan di mana manusia memberikan respons atau *operant* (kalimat atau ujaran) tanpa stimulus yang tampak; *operant* ini dipelajari dengan pembiasaan (*conditioning*). Dalam proses pemerolehan bahasa pertama peran peniruan (*imitation*) dianggap sangat penting. Berdasarkan percobaan-percobaan pada tikus dan burung dara, Skinner menyimpulkan bahwa perilaku atau respons yang diikuti oleh penguat (*reinforce*) positif cenderung akan diulangi, sedangkan respons-respons yang diikuti oleh hukuman atau tidak diikuti oleh penguat, cenderung melemah untuk kemudian menghilang. Dengan demikian, dalam lingkup pembelajaran bahasa, pembelajaran perilaku bahasa yang efektif terdiri atas pemberian respons yang tepat terhadap rangsangan yang ada, dan hubungan antara rangsangan dan tanggapan menjadi kebiasaan, karena adanya penguatan (*reinforcement*). Bila seorang anak mengucapkan sesuatu yang kebetulan sesuai (*appropriate*) dengan situasi, ibunya atau orang di sekitarnya menghadihinya dengan anggukan, ucapan, senyuman, atau tindakan yang lain yang menunjukkan persetujuan. Hal ini akan mengakibatkan respons yang sama akan terjadi lagi dalam situasi yang sama. Namun, jika ujarannya tidak benar, si ibu tidak

melakukan penguatan, maka akan kecil kemungkinan terjadinya respons yang sama dalam situasi yang sejenis.

Untuk jelasnya, Anda pelajari contoh sederhana berikut. Jika Budi mengatakan “Num”, dan diberi air minum, maka dia akan menggunakan kata “Num” lagi bila ia ingin minum. Sebaliknya, bila ia misalnya, mengatakan, “Ta” tanpa diiringi penguatan dari ibunya atau orang di sekitarnya, maka ia cenderung untuk tidak mengucapkan kata tersebut untuk meminta air minum.

Penjelasan di atas selain digunakan untuk menerangkan bagaimana anak menghasilkan ujaran, juga digunakan untuk menjelaskan bagaimana anak memahami ujaran. Jika anak memberi tanggapan dengan benar terhadap rangsangan lisan, maka ia diberi hadiah atau imbalan, misalnya berupa senyuman, ucapan atau pujian. Dengan cara ini, ujaran-ujaran orang dewasa menjadi rangsangan-rangsangan bagi anak untuk menanggapi. Dalam hal ini, anak akan menunjukkan bahwa ia memahami ujaran yang didengarnya dan ia pun mampu menghasilkan wicara yang sesuai dengan situasi termaksud.

Bagaimanakah dengan perkembangan sintaksis anak? Dalam perkembangan sintaksis anak, proses pemerolehan berarti generalisasi dari satu situasi ke situasi lain, dan dalam setiap situasi, pola-pola linguistik yang

benar diperkuat oleh orang-orang dewasa di sekitar anak tersebut. Di lain pihak, pola-pola linguistik yang tidak benar, tidak diperkuat, dan lambat laun akan hilang dengan sendirinya.

Kritikan-kritikan terhadap pandangan Behaviourisme telah dikemukakan di atas bahwa menurut pendekatan Behaviorisme, perilaku bahasa dibentuk dengan peniruan-peniruan. Tampaknya ini ada benarnya, mengingat bahasa pertama yang diperoleh anak-anak sama dengan bahasa yang digunakan oleh orang di sekitarnya. Ini tampak dari kenyataan, misalnya, anak yang dilahirkan dan tumbuh di lingkungan yang berbahasa Bugis-Makassar akan menguasai Bahasa Bugis-Makassar, bukan Melayu Riau ataupun bahasa Jawa. Namun, faktor peniruan ini banyak diragukan oleh pakar di luar pendekatan Behaviorisme, khususnya para pakar dari aliran Nativisme. Mereka berpendapat bahwa belajar terjadi bukan karena meniru.

Mari kita pelajari beberapa kritikan mereka terhadap pandangan Behaviorisme beserta dengan alasan-alasannya. Kritikan-kritikan ini disarikan dari (Anglis & Martin, 1980) dan hasil penelitian (Clark, 1982).

- 1) Kaum Nativis berpendapat bahwa ujaran anak bukan tiruan dari apa yang didengarnya dari orang tuanya

atau orang di sekitarnya. Anak yang berbahasa Inggris mengucapkan *All gone milk* tentunya bukan karena ia meniru tuturan orang tuanya. Bahkan mungkin orang tuanya yang menirukan ujaran anaknya. Demikian pula, kesalahan-kesalahan yang dibuat anak bukan berdasarkan tiruan (*imitation*), karena kesalahan-kesalahan ini tidak diucapkan oleh orang dewasa. Misalnya kalimat *We goed to the park*, yang diucapkan oleh anak, bukan yang didengarnya dari orang tua atau orang di sekitarnya.

- 2) Berdasarkan kenyataan yang ada, anak-anak dapat membentuk kalimat atau ujaran yang belum pernah mereka dengar. Mereka dapat menyusun kalimat berdasarkan kombinasi-kombinasi dari kata-kata yang sudah mereka kuasai, tetapi kalimat-kalimat atau ujaran-ujaran tersebut belum pernah mereka dengar. Jika belajar bahasa hanya berdasarkan peniruan, maka tidak mungkin anak dapat menyusun kalimat atau ujaran yang belum pernah mereka dengar.
- 3) Anak-anak, apapun bahasa atau ragam bahasa yang dipelajarinya, mempunyai pola perkembangan kemampuan berbahasa yang relatif sama. Hasil penelitian Brown (1973), menunjukkan bahwa anak-anak memperoleh bahasa Inggris melalui paling tidak

dua tahap. Pada tahap pertama, ujaran anak-anak rata-rata terdiri atas dua morfem, dan kedua, ujaran-ujaran mereka terdiri atas kata penuh (*content words*), terutama kata benda dan kata kerja. Keuniversalan ini tentunya, bukan karena tiruan saja, melainkan karena anak-anak terpajan (*exposed*) oleh bahasa atau ragam bahasa yang berbeda.

- 4) Hasil-hasil penelitian, misalnya penelitian Eve V. Clark (1982), menunjukkan bahwa anak-anak menciptakan kata-kata atau kalimat yang tidak digunakan oleh orang di sekitarnya. Clark menyebut kemampuan ini sebagai kreativitas leksikal (*lexical creativity*).

3. Teori Belajar Kognitif

Jean Piaget adalah pelopor utama teori belajar kognitif. Seorang psikologi perkembangan anak dari Swiss. Beliau pakar pertama yang menekankan pentingnya perkembangan kognitif untuk memperoleh bahasa. Seperti yang telah dipelajari di pada teori belajar sebelumnya, kaum Nativis berkeyakinan bahwa kemampuan berbahasa anak dibawa sejak lahir sementara kaum Behavioris menganggap bahwa perkembangan kemampuan berbahasa anak ditentukan oleh lingkungan. Piaget tidak menyetujui kedua pendapat ekstrim tersebut. Berdasarkan data tentang perkembangan anak, beliau menyatakan bahwa struktur

berpikir tidak dibawa sejak lahir, dan bukan pula salinan dari lingkungan. Ia berkeyakinan bahwa pikiran berkembang, karena interaksi konstruktif antara anak dan lingkungannya yakni lingkungan kebahasaan, lingkungan *social*, dan lingkungan emosional. Dengan kata lain, Piaget beranggapan bahwa perubahan atau perkembangan pada anak tergantung pada keterlibatannya secara aktif dengan lingkungannya. Piaget berkeyakinan bahwa perkembangan kognitif anak menjadi dasar dari perkembangan bahasanya. Kognisi adalah pengertian yang luas mengenai berpikir dan mengamati, jadi tingkah laku yang mengakibatkan orang memperoleh pengertian atau yang dibutuhkan untuk menggunakan pengertian. Oleh karena itu, urutan perkembangan kognitif menentukan urutan perkembangan bahasa. Bagaimanakah urutan perkembangan kognitif? Menurut Piaget perkembangan kognitif merupakan proses yang terus-menerus dan hasil dari proses ini dapat dibagi ke dalam tahap-tahap. Setiap tahap dianggap mempunyai ciri khas, sehingga berbeda dengan tahap yang lain. Dalam keseluruhan, Piaget membedakan adanya sepuluh tahap perkembangan kognisi yang dapat digolongkan ke dalam empat tahap pokok. Setiap anak melalui keempat tahap ini secara berurutan. Namun, cepat lambatnya tahap yang

dilahirkan bervariasi dari satu anak ke anak yang lain. Keempat tahap pokok tersebut adalah sebagai berikut:

- 1) Tahap pertama ialah tahap sensori-motor (0-18 bulan atau 2-4 bulan). Tahap ini mencakup enam sub-tahap.
- 2) Tahap yang kedua tahap pra-operasional yang biasanya dibagi menjadi dua sub-tahap: dari 2-5 tahun dan dari 5-7 tahun.
- 3) Tahap yang ketiga disebut tahap operasional konkret (kurang lebih 7-11 tahun)
- 4) Tahap keempat ialah tahap operasional formal (mulai kurang lebih 12 tahun) Umur yang diberikan di sini hanya kira-kira, karena ada anak-anak yang memerlukan waktu yang lebih lama untuk melangkah dari satu tahap ke tahap berikutnya.

Tahap-tahap perkembangan anak dalam unit ini akan dibicarakan tahap pokok pertama, tahap sensormotor sebagai usaha untuk lebih memahami hubungan antara perkembangan kognitif dan perkembangan bahasa. Untuk itu, mari pelajari penjelasan Piaget yang berkenaan dengan tahap sensori-motor, tahap paling awal dari perkembangan intelektual pada anak. Dalam perilaku sehari-hari, anak bayi menunjukkan tindakan-tindakan inteligen. Dengan kata lain, dengan tindakan-tindakannya, tampak inteligensinya. Gerakan-gerakan refleksnya yang pertama, membawanya

memahami dunianya. Pada tahap sensor-motor ini, menurut Piaget, inteligensi anak, baru tampak dalam bentuk aktivitas motorik (menghisap, meraih, menggoyang-goyangkan badan, menunjuk sesuatu, dan sebagainya), sebagai reaksi stimulasi sensori. Pada sub-tahap ini anak dapat mengenal objek, jika benda itu dialaminya secara langsung. Bagi anak berumur kurang lebih 8 bulan, objek tidak ada atau tidak ada eksistensinya lagi, begitu benda itu hilang dari penglihatannya. Baru menjelang akhir umur satu tahun, anak dapat memahami bahwa benda itu permanen. Apakah objeknya dilihat atau tidak, benda tetap ada sebagai benda dan memiliki sifat permanen. Hal ini disebut kepermanenan objek (*object permanence*). Setelah dapat memahami kepermanenan objek, anak mulai memakai simbol untuk mewakili objek yang tidak hadir di depan matanya. Simbol ini adalah kata-kata awal yang diucapkan anak. Oleh karena itu, kepermanenan objek adalah kunci untuk menuju kepenguasaan bahasa. Dengan demikian, keterampilan berbahasa muncul sesudah tercapainya perkembangan kognitif dan perkembangan bahasa paralel dengan tahap-tahap perkembangan kognisi.

E. Psikologi Pembelajaran Matematika menurut Jean Piaget

1. Teori Belajar Jean Piaget

Jean Piaget lahir pada 9 Agustus 1896 di Neuchâtel, Swiss. Dia seorang ahli psikologi perkembangan, tetapi psikologi hanya berupa bagian kecil dari pekerjaannya. Ia terkenal karena teori pembelajaran berdasarkan tahap yang berbeda-beda dalam perkembangan intelegensi anak. Ia sebenarnya seorang ahli epistemologi. Beliau memulainya kariernya sebagai penulis pada usia 10 tahun. Selepas tamat sekolah menengah melanjutkan pelajaran ke Universiti Nauchatel. Beliau mendapat Ph.D. semasa berumur 22 tahun. Jean mula meminati Psikologi apabila beliau terpilih menjadi pengarah Psikologi di Universiti Geneva. Tidak lama kemudian, beliau dilantik sebagai ketua "*Swiss Society for Psychologist.*"

Teori belajar Piaget ini merupakan aliran psikologi kognitif menyatakan bahwa anak belajar itu harus disesuaikan dengan tahap perkembangan mentalnya. Artinya bila seorang guru akan memberikan pengajaran harus disesuaikan dengan tahap-tahap perkembangan tersebut. Selama penelitian Piaget semakin yakin akan adanya perbezaan antara proses pemikiran anak dan orang dewasa. Ia yakin bahwa anak bukan merupakan suatu tiruan dari orang dewasa. Anak bukan hanya berpikir

kurang efisien dari orang dewasa, melainkan berpikir secara berbeda dengan orang dewasa. Itulah sebabnya mengapa Piaget yakin bahwa ada tahap perkembangan kognitif yang berbeda dari anak sampai menjadi dewasa. Menurut Piaget dalam (Dahar & Ratna, 2006) seorang anak maju melalui empat tahap perkembangan kognitif, antara lahir dan dewasa.

- 1) Tahap sensorimotor (umur 0–2 tahun) Pada tahap sensorimotor, anak mengenal lingkungan dengan kemampuan sensorik yaitu dengan penglihatan, penciuman, pendengaran, dan perabaan. Karakteristik tahap ini merupakan gerakan-gerakan akibat suatu reaksi langsung dari rangsangan. Anak mengatur alamnya dengan indera (sensori) dan tindakan-tindakannya (motor), anak belum mempunyai kesadaran-kesadaran adanya konsepsi yang tetap. Contohnya di atas ranjang seorang bayi diletakkan mainan yang akan berbunyi bila talinya dipegang. Suatu saat, ia akan main-main dan menarik tali itu. Ia mendengar bunyi yang bagus dan ia senang. Maka ia akan mencoba menarik-narik tali itu agar muncul bunyi menarik yang sama.
- 2) Tahap persiapan operasional (2-7 tahun) operasi adalah suatu proses berpikir logis, dan merupakan

aktifitas mental bukan aktifitas sensorimotor. Pada tahap ini anak belum mampu melaksanakan operasi-operasi mental. Unsur yang menonjol dalam tahap ini adalah mulai digunakannya bahasa simbolis, yang berupa gambaran dan bahasa ucapan. Dengan menggunakan bahasa, inteligensi anak semakin maju dan memacu perkembangan pemikiran anak karena ia sudah dapat menggambarkan sesuatu dengan bentuk yang lain (Dahar & Ratna, 2006). Contohnya anak bermain pasar-pasaran dengan uang dari daun. Kemudian dalam penggunaan bahasa, anak menirukan apa saja yang baru ia dengar. Ia menirukan orang lain tanpa sadar. Hal ini dibuat untuk kesenangannya sendiri. Tampaknya ada unsur latihan disini, yaitu suatu pengulangan untuk semakin memperlancar kemampuan berbicara meskipun tanpa disadari.

- 3) Tahap operasi konkret (7-11 tahun) Tahap operasi konkret dinyatakan dengan perkembangan sistem pemikiran yang didasarkan pada peristiwa-peristiwa yang langsung dialami. Anak masih menerapkan logika berpikir pada barang-barang yang konkret, belum bersifat abstrak maupun hipotesis. Contohnya suatu gelas diisi air. Selanjutnya dimasukkan uang logam sehingga permukaan air naik. Anak pada tahap operasi

konkret dapat mengetahui bahwa volume air tetap sama. Pada tahap sebelumnya, anak masih mengira bahwa volume air setelah dimasukkan logam menjadi bertambah.

- 4) Tahap operasi formal (11 tahun keatas) Tahap operasi formal merupakan tahap akhir dari perkembangan kognitif secara kualitas. Pada tahap ini anak mampu bernalar tanpa harus berhadapan dengan objek atau peristiwanya langsung, dan menarik kesimpulan dari informasi yang tersedia (Dahar & Ratna, 2006).

Kecepatan perkembangan tiap individu melalui urutan tiap tahap ini berbeda dan tidak ada individu yang melompati salah satu dari tahap di atas. Tiap tahap ditandai dengan munculnya kemampuan-kemampuan intelektual baru yang memungkinkan orang memahami dunia dengan cara yang semakin kompleks. Sebagian perkembangannya bergantung pada seberapa jauh anak aktif memanipulasi dan berinteraksi aktif dengan lingkungan. Hal ini mengindikasikan bahwa lingkungan di mana anak belajar sangat menentukan proses perkembangan kognitif anak. Pola perilaku atau berpikir yang digunakan anak-anak dan orang dewasa dalam menangani objek-objek di dunia disebut skemata. Pengamatan mereka terhadap suatu benda mengatakan kepada mereka sesuatu hal tentang

objek tersebut. Adaptasi lingkungan dilakukan melalui proses asimilasi dan akomodasi. Asimilasi merupakan penginterpretasian pengalaman-pengalaman baru dalam hubungannya dengan skema-skema yang telah ada.

Sedangkan akomodasi adalah pemodifikasian skema-skema yang ada untuk mencocokkannya dengan situasi-situasi baru. Proses pemulihan kesetimbangan antara pemahaman saat ini dan pengalaman-pengalaman baru disebut ekuilibrasi. Menurut piaget, pembelajaran bergantung pada proses ini. Saat kesetimbangan terjadi, anak memiliki kesempatan bertumbuh dan berkembang. Guru dapat mengambil keuntungan ekuilibrasi dengan menciptakan situasi yang mengakibatkan ketidakseimbangan, oleh karena itu menimbulkan keingintahuan siswa. Piaget yakin bahwa pengalaman-pengalaman fisik dan manipulasi lingkungan penting bagi terjadinya perubahan perkembangan. Selain itu, ia juga berkeyakinan bahwa interaksi sosial dengan teman sebaya, khususnya berargumentasi, berdiskusi, membantu memperjelas pemikiran, yang pada akhirnya membuat pemikiran itu menjadi lebih logis.

2. Aplikasi dalam Pembelajaran Matematika

Aplikasi Teori Piaget dalam Pembelajaran Matematika Guru dapat menciptakan suatu keadaan atau

lingkungan belajar yang memadai agar siswa dapat menemukan pengalaman-pengalaman nyata dan terlibat langsung dengan alat dan media. Peranan guru sangat penting untuk menciptakan situasi belajar sesuai dengan teori Piaget. Beberapa implikasi teori Piaget dalam pembelajaran:

- 1) Memfokuskan pada proses berpikir anak, tidak sekedar pada produknya. Disamping itu dalam pengecekan kebenaran jawaban siswa, guru harus memahami proses yang digunakan anak sampai pada jawaban tersebut.
- 2) Pengenalan dan pengakuan atas peranan anak-anak yang penting sekali dalam inisiatif diri dan keterlibatan aktif dalam kegiatan pembelajaran.
- 3) Penerimaan perbedaan individu dalam kemajuan perkembangan. Bahwa seluruh anak berkembang melalui urutan perkembangan yang sama namun mereka memperolehnya pada kecepatan yang berbeda.

Oleh karena itu, guru harus melakukan upaya khusus untuk lebih menata kegiatan kelas untuk individu dan kelompok kecil anak-anak daripada kelompok klasikal. Mengutamakan peran siswa dalam berinisiatif sendiri dan keterlibatan aktif dalam kegiatan pembelajaran. Di dalam kelas tidak menyajikan pengetahuan melainkan anak didorong untuk menemukan sendiri pengetahuan itu

melalui interaksi dengan lingkungannya. Oleh karena itu, guru dituntut untuk mempersiapkan beraneka ragam kegiatan yang memungkinkan anak melakukan kegiatan secara langsung. Dari implikasi teori Piaget di atas, jelaslah guru harus mampu menciptakan keadaan siswa yang mampu untuk belajar sendiri. Artinya, guru tidak sepenuhnya mengajarkan suatu bahan ajar kepada siswa, tetapi guru dapat membangun siswa yang mampu belajar dan terlibat aktif dalam belajar (Nasution, 2007).

Penerapan dari empat tahap perkembangan intelektual anak yang dikemukakan oleh Piaget, adalah sebagai berikut:

- 1) Tahap Sensorimotor (0-2 tahun) Untuk mengembangkan kemampuan matematika anak di tahap ini, Anak-anak pada tahap sensorimotor memiliki beberapa pemahaman tentang konsep angka dan menghitung. Misalnya orang tua dapat membantu menghitung dengan jari, mainan dan permen. Sehingga anak dapat menghitung benda yang dia miliki dan mengingat apabila ada benda yang ia punya hilang.
- 2) Tahap persiapan operasional (2-7 tahun) Piaget membagi perkembangan kognitif tahap persiapan operasional dalam dua bagian:

a) Umur 2–4 tahun Pada umur 2 tahun, seorang anak mulai dapat menggunakan simbol atau tanda untuk mempresentasikan suatu benda yang tidak tampak dihadapannya. Penggunaan simbol itu tampak dalam 3 gejala berikut: 1) Imitasi tidak langsung. Anak mulai dapat menggambarkan suatu hal yang sebelumnya dapat dilihat, yang sekarang sudah tidak ada. Dengan kata lain, ia mulai dapat membuat imitasi yang tidak langsung dari bendanya sendiri. Contohnya bola sesungguhnya dalam bentuk bola plastik. 2) Permainan simbolis. Dalam permainan simbolis, seringkali terlihat bahwa seorang anak berbicara sendirian dengan mainannya. Misalnya jika si anak merasa senang dengan bola, maka ia akan bermain bola-bolaan. 3) Gambaran mental. Gambaran mental adalah penggambaran secara pikiran suatu objek atau pengalaman yang lampau. Pada tahap ini, anak masih mempunyai kesalahan yang sistematis dalam menggambarkan kembali gerakan atau transformasi yang ia amati. Contoh deretan 5 kelereng berwarna coklat dan hitam. Dari pengamatan itu anak masih beranggapan bahwa kelereng coklat lebih banyak daripada kelereng hitam karena jarak kelereng coklat lebih besar

daripada kelereng hitam. Apabila jarak kelereng hitam dan coklat disamakan maka anak mengatakan bahwa jumlah kelereng sama.

- b) Umur 4-7 tahun (pemikiran intuitif). Pada umur 4-7 tahun, pemikiran anak semakin berkembang pesat. Tetapi perkembangan belum penuh karena anak masih mengalami operasi yang tidak lengkap dengan suatu bentuk pemikiran atau penalaran yang tidak logis. Contoh terdapat 20 kelereng, 16 berwarna merah dan 4 putih diperlihatkan kepada seorang anak dengan pertanyaan berikut: "Manakah yang lebih banyak kelereng merah atautkah kelereng-kelereng itu?" A usia 5 tahun menjawab: "lebih banyak kelereng merah." B usia 7 tahun menjawab: "Kelereng-kelereng lebih banyak daripada kelereng yang berwarna merah." Tampak bahwa A tidak mengerti pertanyaan yang diajukan, sedangkan B mampu menghimpun kelereng merah dan putih menjadi suatu himpunan kelereng atau dapat disimpulkan bahwa anak masih sulit untuk menggabungkan pemikiran keseluruhan dengan pemikiran bagiannya.
- 3) Tahap operasi konkret (7-11 tahun). Tahap operasi konkret ditandai dengan adanya sistem operasi

berdasarkan apa-apa yang kelihatan nyata/konkret. Anak masih mempunyai kesulitan untuk menyelesaikan persoalan yang mempunyai banyak variabel. Misalnya, bila suatu benda A dikembangkan dengan cara tertentu menjadi benda B, dapat juga dibuat bahwa benda B dengan cara tertentu kembali menjadi benda A. Dalam matematika, diterapkan dalam operasi penjumlahan (+), pengurangan (-), urutan (<), dan persamaan (=). Contohnya, $5 + 3 = 8$ dan $8 - 3 = 5$ Pada umur 8 tahun, anak sudah memahami konsep penjumlahan yang seterusnya berlanjut pada perkalian.

- 4) Tahap operasi formal (11 tahun keatas). Pada tahap ini, anak sudah mampu berpikir abstrak bila dihadapkan kepada suatu masalah. Contohnya seorang anak mengamati topi ayahnya yang berbentuk kerucut. Ia ingin mengetahui volume dari topi ayahnya tersebut. Lalu ia mengukur topi tersebut dan memperoleh tinggi kerucut 3 cm dengan jari-jari 7 cm. Untuk menyelesaikan persoalan tersebut, maka guru sudah terlebih dahulu memberikan konsep kepada siswa mengenai bangun ruang (volum limas). Volum limas = $\frac{1}{3}$ (luas alas) (tinggi limas) = $\frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times t = \frac{1}{3} \times 154 \text{ cm}^2 \times 3 \text{ cm} = 154 \text{ cm}^3$.

F. Psikologi Pembelajaran Matematika menurut Van Hille

1. Teori Pembelajaran Kognitif Menurut Van Hiele

Teori Pembelajaran Kognitif Menurut Van Hiele mengatakan bahwa belajar merupakan salah satu kebutuhan hidup manusia yang paling penting dalam upaya mempertahankan hidup dan mengembangkan diri. Dalam dunia pendidikan belajar merupakan aktivitas pokok dalam penyelenggaraan proses belajar-mengajar. Dimana melalui belajar seseorang dapat memahami sesuatu konsep yang baru atau melalui perubahan tingkah laku, sikap dan keterampilan. Psikologi kognitif menyatakan bahwa perilaku manusia tidak ditentukan oleh stimulus yang berada di luar dirinya, melainkan oleh faktor yang ada pada dirinya sendiri. Faktor-faktor internal ini berupa kemampuan atau potensi yang berfungsi untuk mengenal dunia luar dan dengan pengenalan itu manusia mampu memberikan respons terhadap stimulus. Berdasarkan pandangan tersebut teori belajar psikologi kognitif memandang belajar sebagai proses perfungisian kognisi, terutama unsur pikiran, dengan kata lain bahwa aktivitas belajar pada diri manusia ditentukan pada proses internal dalam pikiran yakni proses pengolahan informasi.

Sesuai dengan kriteria matematika maka belajar matematika lebih cenderung termasuk ke dalam aliran

belajar kognitif yang proses dan hasilnya tidak dapat dilihat langsung dalam konteks perubahan tingkah laku. Sehingga dapat disimpulkan bahwa pada dasarnya belajar adalah suatu proses usaha yang melibatkan aktivitas mental yang terjadi dalam diri manusia sebagai akibat dari proses interaksi aktif dengan lingkungannya untuk memperoleh suatu perubahan dalam bentuk pengetahuan, pemahaman, tingkah laku, keterampilan dan nilai sikap yang bersifat relatif dan berbekas. Salah satu teori dalam aliran Kognitif yaitu dalam pengajaran geometri terdapat teori belajar yang dikemukakan oleh Van Hiele (1954), yang menguraikan tahap-tahap perkembangan mental anak dalam geometri. Van Hiele adalah seorang guru yang berkebangsaan Belanda yang mengadakan penelitian dalam pengajaran geometri. Menurut Van Hiele ada tiga unsur dalam pengajaran matematika yaitu waktu, materi pengajaran, dan metode pengajaran, jika ketiganya ditata secara terpadu maka akan terjadi peningkatan kemampuan berpikir anak kepada tingkatan berpikir lebih tinggi.

2. Tahap Belajar Anak Dalam Belajar Geometri

- 1) Tahapan Pengenalan (visualisasi). Pada tahap ini siswa hanya baru mengenal bangun-bangun geometri seperti bola, kubus, segitiga, persegi, dan bangun-bangun geometri lainnya. Seandainya kita hadapkan pada

bangun-bangun geometri, anak dapat menunjukkan bentuk segitiga. Namun pada tahap pengenalan anak belum dapat bila kita ajukan pertanyaan seperti “apakah ada sebuah persegi panjang, sisi-sisi yang berhadapan panjangnya sama?” maka siswa tidak akan bisa menjawabnya. Guru harus memahami betul karakter anak, jangan sampai mengajarkan sifat-sifat bangun-bangun geometri tersebut, karena anak akan menghafalnya tidak memahaminya.

- 2) Tahap Analisis. Apabila pada tahap pengenalan anak belum mengenal sifat-sifat dari bangun-bangun geometri, tidak demikian pada tahap Analisis. Pada tahap ini anak sudah dapat memahami sifat-sifat dari bangun-bangun geometri. Pada tahap ini anak sudah mengenal sifat-sifat bangun geometri, seperti pada sebuah kubus banyak sisinya ada 6 buah, sedangkan banyak rusuknya ada 12. Seandainya kita tanyakan apakah kubus itu balok?, maka anak pada tahap ini belum bisa menjawab pertanyaan tersebut karena anak pada tahap ini belum memahami hubungan antara balok dan kubus. Anak pada tahap analisis belum mampu mengetahui hubungan yang terkait antara suatu bangun geometri dengan bangun geometri lainnya.

- 3) Tahap Pengurutan pada tahap ini pemahaman siswa terhadap geometri lebih meningkat lagi dari sebelumnya yang hanya mengenal bangun-bangun geometri beserta sifat-sifatnya, maka pada tahap ini anak sudah mampu mengetahui hubungan yang terkait antara suatu bangun geometri dengan bangun geometri lainnya. Anak yang berada pada tahap ini sudah memahami pengurutan bangun-bangun geometri. Misalnya, siswa sudah mengetahui jajargenjang itu trapesium, belah ketupat adalah layang-layang, kubus itu adalah balok. Pada tahap ini anak sudah mulai mampu untuk melakukan penarikan kesimpulan secara deduktif, tetapi masih pada tahap awal artinya belum berkembang baik karena masih pada tahap awal siswa masih belum mampu memberikan alasan yang rinci ketika ditanya mengapa kedua diagonal persegi panjang itu sama, mengapa kedua diagonal pada persegi saling tegak lurus.
- 4) Tahap Deduksi. Pada tahap ini, anak sudah dapat memahami deduksi, yaitu mengambil kesimpulan secara deduktif. Pengambilan kesimpulan secara deduktif yaitu penarikan kesimpulan dari hal-hal yang bersifat khusus. Seperti kita ketahui bahwa matematika adalah ilmu deduktif. Matematika, dikatakan sebagai

ilmu deduktif karena pengambilan kesimpulan, membuktikan teorema dan lain-lain dilakukan dengan cara deduktif. Sebagai contoh untuk menunjukkan bahwa jumlah sudut-sudut dalam jajargenjang adalah 360° secara deduktif dibuktikan dengan menggunakan prinsip kesejajaran. Pembuktian secara induktif yaitu dengan memotong-motong sudut-sudut benda jajargenjang, kemudian setelah itu ditunjukkan semua sudutnya membentuk sudut satu putaran penuh atau 360° belum tuntas dan belum tentu tepat. Seperti diketahui bahwa pengukuran itu pada dasarnya mencari nilai yang paling dekat dengan ukuran yang sebenarnya. Jadi, mungkin saja dapat keliru dalam mengukur sudut-sudut jajargenjang tersebut. Untuk itu pembuktian secara deduktif merupakan cara yang tepat dalam pembuktian pada matematika. Anak pada tahap ini telah mengerti pentingnya peranan unsur-unsur yang tidak didefinisikan, di samping unsur-unsur yang didefinisikan, aksioma, dan teorema. Anak pada tahap ini belum memahami kegunaan dari suatu sistem deduktif. Oleh karena itu, anak pada tahap ini belum dapat menjawab pertanyaan “mengapa sesuatu itu disajikan teorema atau dalil.”

5) Tahap Keakuratan. Tahap terakhir dari perkembangan kognitif anak dalam memahami geometri adalah tahap keakuratan. Pada tahap ini, anak sudah memahami betapa pentingnya ketepatan dari prinsip-prinsip dasar yang melandasi suatu pembuktian. Anak pada tahap ini sudah memahami mengapa sesuatu itu dijadikan postulat atau dalil. Dalam matematika kita tahu bahwa betapa pentingnya suatu sistem deduktif. Tahap keakuratan merupakan tahap tertinggi dalam memahami geometri. Pada tahap ini memerlukan tahap berpikir yang kompleks dan rumit. Oleh karena itu, jarang atau hanya sedikit sekali anak yang sampai pada tahap berpikir ini sekalipun anak tersebut sudah berada di tingkat SMA.

3. Fase-fase dalam Pengajaran Geometri

Fase-fase dalam Pengajaran Geometri untuk meningkatkan suatu tahap berpikir ke tahap berpikir yang lebih tinggi Van Hiele mengajukan pembelajaran yang melibatkan 5 fase (langkah), yaitu; informasi (*information*), orientasi langsung (*directed orientation*), penjelasan (*explication*), orientasi bebas (*free orientation*), dan integrasi (*integration*).

1) Fase 1: Informasi (*information*). Pada awal fase ini, guru dan siswa menggunakan tanya jawab dan kegiatan

tentang objek-objek yang dipelajari pada tahap berpikir yang bersangkutan. Guru mengajukan pertanyaan kepada siswa sambil melakukan observasi. Tujuan kegiatan ini adalah: 1) Guru mempelajari pengetahuan awal yang dipunyai siswa mengenai topik yang di bahas. 2) Guru mempelajari petunjuk yang muncul dalam rangka menentukan pembelajaran selanjutnya yang akan diambil.

- 2) Fase 2: Orientasi langsung (*directed orientation*). Siswa menggali topik yang dipelajari melalui alat-alat yang dengan cermat disiapkan guru. Aktifitas ini akan berangsur-angsur menampakkan kepada siswa struktur yang memberi ciri-ciri untuk tahap berpikir ini. Jadi, alat ataupun bahan dirancang menjadi tugas pendek sehingga dapat mendatangkan respons khusus.
- 3) Fase 3: Penjelasan (*explication*). Berdasarkan pengalaman sebelumnya, siswa menyatakan pandangan yang muncul mengenai struktur yang diobservasi. Di samping itu untuk membantu siswa menggunakan bahasa yang tepat dan akurat, guru memberi bantuan seminimal mungkin. Hal tersebut berlangsung sampai sistem hubungan pada tahap berpikir ini mulai tampak nyata.

- 4) Fase 4: Orientasi bebas (*free orientation*). Siswa menghadapi tugas-tugas yang lebih kompleks berupa tugas yang memerlukan banyak langkah, tugas-tugas yang dilengkapi dengan banyak cara, dan tugas-tugas *open ended*. Mereka memperoleh pengalaman dalam menemukan cara mereka sendiri, maupun dalam menyelesaikan tugas-tugas. Melalui orientasi diantara para siswa dalam bidang investigasi, banyak hubungan antara objek-objek yang dipelajari menjadi jelas.
 - 5) Fase 5: Integrasi (*Integration*). Siswa meninjau kembali dan meringkas apa yang telah dipelajari. Guru dapat membantu dalam membuat sintesis ini dengan melengkapi survey secara global terhadap apa-apa yang telah dipelajari siswa. Hal ini penting tetapi, kesimpulan ini tidak menunjukkan sesuatu yang baru. Pada akhir fase kelima ini siswa mencapai tahap berpikir yang baru. Siswa siap untuk mengulangi fase-fase belajar pada tahap sebelumnya.
4. Teori Pembelajaran Geometri Menurut Van Hiele

Teori Pembelajaran Geometri Menurut Van Hiele. Selain mengemukakan mengenai tahap-tahap perkembangan kognitif dalam memahami geometri, Van Hiele juga mengemukakan beberapa teori berkaitan dengan

pengajaran geometri. Teori yang dikemukakan oleh Van Hiele antara lain adalah sebagai berikut (Ruseffendi, 1990).

- 1) Tiga unsur yang utama pengajaran geometri yaitu, waktu materi pengajaran dan metode penyusun. Apabila dikelola secara terpadu dapat mengakibatkan peningkatan kemampuan berpikir anak kepada tahap yang lebih tinggi dari tahap yang sebelumnya.
- 2) Bila dua orang yang mempunyai tahap berpikir berlainan satu sama lain kemudian saling bertukar pikiran, maka kedua orang tersebut tidak akan mengerti. Sebagai contoh, seorang anak tidak mengerti mengapa gurunya membuktikan bahwa jumlah sudut-sudut dalam sebuah jajargenjang adalah 360° , misalnya anak itu berada pada tahap urutan ke bawah. Menurut anak pada tahap yang disebutkan, pembuktiannya tidak perlu sebab sudah jelas bahwa jumlah sudut sebuah jajargenjang 360° . Contoh yang lain seorang anak yang berada paling tinggi pada tahap kedua atau tahap analisis, tidak mengerti apa yang dijelaskan gurunya bahwa kubus itu adalah balok, belah ketupat itu layang-layang. Gurunya pun sering tidak mengerti mengapa anak yang diberi penjelasan tersebut tidak memahaminya. Menurut Van Hiele, seorang anak yang berada pada tingkat yang lebih rendah tidak akan

mungkin dapat mengerti atau memahami materi yang berada pada tingkat yang lebih tinggi dari anak tersebut. Kalaupun dipaksakan maka anak tidak akan memahaminya tapi nanti bisa dengan melalui hafalan.

- 3) Untuk mendapatkan hasil yang diinginkan yaitu anak memahami geometri dengan pengertian, kegiatan belajar anak harus disesuaikan dengan tingkat perkembangan anak itu sendiri, atau disesuaikan dengan tahap berpikirnya. Dengan demikian anak dapat memperkaya pengalaman dan cara berpikirnya, selain itu sebagai persiapan untuk meningkatkan tahap berpikirnya ke tahap yang lebih dari tahap sebelumnya.

G. Psikologi Pembelajaran Matematika menurut Polya

1. Pengertian Gagasan Polya tentang Belajar Matematika

Pasangan suami istri berdarah Yahudi, Jakob Polya dan Anna Deutsch, menikah dan lahirlah George Polya sebagai anak keempat dari lima bersaudara. Sejak kecil ia diarahkan untuk mempelajari bahasa karena ibunya ingin agar George meneruskan profesi ayahnya sebagai seorang pengacara dengan kuliah di bidang hukum. George lulus sekolah dasar pada tahun 1894, sebelum melanjutkan di Daniel Berzsenyi Gymnasium guna belajar bahasa Yunani klasik dan bahasa Latin selain bahasa Jerman modern

maupun bahasa asli Hongaria. Minat George adalah biologi dan studi kepustakaan, namun menonjol dalam bidang geografi dan subyek-subyek lain. Matematika bukan bidang yang disukai George. Disinyalir bahwa cara mengajar pendidik yang salah membuat peserta didik tidak dapat berprestasi.

Di Universitas Budapest, Polya belajar fisika di bawah Eotvos dan matematika dibimbing oleh Fejer. Fejer pada saat itu adalah salah seorang matematikawan terkemuka Hongaria. Bersama Fejer, Polya membuat karya-karya kolaborasi, dimana pengaruh Fejer sangat terasa pada karya-karya Polya. Tahun 1910 - 1911, Polya kuliah di Universitas Vienna, dengan uang yang diperoleh lewat mengajar anak-anak orang kaya sebagai dosen pribadi. Di sini, kembali Polya mendapatkan matematika dari tangan Wirtinger dan Mertens meskipun menambah pengetahuan fisika dengan kuliah teori relativitas, optik dan topik-topik lainnya.

Tahun berikutnya, Polya kembali ke Budapest dan dianugerahi dengan gelar doktoral di bidang matematika, terutama, dengan belajar sendiri, teori probabilitas geometri. Tahun 1912 dan 1913 kembali menekuni matematika di Gottingen lewat kumpulan matematikawan terkemuka di dunia seperti: Hilbert, Weyl, Edmund Landau,

Runge, Courant, Hecke dan Toeplitz. Polya bertemu dengan Szego di Budapest pada kisaran tahun 1913, ketika baru pulang menuntut ilmu di mancanegara. Szego pada saat itu masih mahasiswa di Budapest dan bersama dengannya Polya mendiskusikan praduga (*conjecture*) karyanya tentang koefisien-koefisien Fourier. Szego tertarik untuk membuktikan praduga Polya yang dijadikan karya publikasi perdananya.

Beberapa tahun kemudian, ketika Polya memutuskan untuk menulis buku tentang *problem-problem* dalam analisis, maka dia meminta bantuan Szego dan hampir selama dua tahun mereka bekerja bersama. Hasilnya buku karya Polya dan Szego tentang *problem-problem* dalam analisis sangat berbeda. Polya menjelaskan bahwa bukan *problem* yang menjadi subyek, tapi metode dalam solusi lebih menjadi penekanan. Mereka bersama-sama menemui penerbit pada tahun 1923 dan karya mereka diterbitkan dalam dua jilid.

Tahun 1920, Polya diangkat menjadi profoseor luar biasa di ETZ disusul memperoleh beasiswa dari Rockefeller (*Rockefeller Dellowship*) pada tahun 1924, yang memungkinkan dirinya belajar bersama Hardy di Inggris. Mulai tahun itu, Polya terkadang berada di Oxford atau Cambridge, bekerja bersama Hardy dan Littlewood. Buku

karya trio matematikawan ini terbit pada tahun 1934 dengan judul *Inequalities*. Sambil mengerjakan buku itu, Polya juga membuat 31 makalah pada kurun waktu 1926-1928. Jangkauan topik, kedalaman dan banyaknya publikasi yang dilakukannya membuat diangkat menjadi Ordinary profesor di ETH pada tahun 1928.

Polya layak disebut matematikawan paling berpengaruh pada abad 20. Riset mendasar yang dilakukan pada bidang analisis kompleks, fisika matematikal, teori probabilitas, geometri, dan kombinatorik banyak memberi sumbangsih bagi perkembangan matematika. Sebagai seorang pendidik yang piawai, minat mengajar dan antusiasme tinggi tidak pernah hilang sampai akhir hayatnya.

Semasa di Zurich-pun, karya-karya di bidang matematika sangat beragam dan produktif. Tahun 1918, mengarang makalah tentang deret, teori bilangan, sistem *voting* dan kombinatorik. Tahun berikutnya, menambah dengan topik, seperti astronomi dan probabilitas. Meskipun pikiran sepenuhnya ditumpahkan untuk topik-topik di atas, namun Polya mampu membuat hasil mengesankan pada fungsi-fungsi integral. Tahun 1933, Polya kembali mendapatkan Rockefeller Fellowship dan kali ini dia pergi ke Princeton.

Saat di Amerika, Polya diundang oleh Blichfeldt untuk mengunjungi Stanford yang menarik minatnya. Kembali ke Zurich pada tahun 1940, namun situasi di Eropa menjelang PD II, memaksa Polya kembali ke Amerika. Bekerja di Universitas Brown dan Smith College selama 2 tahun, sebelum menerima undangan dari Stanford yang diterimanya dengan senang hati. Sebelum meninggalkan Eropa, Polya sempat mengarang buku "*How to solve it*" yang ditulis dalam bahasa Jerman. Setelah mencoba menawarkan keberbagai penerbit akhirnya dialih bahasakan ke dalam bahasa Inggris sebelum diterbitkan oleh Princeton. Buku ini ternyata menjadi buku *best seller* yang terjual lebih dari 1 juta *copy* dan kelak dialih bahasakan ke dalam 17 bahasa. Buku ini berisikan metode-metode sistematis guna menemukan solusi atas *problem-problem* yang dihadapi dan memungkinkan seseorang menemukan pemecahannya sendiri karena memang sudah ada dan dapat dicari.

Di dalam buku "*How to solve it*". Disebutkan ada beberapa tahapan untuk menyelesaikan *problem*, yaitu: a) Memahami masalah-masalah apa yang dihadapi? Bagaimana kondisi dan datanya? Bagaimana memilah kondisi-kondisi tersebut? b) Menyusun rencana, menemukan hubungan antara data dengan hal-hal yang belum diketahui. c) Melaksanakan rencana menjalankan

rencana guna menemukan solusi, periksa setiap langkah dengan seksama untuk membuktikan bahwa cara itu benar.

d) Melihat kembali melakukan penilaian terhadap solusi yang didapat. Keempat tahapan ini lebih dikenal dengan *See* (memahami *problem*), *Plan* (menyusun rencana), *Do* (melaksanakan rencana) dan *Looking Back* (melihat kembali). Sudah menjadi pekerjaan sehari-hari dalam penyelesaian *problem* sehingga Polya layak disebut dengan “Bapak *problem solving*.” “Apabila Anda tidak dapat menyelesaikan *problem*, maka ada *problem* termudah yang tidak dapat Anda selesaikan: menemukannya. (*If you can't solve a problem, then there is an easier problem you can't solve: find it*)” George Polya (Mulyana, 2014).

2. Penerapan Teori Polya dalam Pembelajaran Matematika

Penerapan Teori Polya dalam pembelajaran matematika: Seorang guru mengajukan masalah dengan meminta siswa untuk menjumlahkan 100 bilangan asli yang pertama. Jika siswa tersebut menjumlahkan angka 1,2,3...100 maka akan menyita waktu yang cukup lama untuk menemukan jawabannya, akan tetapi dengan menggunakan langkah-langkah pemecahan masalah maka waktu yang digunakan cukup cepat.

- 1) Memahami masalah: bilangan 1, 2, 3, 100 akan dijumlahkan dengan demikian masalah yang muncul adalah $1 + 2 + 3 + \dots + 100$?
- 2) Merencanakan penyelesaian: salah satu strategi yang diterapkan adalah mencari kemungkinan adanya satu pola. Untuk menyelesaikan masalah ini bila dilakukan pola seperti:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = x \text{ (Persamaan 1)}$$

$$100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 = x \text{ (Persamaan 2)}$$

- 3) Menyelesaikan masalah: Jika ke-2 persamaan dijumlahkan maka kita menemukan suatu pola yaitu terdapat 100 pasang bilangan yang berjumlah 101

$$101 + 101 + 101 + \dots + 101 = 2x$$

Karena banyaknya bilangan asli adalah 100, maka:

$$101 \times 100 = 2x$$

$$x = 10100/2 = 5050$$

- 4) Memeriksa Kembali: metode yang digunakan secara matematika sudah benar. Sebab penjumlahan dapat dilakukan dalam urutan yang berbeda dan perkalian adalah penjumlahan yang berulang.

Jika masalah umum muncul, tentukanlah jumlah n bilangan asli yang pertama: Dengan n bilangan asli, maka cara seperti sebelumnya dapat digunakan:

$$1 + 2 + \dots + n-1 + n = x$$

$$n + n - 1 + \dots + 2 + 1 = x$$

Pasangan bilangan yang masing-masing berjumlah sebanyak $n + 1$ sebanyak n maka dengan demikian jumlah keseluruhan didapat:

$$(n + 1) \times n = 2x$$

$$x = n/2 (n + 1)$$

H. Kepercayaan Diri (*Self-Efficacy*) dalam Pembelajaran Matematika

1. Pentingnya *Self-efficacy* bagi Peserta Didik

Self-efficacy (SE) merupakan salah satu faktor penting yang berpengaruh pada pencapaian akademik peserta didik. Seringkali peserta didik tidak mampu menunjukkan prestasi akademiknya secara optimal sesuai dengan kemampuan yang dimilikinya. Salah satu penyebabnya adalah karena mereka sering merasa tidak yakin bahwa dirinya akan mampu menyelesaikan tugas-tugas yang diberikan kepadanya. Keyakinan akan kemampuan akan membuat peserta didik semangat dalam menyelesaikan tugas-tugas mereka, dan ada perasaan mampu pada dirinya. Bagi peserta didik, keyakinan seperti ini sangat diperlukan.

Keyakinan yang didasari oleh batas-batas kemampuan yang dirasakan akan menuntun peserta didik berperilaku secara mantap dan efektif. Spears dan Jordan menyatakan bahwa peserta didik di sekolah dapat diantisipasi keberhasilannya jika peserta didik merasa mampu untuk berhasil dan arti keberhasilan itu dianggap penting. Istilah keyakinan ini yang disebut dengan istilah *self efficacy*. *Self-efficacy* (SE) merupakan aspek kepribadian yang berperan penting dalam keterampilan akademis peserta didik, dengan dikembangkannya aspek kepribadian ini, peserta didik akan mampu mengenal dirinya sendiri yakni manusia yang berkepribadian yang mantap dan mandiri, manusia utuh yang memiliki kemantapan emosional dan intelektual, yang mengenal dirinya, mengendalikan dirinya dengan konsisten, dan memiliki rasa empati serta memiliki kepekaan terhadap permasalahan yang dihadapi baik dalam dirinya maupun dengan orang lain.

SE memungkinkan peserta didik berlatih mengukur pengendalian atas pikiran, perasaan, dan tindakan mereka. Bandura memperlihatkan bahwa individu membuat dan mengembangkan persepsi diri atas kemampuan yang menjadi instrumen pada tujuan yang mereka kejar dan mereka mengontrol atas pikiran, perasaan, dan tindakan

mereka, bahwa “apa yang dipikirkan, dipercaya, dan dirasakan orang mempengaruhi bagaimana mereka bertindak” (Bandura, 1986).

Ada beberapa alasan kenapa SE itu sangat penting untuk dimiliki oleh peserta didik dalam mempelajari matematika (Bandura, 1997) yaitu:

- a) Mengorganisasikan dan melaksanakan tindakan untuk pencapaian hasil;
- b) Meningkatkan kompetensi seseorang untuk sukses dalam tugas-tugasnya;
- c) Individu cenderung berkonsentrasi dalam tugas-tugas yang mereka rasakan mampu dan percaya dapat menyelesaikannya serta menghindari tugas-tugas yang tidak dapat mereka kerjakan;
- d) Memandang tugas-tugas yang sulit sebagai tantangan untuk dikuasai daripada sebagai ancaman untuk dihindari;
- e) Merupakan faktor kunci sumber tindakan manusia (*human agency*), “apa yang orang pikirkan, percaya, dan rasakan mempengaruhi bagaimana mereka bertindak”;
- f) Mempengaruhi cara atas pilihan tindakan seseorang, seberapa banyak upaya yang mereka lakukan, seberapa lama mereka akan tekun dalam menghadapi rintangan dan kegagalan, seberapa kuat ketahanan mereka

menghadapi kemalangan, seberapa jernih pikiran mereka merupakan rintangan diri atau bantuan diri, seberapa banyak tekanan dan kegundahan pengalaman mereka dalam meniru (*copying*) tuntunan lingkungan, dan seberapa tinggi tingkat pemenuhan yang mereka wujudkan;

- g) Memiliki minat yang lebih kuat dan keasyikan yang mendalam pada kegiatan, menyusun tujuan yang menantang mereka, dan memelihara komitmen yang kuat serta mempertinggi dan mendukung usaha-usaha mereka dalam menghadapi kegagalan.

2. Definisi *Self-efficacy* (SE) Matematis

Definisi *Self-efficacy* (SE) pada prakteknya sinonim dengan “keyakinan diri”, meskipun “keyakinan diri” adalah suatu istilah yang non-deskriptif (Bandura, 1997), istilah keyakinan diri merujuk pada kekuatan keyakinan, misalnya seseorang dapat sangat percaya diri, tetapi akhirnya gagal. Pajares (2002) mendefinisikan SE sebagai keyakinan manusia dan kemampuan mereka untuk melatih sejumlah ukuran pengendalian terhadap fungsi diri mereka dan kejadian-kejadian di lingkungannya. Manusia yang percaya dapat melakukan sesuatu, memiliki potensi untuk merubah kejadian-kejadian di lingkungannya. Bandura (1997) mendefinisikan *self-efficacy* sebagai penilaian seseorang

terhadap kemampuannya untuk mengorganisasikan dan melaksanakan sejumlah tingkah laku yang sesuai dengan unjuk kerja (*performance*) yang dirancangnya. Dengan kata lain, *self-efficacy* adalah suatu pendapat atau keyakinan yang dimiliki oleh seseorang mengenai kemampuannya dalam menampilkan suatu bentuk perilaku dan hal ini berhubungan dengan situasi yang dihadapi oleh seseorang tersebut.

Menurut Pajares (2002) *self-efficacy matematis* didefinisikan sebagai suatu penilaian situasional dari suatu keyakinan individu dalam kemampuannya untuk berhasil membentuk atau menyelesaikan tugas-tugas atau masalah-masalah matematis tertentu. Lebih lanjut Firmansyah juga mengemukakan bahwa tidak ada perbedaan yang mendasar antara definisi bidang matematis dengan bidang lainnya, bedanya hanya pada tingkat kesulitan materi matematika. Sebagian besar peserta didik masih menganggap matematika itu mata pelajaran yang sulit, karena matematika bersifat abstrak. Pendidik hendaklah menilai situasional dari keyakinan peserta didik dalam kemampuannya menyelesaikan tugas-tugas matematis secara valid.

Bila dikaitkan dengan *self-efficacy* belajar matematika sangat memiliki peranan penting dalam

berbagai aspek kehidupan. Banyak permasalahan dan kegiatan dalam hidup kita yang harus diselesaikan dengan menggunakan ilmu matematika seperti menghitung, mengukur, dan lain-lain. Sehubungan dengan hal tersebut Ruseffendi (2007) menyatakan matematika berkenaan dengan ide-ide (gagasan-gagasan), struktur-struktur dan hubungan-hubungan yang diatur secara logic, sehingga matematika itu berkaitan dengan konsep-konsep abstrak. Suatu kebenaran matematika dikembangkan berdasarkan atas alasan logik yang menggunakan pembuktian deduktif. Matematika adalah ilmu universal yang mendasari perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi modern, memajukan daya pikir serta analisa manusia.

3. Pengaruh *Self-Efficacy* dalam Pembelajaran

Dalam bukunya "*Self-Efficacy: The Exercise of Control*" Bandura (1997) menjelaskan bahwa SE seseorang akan mempengaruhi tindakan, upaya, ketekunan, fleksibilitas dalam perbedaan, dan realisasi dari tujuan, dari individu ini, sehingga SE yang terkait dengan kemampuan seseorang seringkali menentukan *outcome* sebelum tindakan terjadi. Menurut Bandura, *self-efficacy* yang merupakan konstruksi sentral dalam teori kognitif sosial, yang dimiliki seseorang, akan:

- a) Mempengaruhi pengambilan keputusannya, dan mempengaruhi tindakan yang akan dilakukannya. Seseorang cenderung akan menjalankan sesuatu apabila ia merasa kompeten dan percaya diri, dan akan menghindarinya apabila tidak.
- b) Membantu seberapa jauh upaya ia bertindak dalam suatu aktivitas, berapa lama ia bertahan apabila mendapat masalah, dan seberapa fleksibel dalam suatu situasi yang kurang menguntungkan baginya. Makin besar *self-efficacy* seseorang, makin besar upaya, ketekunan, dan fleksibilitasnya.
- c) Mempengaruhi pola pikir dan reaksi emosionalnya. Seseorang dengan *self-efficacy* yang rendah mudah menyerah dalam menghadapi masalah, cenderung menjadi stres, depresi, dan mempunyai suatu visi yang sempit tentang apa yang terbaik untuk menyelesaikan masalah itu. Sedangkan *self-efficacy* yang tinggi, akan membantu seseorang dalam menciptakan suatu perasaan tenang dalam menghadapi masalah atau aktivitas yang sukar.

Dari pengaruh-pengaruh ini, *self-efficacy* berperan dalam tingkatan pencapaian yang akan diperoleh, sehingga Bandura (Pajares, 2002) berpendapat bahwa *self-efficacy* menyentuh hampir semua aspek kehidupan manusia,

apakah berpikir secara produktif, secara pesimis atau optimis, bagaimana mereka memotivasi dirinya, kerawanan akan stres dan depresi, dan keputusan yang dipilih. *Self-efficacy* juga merupakan faktor yang kritis dari kemandirian belajar. Didasarkan pengaruh-pengaruh ini, *self-efficacy* berperan dalam tingkatan pencapaian yang akan diperoleh.

Albert Bandura (1997) dalam tulisannya yang berjudul *Social Foundation of Thought and Action* menguraikan bahwa kemampuan seseorang tidak hanya ditentukan oleh keterampilan yang dimilikinya. Bila seorang peserta didik memiliki prestasi tinggi di bidang akademik, kemampuan mereka tidak serta merta akan lebih tinggi dibanding peserta didik lain yang kecakapan di bidang akademiknya sedikit di bawah mereka. Ada hal lain yang diberlakukan agar kompetensi yang dimiliki benar-benar berfungsi efektif yaitu rasa keberhasilan (*Self-efficacy*), harapan atas keyakinan meraih sukses. Penelitian Bundara (1997) menyebutkan rasa keberhasilan (*self-efficacy*) berkaitan dengan kesuksesan akademik.

4. Menumbuhkembangkan *self-efficacy Matematis*

Menumbuhkembangkan *self-efficacy Matematis* bukanlah sesuatu yang dibawa sejak lahir atau sesuatu dengan kualitas tetap dari seorang individu, tetapi merupakan hasil dari proses kognitif, artinya SE seseorang

dapat dikembangkan. Karena proses kognitif banyak terjadi pada saat pembelajaran berlangsung, maka perkembangan SE seseorang dapat dipacu melalui kegiatan pembelajaran.

Peran guru dalam menumbuhkembangkan SE matematis peserta didik di antaranya dengan mengacu pada sumber-sumber SE seseorang menurut Bandura pada bahasan sebelumnya SE dapat bersumber dari *verbal persuasion*. Implikasinya adalah bahwa seorang guru perlu hati-hati dalam memberikan komentar kepada peserta didiknya, jangan sampai ia memberikan komentar yang dapat menurunkan *self efficacy* peserta didiknya. SE juga bersumber dari *emotional arousal*, sehingga implikasinya seorang guru matematika harus dapat menciptakan suasana yang nyaman sehingga emosi peserta didik jadi terkontrol dan ia dapat mengikuti pembelajaran dengan tenang. Suasana nyaman, emosi yang terkontrol akan meningkatkan konsentrasi dalam belajar, dan akan berakibat pada penguasaan konsep yang akhirnya diperkirakan akan menumbuhkan *self-efficacy* yang tinggi.

Guru dapat memodelkan tindakan-tindakan yang dapat meningkatkan *self-efficacy matematis* peserta didiknya, menurut Pajares (2002) ada dua cara yang dapat dilakukan oleh guru tersebut, (1) guru harus selalu mengajak siswa untuk melakukan kegiatan-kegiatan yang

sulit dengan mencontohkan kegiatan itu sedemikian rupa sehingga siswa dapat belajar untuk memperkirakan kemampuan apa yang diperlukan untuk melaksanakan kegiatan tersebut. Misalnya, dalam menyelesaikan soal cerita, guru sebaiknya tidak menggunakan jalan pintas sehingga peserta didik merasa bahwa soal tersebut lebih mudah daripada kenyataannya, (2) guru sebaiknya mendemonstrasikan teknik-teknik yang sangat efektif dalam mengatasi aspek-aspek dari kegiatan tersebut yang mungkin menakutkan bagi peserta didik sehingga peserta didik dapat belajar mengendalikan ketakutan mereka dalam situasi-situasi sejenis dan dapat mengatasi cara takut tersebut dengan cara baik. Misalnya, jika ada cara bagi peserta didik untuk mengecek hasil kerjanya saat mereka berusaha menyelesaikan soal matematika yang sulit, maka sebaiknya guru menunjukkan cara pengecekan tersebut. Pendidik sebaiknya membantu para peserta didiknya merasa nyaman dengan dirinya sendiri yaitu dengan memberi kesempatan untuk belajar tentang kelebihan-kelebihannya dan membantu untuk menumbuhkan keyakinan bahwa ia dapat mengandalkan kelebihan tersebut saat menghadapi kesulitan belajar, termasuk dalam belajar matematika.

I. Kemampuan Meregulasi Diri (*Self-Regulated Learning*) dalam Pembelajaran Matematika

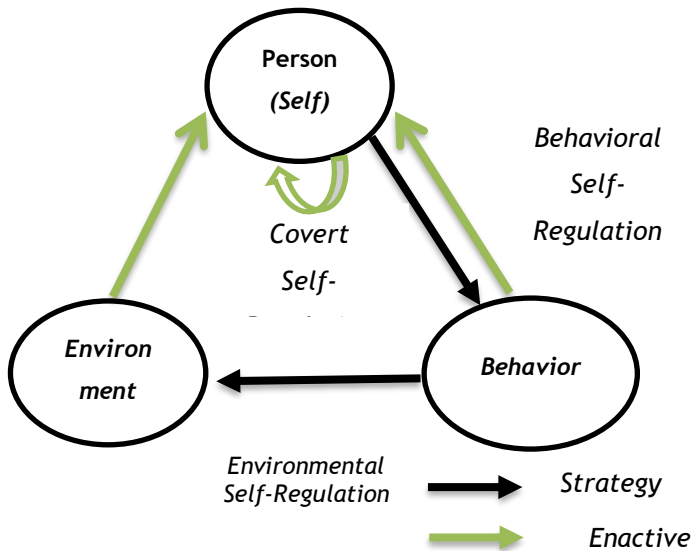
1. Definisi *Self-Regulated Learning*

Istilah *self-regulated learning* berkembang dari teori kognisi sosial Bandura (1997). Menurut teori kognisi sosial, manusia merupakan hasil struktur kausal yang interdependen dari aspek pribadi (*person*), perilaku (*behavior*), dan lingkungan (*environment*). Ketiga aspek ini merupakan aspek-aspek determinan dalam *self-regulated learning*. Bandura (1986) menjelaskan bahwa ketiga aspek determinan ini saling berhubungan sebab-akibat, dimana person berusaha untuk meregulasi diri sendiri (*self-regulated*), hasilnya berupa kinerja atau perilaku, dan perilaku ini berdampak pada perubahan lingkungan). *Self-regulated learning* didefinisikan oleh Zimmerman & Martiansz-Pons (2001) sebagai tingkatan dimana partisipan secara aktif melibatkan metakognisi, motivasi, dan perilaku dalam proses belajar. *Self-regulated learning* juga didefinisikan sebagai bentuk belajar individual dengan bergantung pada motivasi belajar mereka, secara otonomi mengembangkan pengukuran (kognisi, metakognisi, dan perilaku), dan memonitor kemajuan belajarnya (Duane & Schultz, 2013).

Self-regulated learning merupakan perpaduan dari kemampuan dan keinginan. Strategi peserta didik adalah merencanakan, mengontrol, dan mengevaluasi kognitifnya, motivasi, perilaku, dan proses kontekstualnya. Peserta didik mengetahui bagaimana merencanakan dengan memotivasi diri, ia mengetahui kemungkinan dan keterbatasannya, dan sebagaimana fungsi pengetahuan ini, mengontrol, dan proses meregulasi belajar untuk menyatukan atau menggabungkan tugas objektif dan konteks mereka untuk mengoptimalkan performen dan meningkatkan keahlian melalui latihan (Zimmerman, 1990). Zimmerman mendefinisikan *self-regulated learning* sebagai derajat metakognisi, motivasi, dan perilaku individu di dalam proses belajar yang dijalani untuk mencapai tujuan belajar. Sehingga dapat disimpulkan bahwa definisi *self-regulated learning* adalah proses aktif dan konstruktif siswa dalam menetapkan tujuan untuk proses belajarnya dengan melibatkan metakognisi, motivasi, dan perilaku dalam proses belajar dan berusaha untuk memonitor, meregulasi, dan mengontrol kognisi, motivasi, dan perilaku, yang kemudian semuanya diarahkan dan didorong oleh tujuan dan mengutamakan konteks lingkungan.

2. Faktor-faktor yang Mempengaruhi *Self-regulated learning*

Self-regulated learning ditentukan oleh tiga wilayah yakni wilayah person, wilayah perilaku, dan wilayah lingkungan, seperti gambar berikut (Zimmerman, 1989):



Gambar 1.2. Analisis Triadik *Self-regulated Functioning*

a. Faktor dalam diri (*Person*)

Self-regulated learning pada peserta didik salah satunya dipengaruhi oleh proses dalam diri yang saling berhubungan. Proses personal diantaranya yaitu pengetahuan yang dimiliki siswa, proses pengambilan

keputusan metakognitif, tujuan, kondisi akademis, dan kondisi afektif.

- Pengetahuan yang dimiliki peserta didik ada dua jenis yaitu:

- 1) Pengetahuan deklaratif

Pengetahuan yang berupa pernyataan. Informasi yang diterima berupa pengetahuan yang didapat sesuai dengan lingkungan tanpa melalui proses pemikiran lebih lanjut.

- 2) Pengetahuan tentang bagaimana mengarahkan diri

Pengetahuan *self-regulated learning* siswa diasumsikan ada dua, yakni pengetahuan procedural dan pengetahuan bersyarat karena suatu kondisi tergantung oleh strategi yang digunakan siswa. Pengetahuan prosedural mengarah pada pengetahuan bagaimana menggunakan strategi, sedangkan pengetahuan bersyarat merujuk pada pengetahuan kapan dan mengapa strategi tersebut berjalan efektif. Pengetahuan *self-regulated learning* tidak hanya tergantung pada pengetahuan peserta didik, melainkan juga proses metakognitif pada pengambilan keputusan dan performa yang dihasilkan.

- Proses pengambilan keputusan metakognitif

Proses ini melibatkan perencanaan atau analisis tugas yang berfungsi mengarahkan usaha pengontrolan belajar dan mempengaruhi timbal balik dari usaha tersebut. Pengambilan keputusan metakognitif tergantung juga pada tujuan jangka panjang siswa untuk belajar. Tujuan dan pemakaian proses kontrol metakognitif dipengaruhi oleh persepsi terhadap efikasi diri dan afeksi.

- Tujuan akademis

Tujuan akademis menjadi alasan adanya variasi dalam penggunaan strategi *self-regulated learning* diantara peserta didik yang berprestasi tinggi dan rendah. Setiap peserta didik memiliki kemampuan dan alasan yang berbeda-beda.

- Kondisi afektif

Afeksi merupakan bentuk emosi yang dimiliki peserta didik. Bentuk emosi peserta didik yang dimiliki siswa dapat bersifat menghambat atau memperlancar pencapaian prestasi akademis.

- b. Faktor perilaku (*Behavior*)

Tiga cara peserta didik dalam merespon hubungan untuk menganalisis perilaku yang mempengaruhi *self-*

regulated learning: observasi diri, penilaian diri, dan reaksi diri.

1) Observasi diri

Observasi diri adalah respon peserta didik yang melibatkan pemantauan sistematis terhadap hasil yang dicapainya. Peserta didik telah sanggup memonitor performanya meskipun belum lengkap. Peserta didik memilih dengan selektif sejumlah aspek perilaku dan mengabaikan aspek lainnya. Mengobservasi diri sendiri dapat memberikan informasi mengenai tingkat kemajuan seseorang.

2) Penilaian diri

Penilaian diri adalah respon peserta didik yang melibatkan perbandingan sistematis antara hasil yang sudah dicapai dengan suatu hasil standar. Proses penilaian diri bergantung pada empat hal: standar pribadi, nilai aktivitas, performa-performa acuan, dan penyempurnaan performa.

3) Reaksi diri

Reaksi diri adalah respons peserta didik terhadap hasil yang dicapainya. Individu merespons positif atau negatif perilaku tergantung bagaimana perilaku diukur dan apa standar pribadinya. Ketiganya memiliki hubungan yang sifatnya

resiprositas atau timbal balik seiring dengan konteks persoalan yang dihadapi. Hubungan timbal balik tidak selalu bersifat simetris melainkan lentur dalam arti salah satunya di konteks tertentu dapat menjadi lebih dominan dari aspek lainnya, demikian pula pada aspek tertentu menjadi kurang dominan.

c. Faktor lingkungan (*environment*)

Dua jenis pengaruh lingkungan yang mempengaruhi *self-regulated learning*, yaitu pengalaman sosial dan struktur lingkungan sosial.

1) Pengalaman sosial

Salah satu pengalaman sosial yang mempengaruhi *self-regulated learning* adalah belajar melalui pengamatan secara langsung terhadap perilaku diri sendiri dan hasil yang diperoleh dari perilaku.

2) Struktur lingkungan

Lingkungan diilustrasikan sebagai tindakan peserta didik sebagai tindakan proaktif seperti: meminimalisir gangguan berupa polusi udara, mengatur cahaya, mengatur ruangan belajar.

Ketiga faktor tersebut sangat mempengaruhi *self-regulated learning* dan saling berhubungan, yakni faktor pribadi yang kembali pada peserta didik sendiri, kemudian

faktor perilaku peserta didik tersebut, dan yang terakhir faktor lingkungan.

3. Peran *self-regulated learning*

Self-regulated learning memiliki peran yang penting dalam dunia pendidikan, khususnya dalam menunjang keberhasilan studi peserta didik. *Self-regulated learning* menjadi faktor penting dalam pendidikan karena berkaitan dengan prestasi belajar peserta didik. Dalam bidang pendidikan *self-regulated learning* telah memberikan pengaruh yang sangat signifikan khususnya untuk siswa SMP dan SMU (Frederick, Blumenfeld, & Paris, 2004).

Zimmerman (2002) telah mengkaji bagaimana pengaruh *self-regulated learning* terhadap emosi-emosi akademik yang akhirnya dapat berpengaruh terhadap meningkatnya prestasi akademik. *Self-regulated learning* merupakan kombinasi keterampilan belajar akademik dan pengendalian diri yang membuat pembelajaran terasa lebih mudah, sehingga para peserta didik lebih termotivasi. Mereka memiliki keterampilan (*skill*) dan kemauan (*will*) untuk belajar. Peserta didik yang belajar dengan regulasi diri mentransformasikan kemampuan-kemampuan mentalnya menjadi keterampilan-keterampilan dan strategi akademik (Zimmerman, 2002). Dengan *self-regulated learning* para peserta didik menjadi lebih

mandiri, menjadi mahir dalam meregulasi belajarnya sendiri, dan dapat meningkatkan hasil belajar mereka.

4. Strategi *self-regulated learning*

Ada lima belas strategi dalam *self-regulated learning* yang digunakan siswa seperti yang dikemukakan oleh Zimmerman (1989):

- 1) Evaluasi diri (*self-evaluating*), yaitu pernyataan yang mengindikasikan penilaian kualitas tugas yang telah diselesaikan, pemahaman terhadap lingkup kerja, atau usaha dalam kaitan dengan tuntutan tugas.
- 2) Mengatur dan mengubah (*organizing and transforming*), yaitu pernyataan yang mengindikasikan keinginan peserta didik baik secara terus terang atau diam-diam dalam mengatur ulang materi petunjuk untuk mengembangkan proses belajar.
- 3) Menetapkan tujuan dan perencanaan (*goal setting and planning*), yaitu pernyataan yang mengindikasikan rencana peserta didik untuk mencapai tujuan pendidikan atau sub tujuan dan rencana untuk mengurutkan prioritas, menentukan waktu, dan menyelesaikan rencana semua aktivitas yang terkait dengan tujuan tersebut.
- 4) Mencari informasi (*seeking information*), yaitu pernyataan yang mengindikasikan upaya untuk

mencari informasi yang berkaitan dengan tugas dari sumber-sumber lain saat mengerjakan tugas.

- 5) Menyimpan catatan dan memantau (*keeping records and monitoring*), yaitu pernyataan yang mengindikasikan upaya peserta didik untuk mencatat hal-hal yang penting dalam pelajaran atau diskusi.
- 6) Mengatur lingkungan (*environmental structuring*), yaitu pernyataan yang mengindikasikan upaya peserta didik untuk mengatur lingkungan belajar agar membuat belajar lebih nyaman, dengan mengatur lingkungan fisik maupun psikologis.
- 7) Konsekuensi diri (*self-consequating*), yaitu pernyataan yang mengindikasikan upaya peserta didik dalam mempersiapkan dan melaksanakan ganjaran atau hukuman untuk kesuksesan dan kegagalan.
- 8) Mengulang dan mengingat (*rehearsing and memorizing*), yaitu pernyataan yang mengindikasikan upaya peserta didik untuk mengingat-ingat materi bidang studi dengan diam atau suara keras.
- 9) Mencari dukungan sosial (*seeking social assistance*)
- 10) Mencari dukungan guru (*seeking social teachers*)
- 11) Mencari dukungan teman-teman sebaya (*seeking social adults*), strategi 9-11 yaitu pernyataan yang mengindikasikan upaya peserta didik untuk mencari

bantuan dari rekan-rekan sebaya, guru, dan orang dewasa.

- 12) Memeriksa catatan buku (*reviewing records notes*)
- 13) Memeriksa catatan ulangan (*reviewing records tests*)
- 14) Memeriksa catatan buku teks (*reviewing records textbooks*), strategi 12 dan 13 yaitu pernyataan yang mengindikasikan upaya peserta didik untuk membaca catatan, ulangan atau buku teks.
- 15) Lain-lain (*others*), yaitu pernyataan yang mengindikasikan tingkah laku belajar yang dicontohkan oleh orang lain seperti guru dan orang tua; pernyataan keinginan yang kuat atau mengekspresikan secara lisan atau secara tulisan hal-hal yang belum jelas.

J. Daya Juang (*Adversity Quotient*) dalam Pembelajaran Matematika

1. Pengertian *Adversity Quotient* (AQ)

Adversity Quotient (AQ) dikembangkan pertama kali oleh Paul G. Stoltz seorang konsultan yang sangat terkenal dalam topik-topik kepemimpinan di dunia kerja dan dunia pendidikan berbasis keterampilan. Ia menganggap bahwa IQ dan EQ tidaklah cukup dalam meramalkan kesuksesan seseorang karena ada faktor lain

berupa motivasi dan dorongan dari dalam, serta sikap pantang menyerah. Faktor itu disebut *Adversity Quotient* (AQ).

Berdasarkan kamus Bahasa Inggris, (Echols & Shadily, 1996) *adversity* berasal dari kata *adverse* yang artinya ialah kondisi tidak menyenangkan, kemalangan. Sehingga *adversity* dapat diartikan sebagai kesulitan, masalah atau ketidakberuntungan. Sedangkan *quotient* adalah derajat atau jumlah dari kualitas spesifik/indikator, atau dengan kata lain alat untuk mengukur kemampuan seseorang.

Secara ringkas Stoltz (2014) mendefinisikan *Adversity Quotient* (AQ) sebagai kecerdasan yang dimiliki seseorang dalam menghadapi kesulitan, hambatan dan mampu untuk mengatasinya. *Adversity Quotient* (AQ) merupakan sikap menginternalisasi keyakinan. *Adversity Quotient* (AQ) juga merupakan kemampuan individu untuk menggerakkan tujuan hidup kedepan, dan juga sebagai pengukuran tentang bagaimana seseorang berespon terhadap kesulitan.

Senada dengan pendapat di atas, Nurhayati (2012) mendefinisikan *Adversity Quotient* (AQ) merupakan kemampuan seseorang dalam menghadapi masalah yang dianggapnya sulit namun ia akan tetap bertahan dan

berusaha untuk menyelesaikan dengan sebaik-sebaiknya supaya menjadi individu yang memiliki kualitas baik. Hal ini, dapat terbentuk apabila didalam diri individu terdapat dimensi-dimensi yang menyertainya seperti memiliki keyakinan dan kepercayaan diri dalam melakukan tugas semudah atau sesulit apapun, bertanggung jawab dan fokus dalam menyelesaikan tugas yang diberikan serta memiliki jiwa kreatif dalam penyelesaian tugas tersebut, supaya tidak monoton dan membosankan.

Adversity Quotient (AQ) dapat dikatakan sebagai daya juang ketangguhan dalam bertahan dan mengatasi cobaan. *Adversity Quotient* (AQ) berada dalam diri setiap individu dan setiap individu dalam menghadapi dan mengatasi kesulitan hidup berbeda-beda. Tingkat kemampuan tersebut yang dimiliki akan berdampak pada kesanggupan menjalani hidup dan mampu memberikan manfaat besar bagi kesuksesan.

Dari uraian pendapat di atas maka dapat disimpulkan bahwa *Adversity Quotient* (AQ) adalah kecerdasan individu dalam berpikir, mengontrol, mengelola, dan mengambil tindakan dalam menghadapi kesulitan, hambatan atau tantangan hidup, serta mengubah kesulitan maupun hambatan tersebut menjadi peluang untuk meraih kesuksesan.

2. Dimensi *Adversity Quotient* (AQ)

Stoltz (2004) menyatakan bahwa *Adversity Quotient* (AQ) terdiri atas empat dimensi yang disebut CO₂RE. CO₂RE adalah akronim dari C = *Control*, O₂ = *Origin* dan *Ownership*, R = *Reach*, E = *Endurance*.

a. *Control* (kendali)

Control atau kendali adalah kemampuan seseorang dalam mengendalikan dan mengelola sebuah peristiwa yang menimbulkan kesulitan di masa mendatang. *Control* mempertanyakan berapa banyak kendali yang Anda rasakan terhadap sebuah peristiwa yang menimbulkan kesulitan? Kata kuncinya disini adalah merasakan. Kendali yang sebenarnya dalam situasi hampir tidak mungkin diukur. Kendali yang dirasakan jauh lebih penting. Kendali diri ini akan berdampak pada tindakan selanjutnya atau respon yang dilakukan individu bersangkutan, tentang harapan dan idealitas individu untuk tetap berusaha keras mewujudkan keinginannya walau sesulit apapun keadaannya sekarang.

Semakin tinggi skor pada dimensi *control*, semakin besar kemungkinannya seseorang memiliki tingkat kendali yang kuat atas masalah yang dihadapi. Sebaliknya semakin rendah skor pada dimensi *control* semakin besar kemungkinannya seseorang merasa bahwa masalah yang

dihadapi diluar kendali. Stoltz (2004) memberikan beberapa kecenderungan mereka yang skornya rendah pada dimensi *control*, misalnya: ini diluar jangkauan saya, dan tidak ada yang saya bisa dilakukan. Lebih lanjut Stoltz memberikan beberapa contoh ungkapan-ungkapan bagi AQ tinggi, misalnya: wow ini sulit, tetapi saya pernah menghadapi yang lebih sulit dari itu, pasti ada yang saya bisa lakukan, selalu ada jalan, siapa berani akan menang dan saya harus mencari cara lain.

b. *Origin* (asal-usul) dan *ownership* (pengakuan)

Origin dan *ownership* mempertanyakan dua hal yaitu siapa atau apa yang menjadi asal usul kesulitan? Dan Sampai sejauhmanakah saya mengakui akibat-akibat kesulitan itu? Di permukaan, kedua pertanyaan tentang asal usul dan pengakuan ini tampaknya mirip. Namun, kalau dicermati lagi, akan ditemukan bahwa ada perbedaan besar sekali diantara keduanya. Mari kita mulai dengan asal usul atau *origin* yang ada kaitannya dengan rasa bersalah. Orang yang AQ-nya rendah cenderung menempatkan rasa bersalah yang tidak semestinya atas peristiwa-peristiwa buruk yang terjadi. Dalam banyak hal, mereka melihat dirinya sendiri sebagai satu-satunya penyebab atau asal usul (*origin*) kesulitan tersebut. Rasa bersalah yang tepat akan menggugah seseorang untuk bertindak sedangkan

rasa bersalah yang terlampau besar akan menciptakan kelumpuhan. Semakin tinggi skor O₂, semakin besar kemungkinannya seorang memandang bahwa kesuksesan itu selalu ada dan penyebab utama suatu kesulitan berasal dari luar. Sebaliknya semakin rendah skor O₂ semakin besar kemungkinannya seseorang menganggap bahwa penyebab kesulitan itu adalah dirinya sendiri. Jika mereka sempat meraih kesuksesan, mereka menganggap bahwa kesuksesan itu hanya keberuntungan saja yang diakibatkan oleh orang atau faktor dari luar. Menurut Stoltz (2004) mereka yang skor asal usulnya (*origin*) rendah cenderung berpikir: (a) ini semua kesalahan saya; (b) saya memang bodoh sekali; (c) seharusnya saya lebih tahu; (d) apa yang saya pikirkan tadi, ya?, (e) saya malah jadi tidak mengerti, (f) saya sudah mengacaukan semuanya, dan (g) saya memang orang gagal.

Lebih lanjut Stoltz (2004) mengemukakan bahwa orang yang memiliki respons asal usul lebih tinggi akan berpikir sebagai berikut: (a) waktunya tidak tepat; (b) seluruh industri sedang menderita; (c) sekarang ini setiap orang mengalami masa-masa yang sulit, dia hanya sedang tidak gembira hatinya; (d) beberapa anggota tim tidak memberikan kontribusinya; (e) tak seorangpun yang dapat meramalkan datangnya yang satu ini; (f) ada sejumlah

faktor yang berperan, (g) seluruh anggota tim mengecewakan harapan-harapan kami, (h) setelah mempertimbangkan segala sesuatunya saya tahu ada acara untuk menyelesaikan pekerjaan saya dengan lebih baik dan saya akan menerapkannya bila lain waktu saya berada dalam situasi seperti ini lagi.

c. *Reach* (jangkauan)

Dimensi *reach* mempertanyakan sejauh manakah kesulitan akan menjangkau bagian-bagian lain dari kehidupan saya? Maksudnya bahwa, sejauh mana kesulitan ini akan merambah kehidupan seseorang menunjukkan bagaimana suatu masalah mengganggu aktivitas lainnya, sekalipun tidak berhubungan dengan masalah yang sedang dihadapi. Respons-respons dengan AQ rendah akan membuat kesulitan merembes ke segi-segi lain dari kehidupan seseorang.

Misalnya, rapat yang tidak berjalan lancar dapat mengacaukan seluruh kegiatan pada hari itu; sebuah konflik dapat merusak hubungan yang sudah terjalin, suatu penilaian kinerja yang negatif akan menghambat karier, yang kemudian menimbulkan kepanikan secara finansial, sulit tidur, kepahitan, menjaga jarak dengan orang lain, dan pengambilan keputusan yang buruk.

Semakin rendah skor komponen *reach* semakin besar kemungkinannya seseorang menganggap peristiwa-peristiwa buruk dialami sebagai bencana, dan membiarkannya meluas. Menganggap suatu kesulitan sebagai bencana yang akan menyebar dengan cepat sekali, bisa sangat berbahaya karena akan menimbulkan kerusakan bila dibiarkan tak terkendali. Sebaliknya semakin tinggi skor komponen R seseorang, semakin besar kemungkinannya seseorang membatasi jangkauan masalahnya pada peristiwa yang sedang dihadapi.

d. *Endurance* (daya tahan)

Endurance adalah dimensi terakhir pada AQ seseorang. *Endurance* adalah aspek ketahanan individu. Sejauh mana kecepatan dan ketepatan seseorang dalam memecahkan masalah. Dimensi ini mempertanyakan dua hal yang berkaitan yakni berapa lamakah kesulitan akan berlangsung? Dan berapa lamakah penyebab kesulitan itu akan berlangsung?

Hal ini berkaitan dengan pandangan individu terhadap kepermanenan dan ketemporeran kesulitan yang berlangsung. Efek dari aspek ini adalah pada harapan tentang baik atau buruknya keadaan masa depan. Makin tinggi daya tahan seseorang, makin mampu menghadapi berbagai kesukaran yang dihadapinya.

Semakin rendah skor E seseorang, semakin besar kemungkinan seseorang itu menganggap kesulitan dan penyebabnya akan berlangsung lama, kalau bukan selamanya. Semakin tinggi skor E seseorang semakin besar kemungkinannya seseorang akan memandang kesuksesan sebagai suatu yang berlangsung lama, atau bahkan permanen.

Suzanne Oullette (Stoltz, 2004) dalam penelitiannya memperlihatkan bahwa orang yang merespons kesulitan dengan sifat tahan banting, pengendalian, tantangan dan komitmen, mereka akan tetap ulet dalam menghadapi kesulitan. Sedangkan orang yang tidak merespons kesulitan dengan pengendalian, tantangan dan komitmen cenderung akan menjadi lemah akibat situasi yang sulit.

3. Tipe Manusia dalam Konsep *Adversity Quotient* (AQ)

Stoltz, meminjam istilah para pendaki gunung untuk memberikan gambaran mengenai tingkatan *Adversity Quotient* (AQ). Stoltz (2000) membagi para pendaki menjadi 3 bagian, yaitu :

a. Tipe *Quitter* (orang-orang yang berhenti)

Tipe orang ini adalah tipe orang yang menghindari dari kewajibannya, mundur, berhenti. Atau dengan kata lain, berusaha menjauh dari permasalahan. *Quitter*

mengabaikan, menutupi atau meninggalkan dorongan inti dengan manusiawi untuk berusaha.

Ciri-ciri anak tipe *quitter* misalnya : usahanya sangat minim atau dengan kata lain mempunyai kemampuan yang kecil atau bahkan tidak mempunyai sama sekali kemampuan dalam menghadapi kesulitan, begitu melihat kesulitan ia akan memilih mundur dan tidak berani menghadapi permasalahan. Mereka mencari pelarian untuk menenangkan hati dan pikiran, melarikan diri dari (pendakian) usaha untuk maju, yang berarti juga mengabaikan potensi yang mereka miliki dalam kehidupan ini.

Dalam pembelajaran matematika, peserta didik *quitter* adalah mereka yang beranggapan bahwa matematika itu rumit, membingungkan dan bikin pusing saja. Motivasi mereka sangat kurang sehingga ketika menemukan sedikit kesulitan dalam menyelesaikan soal matematika mereka menyerah dan berhenti tanpa dibarengi usaha sedikitpun.

Peserta didik *quitter* merupakan peserta didik yang tidak menyukai tantangan dan selalu berusaha untuk menjauh dari permasalahan, begitu menghadapi kesulitan ia akan mundur dan tidak berani menghadapinya.

b. Tipe *Campers* (mereka yang berkemah)

Kelompok individu yang kedua adalah *campers* atau orang-orang yang mudah puas dengan hasil yang diperolehnya. Kelompok ini sudah pernah mencoba, berjuang menghadapi berbagai masalah yang ada dalam suatu pergumulan atau bidang tertentu, namun karena adanya tantangan dan masalah yang terus menerjang, mereka memilih untuk menyerah juga (Rahmawati, 2015).

Mereka tidak ingin melanjutkan usahanya untuk mendapatkan lebih dari yang didapatkan sekarang. Di sini mereka mengakhiri usahanya karena sudah merasa puas dengan hasil yang didapat. Berbeda dengan *quitters*, *campers* sekurang-kurangnya menanggapi tantangan itu, mereka telah mencapai tingkat tertentu. Perjalanan mereka mungkin memang mudah atau mungkin mereka telah mengorbankan banyak hal dan telah bekerja dengan rajin untuk sampai ke tingkat dimana mereka kemudian berhenti. Usaha yang tidak selesai oleh sebagian orang dianggap sebagai kesuksesan. Ini merupakan pandangan keliru yang sudah lazim bagi mereka yang menganggap kesuksesan sebagai tujuan yang harus dicapai. Jika dibandingkan dengan proses usahanya. Namun demikian, meskipun *campers* telah berhasil mencapai tujuan atau

posisinya, tetap mereka tidak mungkin dapat mempertahankan posisinya itu tanpa ada usaha lagi.

Dalam pembelajaran matematika, peserta didik *campers* tidak berusaha semaksimal mungkin, mereka berusaha sekedarnya saja. Mereka berpandangan bahwa tidak perlu nilai tinggi dalam ulangan matematika yang penting lulus dan tidak remedial, tidak perlu peringkat satu yang penting naik kelas.

Peserta didik *campers* dalam penelitian ini adalah peserta didik yang tidak mau mengambil resiko yang terlalu besar dan merasa puas dengan kondisi atau keadaan yang telah dicapainya.

c. Tipe *Climbers* (para pendaki)

Tipe *climbers* adalah anak yang mempunyai tujuan atau target. *Climbers* adalah pemikir yang selalu memikirkan kemungkinan-kemungkinan dan tidak pernah membiarkan umur, jenis kelamin, ras, cacat fisik atau mental atau hambatan lainnya untuk menghalangi usahanya. Untuk mencapai tujuan itu, ia mampu mengusahakan dengan ulet dan gigih. Tak hanya itu, ia juga memiliki keberanian dan disiplin yang tinggi. Ibarat pendaki gunung, ia akan terus mencoba sampai yakin berada di puncak gunung. Dalam konteks ini, para *climbers* dianggap memiliki AQ tinggi.

Dalam pembelajaran matematika, peserta didik *climbers* adalah mereka senang matematika. Tugas-tugas yang diberikan guru diselesaikannya dengan baik dan tepat waktu. Jika mereka menemukan masalah matematika yang sulit dikerjakan, maka mereka berusaha semaksimal mungkin untuk menyelesaikannya. Mereka tidak mengenal kata menyerah dan mencoba berbagai cara atau metode untuk menyelesaikan soal matematika yang diberikan oleh Guru. Dan apabila mereka sudah menemukan jawaban penyelesaian masalah matematika tersebut, maka mereka memeriksa kembali jawaban mereka apakah sudah benar atau salah. Mereka juga memiliki keberanian dan disiplin tinggi.

Peserta didik *climbers* dalam penelitian ini adalah peserta didik yang menyambut baik tantangan serta memiliki kemauan untuk menerima hal baru dengan menyelesaikan masalah tanpa patah semangat.

Menurut Stoltz (2000), jika pengelompokan ini lebih diperhalus maka terdapat kelompok diantara kelompok *quitters* dengan *campers* dan antara kelompok *campers* dengan *climbers*. Kelompok yang berada diantara kelompok *quitters* dengan kelompok *campers* disebut kategori peralihan dari *quitters* menuju *campers*. Kelompok yang

berada diantara *camper* dengan kelompok *climbers* disebut kategori peralihan dari *campers* menuju *climbers*.

4. Faktor Pembentuk *Adversity Quotient* (AQ)

Faktor-faktor pembentuk *adversity quotient* menurut Stoltz (2000) adalah sebagai berikut :

a. Daya saing

Adversity quotient yang rendah dikarenakan tidak adanya daya saing ketika menghadapi kesulitan, sehingga kehilangan kemampuan untuk menciptakan peluang dalam kesulitan yang dihadapi.

b. Produktivitas

Penelitian yang dilakukan di sejumlah perusahaan menunjukkan bahwa terdapat korelasi positif antara kinerja karyawan dengan respon yang diberikan terhadap kesulitan. Artinya respon konstruktif yang diberikan seseorang terhadap kesulitan akan membantu meningkatkan kinerja lebih baik, dan sebaliknya respon yang destruktif mempunyai kinerja yang rendah.

c. Motivasi

Penelitian yang dilakukan oleh Stoltz (2000) menunjukkan bahwa seseorang yang mempunyai motivasi yang kuat mampu menciptakan peluang dalam kesulitan, artinya seseorang dengan motivasi

yang kuat akan berupaya menyelesaikan kesulitan dengan menggunakan segenap kemampuan.

d. Mengambil resiko

Penelitian yang dilakukan oleh Satterfield dan Seligman (Stoltz, 2000) menunjukkan bahwa seseorang yang mempunyai *adversity quotient* tinggi lebih berani mengambil resiko dari tindakan yang dilakukan. Hal itu dikarenakan seseorang dengan *adversity quotient* tinggi merespon kesulitan secara lebih konstruktif.

e. Perbaikan

Seseorang dengan *adversity quotient* yang tinggi senantiasa berupaya mengatasi kesulitan dengan langkah konkret, yaitu dengan melakukan perbaikan dalam berbagai aspek agar kesulitan tersebut tidak menjangkau bidang-bidang yang lain.

f. Ketekunan

Seligman menemukan bahwa seseorang yang merespon kesulitan dengan baik akan senantiasa bertahan.

g. Belajar

Menurut Carol Dweck (Stoltz, 2000) membuktikan bahwa anak-anak yang merespon secara optimis akan banyak belajar dan lebih berprestasi

dibandingkan dengan anak-anak yang memiliki pola pesimistis.

5. Mengembangkan Adversity Quotient (AQ)

Cara mengembangkan dan menerapkan AQ dapat diringkas dalam kata LEAD yaitu:

- a. L adalah *Listened* (dengar) respon Anda dan temukan sesuatu yang salah.
- b. E adalah *Explored* (gali) asal dan peran Anda dalam persoalan ini.
- c. A adalah *Analized* (analisalah) fakta-fakta dan temukan beberapa faktor yang mendukung Anda.
- d. D adalah *Do* (lakukan) sesuatu tindakan nyata.

K. Kesulitan Belajar Matematika

1. Definisi Kesulitan Belajar Matematika

Definisi kesulitan belajar pertama kali dikemukakan oleh *The United States Office of Education* (USOE) pada tahun 1977 yang dikenal dengan *Public law* (PL) 94-142, yang hampir identik dengan definisi yang dikemukakan oleh *The National Advisory Committee on Handicapped Children* pada tahun 1967. Definisi tersebut seperti dikutip oleh Hallahan, Kauffman, & Lloyd (1985) seperti berikut ini: kesulitan belajar khusus adalah suatu gangguan dalam satu atau lebih dari proses psikologis dasar yang mencakup

pemahaman dan penggunaan bahasa ujaran atau tulisan. Gangguan tersebut mungkin menampakkan diri dalam bentuk kesulitan mendengarkan, berpikir, berbicara, membaca, menulis, mengeja, atau berhitung. Batasan tersebut mencakup kondisi-kondisi seperti gangguan perseptual, luka pada otak, disleksia, dan afasia perkembangan.

Selain definisi tersebut, menurut Abdurrahman & Mulyono (2003) kesulitan belajar peserta didik mencakup pengertian yang luas di antaranya:

a) *Learning Disorder*

Learning Disorder atau kekacauan belajar adalah keadaan dimana proses belajar seseorang terganggu karena timbulnya respons yang bertentangan. Contoh: peserta didik yang sudah terbiasa dengan olahraga keras seperti karate, tinju dan sejenisnya, mungkin akan mengalami kesulitan dalam menari yang menuntut gerakan lemah-gemulai.

b) *Learning Disfunction*

Learning Disfunction merupakan gejala dimana proses belajar yang dilakukan peserta didik tidak berfungsi dengan baik, meskipun sebenarnya peserta didik tersebut tidak menunjukkan adanya subnormalitas mental dan gangguan psikologis lainnya.

Contoh: peserta didik yang memiliki postur tubuh yang tinggi atletis dia sangat cocok menjadi atlet bola volley, namun karena tidak pernah di latih bermain bola volley, maka dia tidak dapat menguasai permainan volley dengan baik.

c) *Under Achiever*

Under Achiever mengacu kepada peserta didik yang sesungguhnya memiliki tingkat potensi intelektual yang tergolong di atas normal, tetapi prestasi belajarnya tergolong rendah. Contoh: peserta didik yang telah dites kecerdasannya dan menunjukkan tingkat kecerdasan tergolong sangat unggul (IQ = 130-140), namun prestasi belajarnya biasa-biasa saja atau malah sangat rendah.

d) *Slow Learner*

Slow Learner atau lambat belajar adalah peserta didik yang lambat dalam proses belajar, sehingga ia membutuhkan waktu yang lebih lama dibandingkan sekelompok peserta didik lain yang memiliki taraf potensi intelektual yang sama.

e) *Learning Disabilitas*

Learning Disabilitas atau ketidakmampuan belajar mengacu pada gejala dimana peserta didik tidak

mampu belajar atau menghindari belajar, sehingga hasil belajar di bawah potensi intelektualnya.

Menurut Johnson dan Mykleburt (1967) matematika adalah bahasa simbolis yang fungsi praktisnya untuk mengekspresikan hubungan-hubungan kuantitatif dan keruangan sedangkan fungsi teoretisnya adalah untuk memudahkan berpikir (Abdurrahman & Mulyono, 2003). Jadi, dapat disimpulkan bahwa pengertian kesulitan belajar matematika adalah hambatan atau gangguan belajar pada anak yang di tandai oleh ketidakmampuan anak untuk mengekspresikan hubungan-hubungan kuantitatif dan keruangan.

2. Karakteristik Anak Berkesulitan Belajar Matematika

Menurut Hallahan, Kauffman, & Lloyd (1985) ada beberapa karakteristik anak berkesulitan belajar matematika, diantaranya:

a) Gangguan Hubungan Keruangan

Konsep hubungan keruangan seperti atas-bawah, puncak-dasar, jauh-dekat, tinggi-rendah, depan-belakang, dan awal-akhir umumnya telah dikuasai oleh anak pada saat mereka belum masuk SD. Anak-anak memperoleh pemahaman tentang berbagai konsep hubungan keruangan tersebut dari pengalaman mereka dalam berkomunikasi dengan lingkungan

sosial mereka atau melalui berbagai permainan. Untuk mempelajari matematika, anak tidak cukup hanya menguasai konsep hubungan keruangan, tetapi juga berbagai konsep dasar yang lain. Ada empat macam konsep dasar yang harus dikuasai oleh anak pada saat masuk SD. Keempat konsep dasar tersebut adalah konsep keruangan, konsep waktu, konsep kuantitas, dan konsep serbaneka (*miscellaneous*).

b) Abnormalitas Persepsi Visual

Anak berkesulitan belajar matematika sering mengalami kesulitan untuk melihat berbagai objek dalam hubungannya dengan kelompok atau set. Kesulitan semacam ini merupakan salah satu gejala adanya abnormalitas persepsi visual. Anak yang mengalami abnormalitas persepsi visual akan mengalami kesulitan bila mereka diminta untuk menjumlahkan dua kelompok benda yang masing-masing terdiri dari lima dan empat anggota. Anak seperti ini mungkin akan menghitung satu persatu anggota tiap kelompok lebih dahulu sebelum menjumlahkannya.

c) Asosiasi Visual-Motor

Anak berkesulitan belajar matematika sering tidak dapat menghitung benda-benda secara berurutan

sambil menyebutkan bilangannya “Satu, dua, tiga, empat, lima”. Anak mungkin baru memegang benda yang ketiga tetapi telah mengucapkan “lima”, atau sebaliknya. Anak-anak seperti ini dapat memberikan kesan mereka hanya menghafal bilangan tanpa memahami maknanya.

d) Perseverasi

Ada anak yang perhatiannya melekat pada suatu objek saja dalam jangka waktu yang relatif lama. Gangguan ini disebut persevasi. Anak ini mungkin pada mulanya dapat mengerjakan tugas dengan baik, tapi lama-kelamaan perhatiannya melekat pada suatu objek tertentu.

e) Kesulitan Mengenal dan Memahami simbol

Anak berkesulitan belajar matematika sering mengalami kesulitan dalam mengenal dan menggunakan simbol-simbol matematika seperti $+$, $-$, $=$, $>$, dan sebagainya. Kesulitan semacam ini dapat disebabkan oleh adanya gangguan memori dan juga dapat disebabkan oleh adanya gangguan persepsi visual.

f) Gangguan Penghayatan Tubuh

Anak berkesulitan belajar matematika sering memperlihatkan adanya gangguan penghayatan tubuh

(*body image*). Anak demikian merasa sulit untuk memahami hubungan bagian-bagian dari tubuhnya sendiri. Jika anak diminta untuk menggambar tubuh orang misalnya, mereka akan menggambarkan dengan bagian-bagian tubuh yang tidak lengkap atau menempatkan bagian tubuh pada posisi yang salah.

g) Kesulitan dalam Bahasa dan Membaca

Matematika itu sendiri pada hakikatnya adalah simbolis (Hallahan, Kauffman, & Lloyd, 1985). Oleh karena itu, kesulitan dalam bahasa dapat berpengaruh terhadap kemampuan anak di bidang matematika. Soal matematika yang berbentuk cerita menuntut kemampuan membaca untuk memecahkannya, sehingga anak yang mengalami kesulitan membaca akan mengalami kesulitan pula dalam memecahkan soal matematika yang berbentuk cerita tertulis.

h) Skor PIQ jauh lebih rendah daripada Skor VIQ

Hasil tes intelegensi dengan menggunakan WISC (*Wechsler Intelligence for Children*) menunjukkan bahwa anak berkesulitan belajar matematika memiliki skor PIQ (*performance Intelligence Quotient*) yang lebih rendah daripada skor VIQ (*Verbal Intelligence Quotient*). Rendahnya skor PIQ pada anak berkesulitan belajar matematika tampaknya terkait dengan

kesulitan memahami konsep keruangan, gangguan persepsi visual, dan adanya gangguan asosiasi visual-motor (Abdurrahman & Mulyono, 2003).

3. Fenomena Kesulitan Belajar Matematika di Kelas dan Solusi Pembelajarannya

Fenomena kesulitan belajar seorang peserta didik biasanya tampak jelas dari menurunnya kinerja akademik atau prestasi belajar. Namun kesulitan belajar juga dapat dibuktikan dengan munculnya kelainan perilaku (*misbehavior*) peserta didik seperti kesukaan berteriak-teriak di dalam kelas, mengusik teman, berkelahi, dan sering bolos dari jam pelajaran matematika.

Adapun solusi atau tahap-tahap pemecahan masalah dalam kesulitan belajar matematika menurut para ahli antara lain:

- a) Krulik dan Rudnik (1995) mengemukakan lima tahap pemecahan masalah, yaitu:
 - 1) *Read and think*: tahap ini meliputi identifikasi fakta, identifikasi pertanyaan, visualisasi situasi serta menulis ulang tindakan.
 - 2) *Explore and plan*: tahap eksplorasi dan perencanaan pemecahan masalah, mencakup pengaturan informasi yang relevan dan yang

kurang relevan, membuat model serta membuat grafik, tabel atau gambar.

- 3) *Select a strategy*: memilih strategi yang diperkirakan dapat digunakan, misalnya menemukan pola, bekerja mundur, tebak dan uji serta simulasi atau percobaan.
 - 4) *Find an answer*: tahap ini meliputi estimasi solusi, penggunaan kemampuan komputasi, serta penggunaan keahlian aljabar dan geometri.
 - 5) *Reflect and extend*: solusi yang telah diperoleh dari tahap sebelumnya diperiksa kembali kebenarannya, kemudian menentukan solusi alternatif dan membuat perluasan atau generalisasi.
- b) Polya (1985), mengemukakan bahwa pemecahan masalah memuat empat langkah, yaitu:
- 1) Memahami Masalah

Tanpa adanya pemahaman terhadap masalah yang diberikan, siswa tidak mungkin mampu menyelesaikan masalah tersebut dengan benar. Pajares (2002) menambahkan bahwa tahap ini meliputi beberapa komponen, yaitu: 1) Identifikasi apa yang diketahui dari masalah tersebut 2)

Identifikasi apa yang hendak dicari 3) Mengabaikan hal-hal yang tidak relevan dengan permasalahan.

2) Merencanakan Penyelesaian Masalah

Kemampuan ini sangat tergantung pada pengalaman peserta didik dalam menyelesaikan masalah. Semakin bervariasi pengalaman peserta didik, ada kemungkinan peserta didik akan semakin kreatif dalam menyusun rencana penyelesaian masalah. Dalam merencanakan pemecahan masalah, terdapat beberapa hal yang dapat dilakukan peserta didik, antara lain: 1) Membuat tabel, grafik atau diagram 2) Menyederhanakan permasalahan dengan membagi menjadi bagian-bagian 3) Menggunakan rumus 4) Menyelesaikan masalah yang ekuivalen 5) Menggunakan informasi yang diketahui untuk mengembangkan informasi baru (Hudoyo, 2002).

3) Menyelesaikan Masalah Sesuai Rencana

Jika rencana penyelesaian masalah telah dibuat, baik secara tertulis maupun tidak, selanjutnya dilakukan penyelesaian masalah sesuai dengan rencana yang dianggap paling tepat.

4) Melakukan Pengecekan Kembali

Dengan langkah terakhir ini maka berbagai kesalahan yang tidak perlu dapat terkoreksi kembali sehingga peserta didik dapat sampai pada jawaban yang benar sesuai dengan masalah yang diberikan.

Dalam proses pemecahkan masalah, peserta didik berlatih memperbaiki serta mengembangkan strategi yang mereka gunakan untuk memecahkan masalah yang berbeda, non rutin, terbuka dan situasi yang berbeda. Untuk itu, peserta didik diberi kebebasan untuk melakukan dugaan dan pembuktian sendiri berdasarkan konsep-konsep matematika yang telah dimilikinya. Peserta didik hendaknya memiliki keterampilan untuk memilih sendiri strategi apa yang tepat untuk menyelesaikan masalah yang dihadapinya tersebut serta menggunakan strategi tersebut pada beragam masalah dengan konteks yang berbeda.

Di dalam kegiatan belajar mengajar peranan motivasi baik intrinsik maupun ekstrinsik sangat diperlukan. Dengan motivasi, peserta didik dapat mengembangkan aktivitas dan inisiatif, dapat mengarahkan dan memelihara ketekunan dalam melakukan kegiatan belajar. Dalam kaitan itu perlu diketahui bahwa cara dan jenis menumbuhkan motivasi adalah bermacam-macam. Tetapi untuk motivasi ekstrinsik kadang-kadang tepat dan

kadang-kadang juga bisa tidak kurang sesuai. Hal ini guru harus hati-hati dalam menumbuhkan dan memberi motivasi bagi kegiatan belajar para anak didik. Sebab mungkin maksudnya memberikan motivasi tetapi justru tidak menguntungkan perkembangan belajar peserta didik.

Ada beberapa bentuk dan cara untuk menumbuhkan motivasi dalam kegiatan belajar di sekolah.

1) Memberi Angka

Angka dalam hal ini sebagai simbol dari nilai kegiatan belajarnya. Banyak peserta didik belajar, yang utama justru untuk mencapai angka/nilai yang baik. Sehingga peserta didik biasanya yang dikejar adalah nilai ulangan atau nilai-nilai pada raport angkanya baik-baik. Angka-angka yang baik itu bagi para peserta didik merupakan motivasi yang sangat kuat. Tetapi ada juga, banyak peserta didik bekerja atau belajar hanya ingin mengejar pokoknya naik kelas saja. Ini menunjukkan motivasi yang dimilikinya kurang berbobot bila dibandingkan dengan peserta didik yang menginginkan angka baik. Namun demikian semua itu harus diingat oleh guru bahwa pencapaian angka-angka seperti itu belum merupakan hasil belajar yang sejati, hasil belajar yang bermakna. Oleh karena itu, langkah selanjutnya yang ditempuh oleh guru adalah bagaimana cara

memberikan angka-angka dapat dikaitkan dengan *values* yang terkandung di dalam setiap pengetahuan yang diajarkan kepada para peserta didik sehingga tidak sekedar kognitif saja tetapi juga keterampilan dan afeksinya.

2) Memberi Hadiah

Guru dapat memberikan hadiah untuk mendorong kegiatan belajar peserta didik sebelum menempuh ujian sekolah. Hadiah dapat berupa barang seperti peralatan pendukung belajar. Hadiah dapat pula berupa pujian sanjungan saja. Kepada peserta didik dapat diberikan janji jika nilai mereka tinggi akan diberi hadiah. Dengan janji yang menyenangkan tersebut peserta didik menjadi terpacu untuk rajin belajar.

3) Melakukan Kompetisi

Kompetisi dapat digunakan sebagai alat motivasi untuk mendorong belajar peserta didik. Ajang kompetisi prestasi menjadi lebih menyemangati peserta didik dengan diberikan hadiah bagi pemenang. Pengaruh ajang ini sangat baik, selain memotivasi peserta didik untuk lebih berprestasi juga akan meningkatkan kerja sama antar peserta didik dalam belajar karena terdorong ingin mengharumkan nama baik kelompok masing-masing.

4) *Ego-involvement*

Menumbuhkan kesadaran kepada peserta didik agar merasakan pentingnya tugas dan menerimanya sebagai tantangan sehingga bekerja keras dengan mempertaruhkan harga diri, adalah sebagai salah satu bentuk motivasi yang cukup tinggi. Seseorang akan berusaha dengan segenap tenaga untuk mencapai prestasi yang baik dengan menjaga harga dirinya. Penyelesaian tugas dengan baik adalah simbol kebanggaan dan harga diri, begitu juga untuk peserta didik si subjek belajar.

5) Memberi Ulangan

Para peserta didik akan giat belajar kalau mengetahui akan ada ulangan. Oleh karena itu, memberi ulangan ini juga merupakan sarana motivasi. Tetapi yang harus diingat oleh guru, adalah jangan terlalu sering (misalnya setiap hari) karena bisa membosankan dan bersifat rutinitas. Dalam hal ini guru harus terbuka, maksudnya kalau ada ulangan harus diberitahukan kepada peserta didiknya.

6) Memberikan Pujian

Apabila ada peserta didik yang sukses yang berhasil menyelesaikan tugas dengan baik, perlu diberikan pujian. Pujian ini adalah bentuk *reinforcement*

yang positif dan sekaligus merupakan motivasi yang baik. Dengan pujian yang tepat akan memupuk suasana yang menyenangkan dan mempertinggi gairah belajar sekaligus akan membangkitkan harga diri.

- 7) Guru menciptakan level aspirasi berupa performasi yang mendorong ke level berikutnya

Guru berusaha mendorong peserta didik lebih bersemangat dalam belajarnya. Menurut Barow, level aspirasi tergantung kepada kecerdasan anak, status sosial ekonomi anak, hubungan anak dan orangtua, serta harapan-harapan orangtua kepada anaknya. Guru perlu mengorganisasi peserta didik dalam segala aktivitasnya dalam hal belajar untuk mencapai prestasi-prestasi yang tinggi sehingga peserta didik betul-betul menyadari akan pentingnya prestasi-prestasi tersebut secara bersama-sama. Dengan begitu akan tercipta rasa kelompok dan peserta didik bersedia berjuang demi kelompoknya.

- 8) Guru dalam mengajar tidak menggunakan prosedur yang menekan

Guru sewaktu mengajar dalam kelas tidak menggunakan penekanan-penekanan sehingga menimbulkan rasa antipati pada anak. Guru harus pandai menciptakan situasi dan kondisi pembelajaran yang menyenangkan tidak tegang atau menakutkan

peserta didik. Sebaiknya guru dapat menciptakan suasana belajar dalam kelas yang merdeka tetapi terkendali. Di samping bentuk-bentuk motivasi sebagaimana diuraikan di atas, sudah barang tentu masih banyak bentuk dan cara yang bisa dimanfaatkan. Hanya yang penting bagi guru adanya bermacam-macam motivasi itu dapat dikembangkan dan diarahkan untuk dapat menghasilkan hasil belajar yang bermakna. Mungkin pada mulanya, karena ada sesuatu (bentuk motivasi) siswa itu rajin belajar, tetapi guru harus mampu melanjutkan dari tahap rajin belajar itu bisa diarahkan menjadi kegiatan belajar yang bermakna, sehingga hasilnya pun akan bermakna bagi kehidupan si subjek belajar (Hudoyo, 2002).

RANGKUMAN

- ❖ **Psikologi Pendidikan** adalah ilmu yang mempelajari gejala kejiwaan seseorang yang sangat penting adanya dalam proses pendidikan, sehingga dapat menjadi alat dalam mencapai tujuan pendidikan yang telah ditetapkan.
- ❖ **Pembelajaran Matematika** adalah suatu proses belajar mengajar yang dibangun oleh guru untuk meningkatkan kemampuan berpikir siswa, serta sebagai upaya meningkatkan penguasaan yang baik terhadap materi matematika.
- ❖ **Hierarki Belajar** adalah urutan pengetahuan dari yang paling sederhana sampai yang paling kompleks.
- ❖ **Teori Nativisme** menyatakan bahwa kecerdasan seseorang ditentukan secara kodrati (alamiah, bawaan dari lahir), dengan, tidak menganggap penting pengaruh lingkungan.
- ❖ ***Language Acquisition Device (LAD)*** adalah suatu bagian fisiologi dari otak yang dikhususkan untuk memproses bahasa, dan hanya manusia yang memiliki alat ini, sehingga hanya manusia yang mampu berbahasa.

- ❖ **Teori Behaviorisme** adalah teori belajar yang menekankan pentingnya peniruan dan menyatakan bahwa belajar bahasa melibatkan pembentukan hubungan antara stimulus, respons, dan penguatan. Pembentukan ini melalui proses pembiasaan (*conditioning*) dan pengulangan-pengulangan.
- ❖ **Teori Kognitif** Menganggap bahwa pengetahuan/perkembangan bahasa berlandaskan pada perkembangan kognitif. Perkembangan ini tergantung pada keterlibatan anak secara aktif dengan lingkungannya.
- ❖ ***Self-Efficacy*** adalah penilaian seseorang terhadap kemampuannya untuk mengorganisasikan dan melaksanakan sejumlah tingkah laku yang sesuai dengan unjuk kerja (*performance*) yang dirancangnya.
- ❖ ***Self-Regulated Learning*** adalah proses aktif dan konstruktif siswa dalam menetapkan tujuan untuk proses belajarnya dengan melibatkan metakognisi, motivasi, dan perilaku dalam proses belajar dan berusaha untuk memonitor, meregulasi, dan mengontrol kognisi, motivasi, dan perilaku, yang

kemudian semuanya diarahkan dan didorong oleh tujuan dan mengutamakan konteks lingkungan.

- ❖ ***Adversity Quotient*** adalah kecerdasan individu dalam berpikir, mengontrol, mengelola, dan mengambil tindakan dalam menghadapi kesulitan, hambatan atau tantangan hidup, serta mengubah kesulitan maupun hambatan tersebut menjadi peluang untuk meraih kesuksesan.
- ❖ **Kesulitan Belajar Matematika** adalah hambatan atau gangguan belajar pada anak yang ditandai oleh ketidakmampuan anak untuk mengekspresikan hubungan-hubungan kuantitatif dan keruangan.

Latihan Soal 1.1

Pertemuan ke-2 (*untuk mengetahui kemampuan analisis mahasiswa dalam memahami materi tentang teori-teori pokok belajar*)

1. Jelaskan pandangan Nativisme tentang pemerolehan bahasa pertama!
2. Jelaskan tentang kritikan terhadap pandangan Nativisme yang berhubungan dengan ujaran-ujaran

orang dewasa ketika mereka berkomunikasi dengan anak-anak!

3. Jelaskan bagaimana anak belajar makna berdasarkan aliran *Classical Conditioning*!
4. Setujukah Anda pada kritikan-kritikan terhadap pandangan Behaviorisme! Jelaskan!
5. Berdasarkan penjelasan Piaget, apakah anak yang berbakat misalnya, dapat dipicu untuk melompati satu tahap perkembangan kognitif?
6. Jelaskan bagaimana anak mendapatkan pengetahuan menurut pandangan Kognitif?

Latihan Soal 1.2

Pertemuan ke-3 (*untuk mengetahui kemampuan analisis mahasiswa dalam memahami materi tentang psikologi pembelajaran matematika menurut Jean Piaget, Van Hille, dan Polya*)

1. Buatlah contoh aplikasi dalam pembelajaran matematika empat tahap perkembangan intelektual anak yang dikemukakan oleh Jean Piaget!

2. Buatlah contoh aplikasi tahap belajar anak dalam belajar geometri menurut Van Hille!
3. Buatlah contoh aplikasi penerapan teori Polya dalam pembelajaran matematika!

Latihan Soal 1.3

Pertemuan ke-4 (*untuk mengetahui kemampuan analisis mahasiswa dalam memahami materi tentang self-efficacy, self-regulated learning, adversity quotient dalam pembelajaran matematika*)

1. Bagaimana pengaruh *self-efficacy* dalam pembelajaran matematika!
2. Bagaimana cara menumbuhkembangkan *self-efficacy Matematis!*
3. Jelaskan faktor-faktor yang mempengaruhi *self-regulated learning!*
4. Jelaskan strategi dalam *self-regulated learning* yang digunakan peserta!
5. Jelaskan tipe manusia dalam konsep *Adversity Quotient!*
6. Jelaskan faktor pembentuk *Adversity Quotient!*

BAB 2

PEMBENTUKAN KONSEP-KONSEP MATEMATIKA

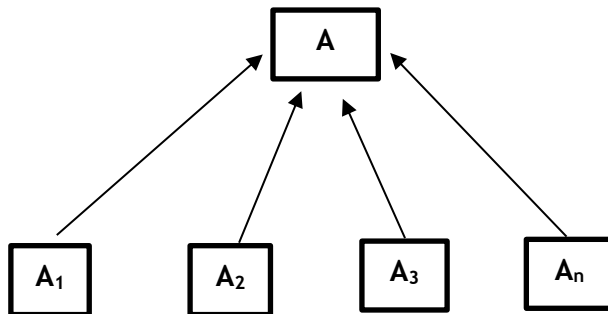
A. Pengertian Konsep

Ahli psikologi telah menyadari bahwa begitu pentingnya konsep dalam proses berpikir, namun sampai saat ini belum ada pengertian standar tentang konsep yang disepakati secara umum. Sehingga pengertian konsep yang dikemukakan berdasarkan sudut pandang dan kebutuhan masing-masing. Pada kasus perkembangan bayi masa pra-verbal dapat dijelaskan sebagai berikut: pertama, seorang bayi yang berumur satu tahun, ketika ia mendapati botol susunya yang kosong, ia merangkak menghampiri botol-boto lain yang kosong kemudian ia meletakkan botol susunya di samping kedua botol tersebut. Kedua, seorang bayi berumur 2 tahun, dia melihat bayi lain merangkak, kemudian membelai kepalanya dan menepuk-menepuk punggungnya. Dia melakukan ini karena dia melihat kebanyakan orang lain memperlakukan yang sama kepada

hewan peliharaannya, tetapi tidak pernah melihat sebelumnya perlakuan pada bayi yang lainnya.

Dari contoh kasus di atas dapat disimpulkan: pertama, mereka mengklasifikasikan sesuatu berdasarkan pengalaman-pengalaman sebelumnya. Kedua, memasang dari pengalaman mereka ke dalam beberapa kelompok. Kitapun melakukan hal yang sama yaitu: kita mengambil pengalaman yang lalu untuk kita terapkan pada situasi saat ini. Aktivitas ini secara otomatis akan kita lakukan secara terus menerus.

Pada tingkatan bawah, kita mengelompokkan setiap kali kita mengenal sebuah objek sebagai salah satu yang telah kita lihat sebelumnya. Dan ternyata tidak semua pengalaman ini sama, sampai kita dapat mengetahui perbedaan-perbedaan itu secara nyata. Dari perubahan ini kita mengabstraksikan ke dalam keberagaman sifat dan sifat-sifat ini masuk kedalam ingatan kita dalam jangka waktu yang lebih lama dari pada sesuatu yang kita lihat secara sepenggal-sepenggal dari suatu objek. Seperti pada Gambar 2.1 berikut:



Gambar 2. 1 Proses Pembentukan Konsep

$A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ menggambarkan pengalaman-pengalaman yang terdahulu tentang sejumlah objek yang mempunyai kesamaan yang disebut *particular chair*. Dari sini kita mengabstraksikan sifat-sifat umum dari objek-objek itu seperti yang ditunjukkan oleh A. Ketika sebuah abstraksi itu terbentuk maka pengalaman-pengalaman yang lain akan mudah untuk kita bedakan apakah pengalaman itu masuk kedalam abstraksi kita atau di luar abstraksi kita. Jika pengalaman itu di luar abstraksi kita, maka kita akan membuat abstraksi yang baru dan proses ini akan berulang-ulang. Sehingga kemampuan kita semakin cepat dalam melakukan abstraksi. Konsep terbentuk dari sejumlah pengalaman yang memiliki kesamaan secara umum. Ketika konsep pertama terbentuk, kita bisa mengatakan contoh-contoh konsep tersebut. Sehingga semakin banyak pengalaman yang kita dapatkan semakin

banyak pula konsep-konsep yang kita punya (Skemp, 1971).

Beberapa istilah-istilah yang penting dalam proses pembentukan konsep. Abstraksi adalah sebuah aktivitas berpikir secara sadar akan kesamaan-kesamaan diantara pengalaman-pengalaman kita. Klasifikasi adalah pengelompokan pengalaman-pengalaman yang mempunyai kesamaan-kesamaan dari hasil abstraksi. Mengklasifikasi artinya mengumpulkan secara bersama pengalaman kita dengan dasar dari kesamaan. Sedangkan mengabstraksi berarti merubah sikap yang terdahulu sehingga menghasilkan pengalaman baru dalam mengelompokan suatu objek berdasarkan kemiripan sifat dari suatu kelompok yang telah terbentuk. Hal ini untuk membedakan abstraksi itu sebagai suatu aktivitas sedangkan mengabstraksi adalah hasil dari suatu abstraksi, dan rangkaian aktivitas ini menghasilkan suatu konsep.

Rosser (Dahar, 1989) mengemukakan bahwa konsep adalah suatu abstraksi yang mewakili satu kelas objek-objek, kejadian-kejadian, kegiatan-kegiatan, atau hubungan-hubungan, yang mempunyai atribut-atribut yang sama. Woolfolk (1998) mendefinisikan konsep sebagai suatu kategori yang digunakan untuk mengelompokkan ide-ide, peristiwa-peristiwa, orang-orang, dan objek-objek yang

similar atau serupa. Sedangkan Ormrod (Dahar, 1989) mendefinisikan konsep sebagai suatu cara pengelompokan atau pengkategorisasian secara mental dari objek-objek atau peristiwa-peristiwa di dunianya. Menurut Gagne (Ruseffendi, 2006), konsep adalah ide abstrak yang memungkinkan kita mengelompokkan benda-benda kedalam contoh dan noncontoh. Selain itu, Solso (Ruseffendi, 1990), mengungkapkan bahwa konsep adalah bayangan mental, ide-ide, atau proses-proses. Demikian juga Bruning, Schraw & Roning (1995) mendefinisikan konsep sebagai struktur mental sehingga kita dapat merepresentasikan kategori yang bermakna.

Definisi-definisi konsep yang dikemukakan di atas, pada dasarnya mengacu pada “sesuatu yang diterima dalam pikiran” atau “sesuatu ide yang umum dan abstrak”, sehingga masih terlampau luas, baik ditinjau dari segi pengertiannya, maupun dari segi penggunaannya. Namun dari pengertian-pengertian konsep yang dikemukakan di atas dapat diidentifikasi unsur-unsur yang membentuk suatu konsep yang dapat digunakan untuk membedakan dengan konsep yang lain

Flavel (Dahar, 1989) mengemukakan dimensi-dimensi dari konsep yang sekaligus dapat digunakan untuk membedakan konsep-konsep, yang meliputi:

1) Atribut

Atribut suatu konsep mengacu pada kekhususan-kekhususan atau ciri-ciri umum yang menyebabkan kita memasukkan contoh-contoh dalam kategori yang sama. Setiap konsep mempunyai sejumlah atribut yang berbeda, dapat dari segi bentuk, pola, warna, atau fungsi.

2) Struktur

Struktur menyangkut cara terkaitnya atau tergabungnya atribut-atribut, yaitu secara konjungtif, disjungtif atau relasional. Konsep-konsep konjungtif adalah konsep-konsep di mana terdapat dua atau lebih sifat-sifat sehingga dapat memenuhi syarat sebagai contoh konsep. Konsep-konsep disjungtif adalah konsep-konsep di mana satu dari dua atau lebih sifat-sifat harus dimiliki agar memenuhi syarat sebagai contoh. Konsep-konsep relasional menyatakan hubungan tertentu antara atribut-atribut konsep.

3) Keabstrakan

Konsep-konsep dapat berbentuk konkret dan dapat pula berbentuk abstrak. Misalnya konsep tentang segitiga dapat dikonkretkan sedangkan konsep keinginan adalah abstrak.

4) Keinklusifan

Keinklusifan dapat ditunjukkan dengan sejumlah contoh-contoh yang terlibat dalam konsep tersebut. Konsep segitiga diperkenalkan kepada siswa melalui contoh-contoh; mula-mula mereka diberikan satu contoh, kemudian diberikan contoh-contoh yang bervariasi (siku-siku, sama kaki, sama sisi, lancip, tumpul), sehingga konsep mereka tentang segitiga menjadi lebih luas.

5) Generalitas

Bila diklasifikasikan konsep-konsep dapat berbeda dalam posisi superordinat atau subordinat. Makin umum suatu konsep, makin banyak asosiasi yang dapat dibuat dengan konsep-konsep lainnya. Misalnya, konsep persegi panjang merupakan subordinat dari konsep segiempat, sebaliknya konsep segiempat merupakan superordinat dari konsep persegi panjang.

6) Ketepatan

Ketepatan suatu konsep menyangkut apakah ada sekumpulan aturan-aturan untuk membedakan contoh-contoh dari non contoh suatu konsep.

7) Kekuatan

Kekuatan suatu konsep ditentukan oleh sejauh mana orang setuju, bahwa konsep itu penting.

B. Konsep dalam Matematika

Konsep dalam matematika merupakan salah satu objek kajian langsung matematika yang bersifat abstrak selain fakta, operasi, dan prinsip. Bell (1981) mengemukakan bahwa konsep dalam matematika adalah ide abstrak yang memungkinkan kita untuk dapat mengklasifikasikan (mengelompokkan) objek atau kejadian, dan menerangkan apakah objek atau kejadian itu merupakan contoh atau bukan contoh dari ide tersebut. Misalnya, segitiga adalah nama suatu konsep abstrak, yang dengan konsep ini sekumpulan objek dapat digolongkan sebagai contoh segitiga atau bukan segitiga.

Dalam matematika, dikenal adanya konsep verbal dan konsep non verbal. Konsep non verbal adalah konsep yang diperoleh dengan mengabstraksi contoh-contoh dan dipelajari melalui pembentukan konsep. Sedangkan konsep verbal adalah konsep-konsep yang ditandai dengan adanya pernyataan yang menunjukkan sebutan dan dipelajari melalui perpaduan konsep. Konsep non verbal dapat berubah menjadi konsep verbal jika dan hanya jika ada nama atau sebutan untuk konsep itu yang telah dikenal secara luas, untuk memudahkan seseorang yang memiliki konsep itu berkomunikasi satu sama lain. Contoh: Konsep segitiga sama sisi dapat diperkenalkan secara non verbal

dengan memberikan contoh-contoh dan selanjutnya peserta didik melakukan abstraksi sebagai proses pembentukan konsep, tetapi dapat pula diajarkan secara verbal dengan langsung memberikan definisi dan dipadukan dengan konsep lain, seperti: “segitiga sama sisi adalah segitiga yang semua sisinya sama panjang”

Selanjutnya, Hunt, Marin & Stone (1966) mengemukakan “*A concept is decision rule wich, when applied to description of an object, specifies whether or not a name can be applied*” (Konsep adalah sesuatu aturan penentuan yang apabila diaplikasikan untuk mendeskripsikan nama suatu objek, dapat menentukan apakah dapat atau tidak nama itu diterima). Jadi konsep adalah suatu aturan yang tegas bila dipakai untuk menggambarkan suatu objek dan menentukan apakah suatu nama/istilah dapat dipakai atau tidak. Misal, peserta didik yang telah mengetahui konsep lingkaran sebagai tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama pada satu titik tertentu pada bidang datar, maka peserta didik tersebut mempunyai aturan yang dapat digunakan untuk menyatakan apakah suatu objek dapat disebut atau diberi nama lingkaran. Hal ini, sejalan dengan yang dikemukakan oleh Geach dalam buku yang sama, bahwa seseorang telah mempunyai konsep mengenai suatu objek, jika orang itu

telah dapat menggunakan istilah itu. Dengan kata lain, X telah mempunyai konsep Y, jika X telah belajar bagaimana menggunakan istilah Y. Oleh Ausebel, hal ini disebut sebagai perpaduan konsep (*concept assimilation*) dimana seseorang mendapatkan konsep-konsep dengan menggunakan konsep yang lain.

Konsep-konsep dalam matematika pada umumnya disusun dari fakta-fakta dan konsep-konsep terdahulu. Sedang untuk menunjukkan sesuatu konsep tertentu, digunakan batasan atau definisi (Springer, 2011). Karena karakteristik materi matematika yang hierarkis, maka suatu konsep dalam matematika pada umumnya digunakan secara berkesinambungan untuk menjelaskan konsep-konsep yang lain.

C. Pembentukan dan Pemahaman Konsep Matematika

Bruner (1960) mengemukakan bahwa kegiatan mengkategorikan dalam kaitannya dengan pembelajaran konsep memiliki dua komponen, yaitu: (1) proses pembentukan konsep dan (2) proses pemahaman konsep. Lebih lanjut ia mengemukakan bahwa langkah pertama adalah pembentukan konsep, kemudian baru memahami konsep. Perbedaan penting dari kedua komponen tersebut adalah: (1) Tinjauan dan tekanan dari kedua bentuk

perilaku pengkategorian ini berbeda; (2) Langkah-langkah dari kedua proses berpikir tidak sama; dan (3) Kedua proses mental membutuhkan strategi mengajar yang berbeda.

1) Pembentukan Konsep

Pembentukan konsep (*concept formation*) mengarahkan ketajaman dari sifat-sifat umum kelas objek-objek atau ide-ide. Kita akan melihat bagaimana pembentukan konsep yang menghubungkan bentuk-bentuk visual dari bentuk-bentuk asli dan item-item semantik. Ciri-ciri konsep akan dipusatkan pada hukum-hukum relasi yang merupakan keistimewaan konsep. Misalnya kita akan mempelajari beberapa konsep abstrak “keadilan” (contohnya: kejujuran, moralitas, persamaan hak) itu akan membedakan kesamaan dari yang lain. Dalam hal ini peraturan menghubungkan ciri-ciri utama dari konsep, dimana konsep didefinisikan dari semua syarat-syarat yang mempunyai hubungan dengan ciri-ciri utama yang dimilikinya.

Mengenai pembentukan konsep dalam matematika, Krutetskii (1976) mengemukakan empat cara, yaitu (a) abstraksi, misalnya pembentukan konsep bilangan, (b) idealisasi, misalnya kerataan suatu bidang dan kelurusan suatu garis, (c) abstraksi dan idealisasi, misalnya

pembentukan konsep kubus dan kerucut, dan (d) penambahan syarat pada konsep terdahulu, misalnya pembentukan konsep belah ketupat dari jajar genjang. Suatu abstraksi terjadi bila kita memandang beberapa objek, kemudian kita gugurkan ciri-ciri atau sifat-sifat objek itu yang dianggap tidak penting atau tidak diperlukan, dan akhirnya hanya diperhatikan atau diambil sifat penting yang dimiliki bersama, misalnya pada pembentukan konsep bilangan. Idealisasi terjadi bila kita berhadapan dengan objek tertentu yang tidak sempurna, misalnya tidak lurus benar, tidak datar benar, tidak mulus benar, kemudian kita menganggapnya sempurna.

Sedangkan mengenai jenis-jenis definisi sebagai salah satu cara menyatakan konsep dalam matematika, Krutetskii (1976) mengemukakan tiga jenis definisi, yaitu (a) definisi analitik, (b) definisi genetik, dan (c) definisi dengan rumus. Pendefinisian konsep matematika secara analitik adalah pendefinisian dengan menyebutkan *genus proksimum* (keluarga terdekat) dan *deferensia spesifikasi* (pembeda khusus). Dalam contoh konsep “belah ketupat adalah jajaran genjang yang semua sisinya sama panjang”, jajaran genjang disebut genus proksimumnya dan sisi sama panjang merupakan deferensia spesifik. Pendefinisian secara genetik adalah dengan mengungkapkan cara

terjadinya atau membentuknya konsep yang didefinisikan. Contoh, Trapesium adalah segiempat yang terjadi bila sebuah segitiga dipotong oleh sebuah garis yang sejajar dengan salah satu sisinya. Sedangkan definisi dengan rumus adalah definisi yang dinyatakan dengan rumus tertentu. Contoh, $n! = 1.2.3....(n-1).n$.

Tabel 2.1. Langkah Strategi Pembentukan Konsep

Kegiatan yang Nampak	Operasi Mental yang Tidak Nampak	Pertanyaan Pengarahan
1. Mengidentifikasi atau menyusun daftar contoh	Membuat perbedaan antar contoh	Apa yang kamu lihat? Apa yang kamu dengar?
2. Pengelompokkan	Mengidentifikasi karakteristik umum contoh-contoh (mengabstraksi)	Mana yg bisa dimasukkan dalam kelompok? Berdasarkan kriteria apa?
3. Memberi nama konsep	Menentukan urutan contoh secara hierarkis	Disebut apa kelompok ini?

Sumber: Degeng. (1989). Ilmu Pengajaran Taksonomi Variabel

Agar pebelajar aktif dalam setiap kegiatan tersebut di atas, Tabel 2.1 menciptakan langkah pengajaran dalam bentuk pertanyaan. Jenis pertanyaan disesuaikan dengan langkah kegiatan yang dilakukan. Maksud dari pertanyaan-pertanyaan tersebut adalah mendorong pembelajaran mengembangkan sistem konseptual bagaimana cara mengolah informasi. Hal penting yang perlu diperhatikan adalah bahwa setiap langkah kegiatan melibatkan operasi mental yang tidak nampak. Pembelajaran matematika tidak hanya menyimpan konsep matematika tetapi kemudian digunakan untuk menerapkan dalam masalah yang berkaitan, juga mendukung pembelajaran selanjutnya dalam hal membangun pemahaman baru (Pemu, 2015) (Misalnya, kegiatan mengidentifikasi contoh dalam rangka menyusun daftar, melibatkan operasi mental yang tidak nampak, seperti membuat perbedaan antar contoh. Gambaran secara lengkap ketiga kegiatan tersebut di atas beserta operasi mental yang tidak nampak dan pertanyaan pengarahannya disajikan dalam Tabel 2.1.

Ketiga langkah pembentukan konsep yang dikembangkan Tabel 2.1 dapat dijadikan suatu model pengorganisasian pengajaran tingkat mikro, yang hanya

melibatkan pengajaran suatu konsep tertentu. Langkah tersebut merupakan langkah runtut yang tidak bisa dibalik.

2) Pemahaman Konsep

Kalau dalam pembentukan konsep, pebelajar mengelompokkan contoh-contoh berdasarkan kriteria tertentu dan setiap kelompok mengilustrasikan konsep yang berbeda, maka dalam pemahaman konsep hanya ada satu konsep dan menggunakan kriteria yang diberikan oleh guru, peserta didik mencoba menentukan identitas dan definisi konsep itu.

Bruner (Degeng, 1989) mengembangkan 3 strategi pengorganisasian pengajaran pemahaman konsep, yaitu:

1) Model penerimaan

Model penerimaan mengacu pada kepada strategi pengorganisasian contoh-contoh konsep dengan memberi tanda “ya” bila contoh itu menjadi contoh konsep, dan tanda “tidak” bila contoh itu bukan contoh konsep.

2) Model pilihan

Model pilihan mengacu kepada strategi pengorganisasian contoh-contoh konsep tanpa memberi tanda “ya” atau “tidak”.

3) Model dengan contoh yang tak terorganisasi

Model contoh yang tak terorganisasi mengacu pada strategi pemahaman konsep dengan menggunakan contoh-contoh yang tak terorganisasi dalam lingkungan kehidupan yang sesungguhnya.

Langkah-langkah strategi pengajaran pemahaman konsep untuk masing-masing model dapat dipaparkan secara berturut-turut pada Tabel 2.2, Tabel 2.3, dan Tabel 2.4 berikut.

Tabel 2.2 Langkah Strategi Pemahaman Konsep Model Penerimaan

Langkah 1. Penyajian data dan identifikasi konsep	Langkah 2. <i>Menguji pemahaman konsep</i>	Langkah 3. <i>Analisis strategi berpikir</i>
<ul style="list-style-type: none">• Guru menyajikan data/ contoh yang telah diberi tanda “ya” atau “tidak”.	<ul style="list-style-type: none">• Siswa mengidentifikasi contoh-contoh tambahan yang tidak diberi tanda “ya” atau “tidak”.• Guru mengkonfirmasi	<ul style="list-style-type: none">• Siswa mendeskripsikan pola berpikir yang dipakainya pada langkah pertama dan kedua sampai memahami konsep.• Peranan hipotesis,

<ul style="list-style-type: none"> • Siswa membandingkan karakteristik dari contoh yang positif dan negatif . • Siswa mengembangkan dan menguji hipotesis. • Siswa menyatakan definisi berdasarkan karakteristik pokok. 	<p>asi hipotesis tentang nama konsep, dan menyatakan definisi berdasarkan karakteristik pokok.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Siswa mengidentifikasi contoh-contoh baru. 	<p>karakteristik konsep juga dapat didiskusikan pada langkah ini.</p>
--	---	---

Sumber: Degeng. (1989). Ilmu Pengajaran Taksonomi Variabel

Tabel 2.3. Langkah Strategi Pemahaman Konsep Model Pilihan

<p>Langkah 1. Penyajian data dan identifikasi konsep</p>	<p>Langkah 2. <i>Menguji pemahaman konsep</i></p>	<p>Langkah 3. Analisis strategi berpikir</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Guru menyajikan data/ contoh yang tidak diberi tanda “ya” atau “tidak”. • Siswa meneliti setiap contoh, termasuk contoh-nya sendiri . • Siswa mengem- bangkan dan menguji hipotesis. 	<ul style="list-style-type: none"> • Siswa mengidentifikasi contoh-contoh tambahan yang tidak diberi tanda “ya” atau “tidak”. • Siswa mengemukakan contoh baru. • Guru mengkon- firmasi hipotesis tentang nama konsep, dan menyatakan definisi berdasarkan karakteristik pokok. 	<ul style="list-style-type: none"> • Siswa mendeskripsikan pola berpikir yang dipakainya pada langkah pertama dan kedua sampai memahami konsep. • Peranan hipotesis, karakteristik konsep juga dapat didiskusikan pada langkah ini.

Sumber: Degeng. (1989). Ilmu Pengajaran Taksonomi Variabel

Tabel 2.4. Langkah Strategi Pemahaman Konsep Untuk Data yang Tidak Terorganisir

Langkah 1. Penyajian data dan identifikasi konsep	Langkah 2. <i>Menguji pemahaman konsep</i>	Langkah 3. <i>Analisis strategi berpikir</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Menentukan dan memberi nama konsep. • Mengidentifikasi karakteristik yang digunakan. 	<ul style="list-style-type: none"> • Mendiskusikan karakteristik dan peranan hipotesis. • Membandingkan contoh dengan contoh lain dalam konsep yang sama. 	<ul style="list-style-type: none"> • Lebih banyak merupakan suatu diskusi kelompok daripada kegiatan mandiri.

Sumber: Degeng. (1989). Ilmu Pengajaran Taksonomi Variabel.

D. Pengajaran Konsep Matematika

Untuk pembelajaran konsep matematika, Ruseffendi (1990) mengemukakan beberapa faktor yang mempengaruhi mudah atau sulitnya orang belajar konsep, yaitu: (1) kejelasan dan kekonkretan ciri-ciri utama definisi; (2) tersedianya definisi; (3) penyajian contoh-contoh positif; (4) penyajian contoh-contoh negatif; dan (5) penyajian yang simultan dilawankan dengan penyajian yang sekuensial dari contoh-contoh positif dan contoh-contoh negatif.

Mulyana (2014) mengemukakan beberapa langkah yang dapat ditempuh dalam mengajarkan konsep matematika, khususnya pada peserta didik yang berada pada tahap berpikir operasi formal sebagai berikut:

1) Pendefinisian (*defining*)

Membuat definisi adalah langkah yang baik karena definisi menggunakan bahasa yang sangat singkat tetapi padat dan terstruktur. Dalam mengajarkan definisi sebaiknya dibuat bagan-bagan untuk dipelajari, karena mungkin beberapa peserta didik tidak dapat memahami rangkaian kata penting yang dapat diambil dari definisi. Untuk itu, definisi sering kali ditulis dalam bentuk pengkelasan seperti:

.....I..... adalah II sehingga III

I : diisi istilah yang didefinisikan, II : diisi istilah yang merupakan superset dari kumpulan objek dari istilah yang didefinisikan, dan III : diisi satu atau lebih ciri-ciri khusus yang dimiliki oleh istilah yang didefinisikan.

Contoh:

Jajargenjang adalah segiempat yang memiliki dua pasang sisi sejajar.

- ◆ Jajargenjang adalah istilah yang didefinisikan (I)
- ◆ Segiempat adalah superset dari jajargenjang (II)

◆ Dua pasang sisi sejajar adalah ciri-ciri khusus yang dimiliki oleh jajargenjang.

2) Menyatakan syarat cukup

Perhatikan contoh ilustrasi berikut:

“Jika segiempat memiliki sepasang sudut berhadapan sama besar, maka segiempat tersebut merupakan jajargenjang.”

Dari contoh di atas dapat dikatakan bahwa syarat cukup supaya suatu segiempat merupakan jajargenjang adalah memiliki sepasang sudut berhadapan sama besar. Secara umum syarat cukup didahului oleh kata “jika”, tetapi kadang-kadang digunakan istilah lain, seperti: asalkan, sebab, karena, dengan alasan.

Contoh lain:

- a) Suatu fungsi adalah fungsi linier asalkan grafiknya merupakan garis lurus.
- b) Persamaan $14x^2 - 9y^2 = 144$ adalah hiperbola sebab bentuknya $a^2x^2 - b^2y^2 = a^2b^2$.

Dengan logika syarat cukup, peserta didik diharapkan mampu mencari contoh objek yang dinyatakan oleh konsep, sehingga langkah syarat cukup memudahkan penerapan dari konsep.

3) Memberi contoh

Contoh-contoh adalah objek-objek yang ditunjuk oleh konsep, yaitu anggota-anggota himpunan yang ditentukan oleh konsep tersebut. Contoh-contoh yang diambil dapat memperjelas konsep yang dipelajari, karena bersifat definitif, spesifik, dan mudah dikenal. Untuk itu diharapkan contoh yang dipilih adalah yang sederhana, kemudian siswa dituntun untuk mencari contoh-contoh sendiri.

Contoh:

“Penyelesaian dari suatu persamaan adalah nilai-nilai yang apabila disubstitusikan pada persamaan itu menghasilkan kalimat yang bernilai benar.”

Untuk memperjelas konsep ini, guru dapat memberikan contoh dari konsep itu seperti berikut ini.

$x = 2$ adalah penyelesaian dari persamaan $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Tidak semua konsep dapat diberikan contohnya. Misalnya konsep “tidak ada bilangan prima genap yang lebih besar dari 2”, maka tidak mungkin dapat diberikan contoh untuk konsep ini.

4) Memberi contoh disertai alasannya

Pemberian contoh yang disertai dengan alasan relevan dengan penyajian syarat cukup. Dengan kata lain, alasan yang dikemukakan tidak lain adalah syarat cukup

dari definisi. Selain itu, contoh yang dibuat peserta didik tidak dibuat secara spekulatif dan menghindari unsur tebakan. Cara ini sangat membantu bagi siswa yang lamban, dimana pada umumnya sulit mengerti hubungan logika antara syarat cukup suatu konsep dengan contoh.

Contoh:

“Penyelesaian dari suatu persamaan adalah nilai-nilai yang apabila disubstitusikan pada persamaan itu menghasilkan kalimat yang bernilai benar.”

Untuk memperjelas konsep ini, guru dapat memberikan contoh dari konsep beserta alasannya seperti berikut ini.

“ $x = 1$ adalah penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 + 2x - 3 = 0$, karena jika $x = 1$ disubstitusi pada persamaan kuadrat tersebut diperoleh pernyataan $(1)^2 + 1 \cdot 2 - 3 = 0$ yang bernilai benar.” (alasan yang diberikan tidak lain adalah syarat cukup agar $x = 1$ merupakan penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 + 2x - 3 = 0$).

5) Memberi kesamaan atau perbedaan objek yang dinyatakan konsep

Cara ini menuntun siswa agar dapat membandingkan objek-objek yang ditunjukkan oleh konsep yang sedang diajarkan dengan objek-objek lain yang sudah dikenal oleh peserta didik. Mempertentangkan objek-objek

yang ditunjukkan oleh konsep dengan objek-objek lain yang dapat diperbandingkan untuk menunjukkan kesamaan dan perbedaannya. Kesamaan dan perbedaan yang ditemukan akan sangat membantu peserta didik dalam memahami dan mengingat konsep yang sedang dipelajarinya.

Contoh.

- a) Dalam mengajarkan grafik fungsi cosinus, guru dapat membandingkan dan mempertentangkannya dengan grafik fungsi sinus yang sudah lebih dulu diajarkan.
 - b) Dalam mengajarkan konsep persegi, guru dapat membandingkan dan mempertentangkannya dengan jajargenjang untuk menemukan kesamaan dan perbedaan sifat-sifat dari kedua konsep tersebut.
- 6) Memberi suatu contoh penyangkal

Contoh penyangkal digunakan untuk menyangkal kesalahan generalisasi atau definisi. Misal seorang peserta didik menyatakan bahwa trapesium adalah segiempat yang mempunyai sepasang sisi yang sejajar. Salah seorang temannya diminta menggambar persegi atau pesegipanjang di papan tulis. Lalu guru bertanya: apakah gambar-gambar itu mempunyai dua sisi yang sejajar? Jawaban yang diharapkan adalah "Ya". Segera guru bertanya lagi, apakah gambar tersebut merupakan trapesium, sesuai dengan definisi yang telah dipelajari

(bukan definisi yang diberikan oleh temanmu tadi)? Jawaban yang diharapkan adalah “Bukan”. Gambar yang diberikan peserta didik tadi merupakan contoh penyangkal dari pendefinisian trapesium yang dikemukakan peserta didik sebelumnya.

7) Menyatakan syarat perlu

Untuk menunjukkan pernyataan merupakan suatu syarat perlu, biasanya digunakan tanda linguistik “harus” atau “hanya jika”.

Contoh:

“Sebuah segiempat adalah jajar genjang hanya jika kedua pasang sisi yang berhadapan sejajar.” (kedua pasang sisi berhadapan sejajar merupakan syarat perlu agar sebuah segiempat disebut jajar genjang).

Syarat perlu sangat berguna untuk menghindari kesalahpahaman konsep, karena dengan syarat perlu kita dapat mengidentifikasi contoh objek yang tidak dinyatakan oleh konsep.

8) Menyatakan syarat perlu dan cukup

Untuk menyatakan objek suatu konsep mempunyai syarat perlu dan cukup biasanya digunakan kata “jika dan hanya jika” dengan menyatakan syarat perlu dan cukup memungkinkan peserta didik menguasai konsep dengan baik, karena syarat cukup dapat mengidentifikasi contoh,

sedangkan syarat perlu dapat mengidentifikasi bukan contoh. Peserta didik mungkin tidak dapat menangkap adanya syarat perlu dan cukup dalam kalimat segi banyak beraturan adalah sama sisi dan sama sudut, lain halnya dalam kalimat segi banyak adalah beraturan jika dan hanya jika dia sama sisi dan sama sudut. Jadi ada dua syarat yang perlu untuk menjadikan segi banyak menjadi beraturan yaitu (1) sama sisi dan (2) sama sudut. Jika kedua syarat itu dikonjungsikan, maka terjadilah syarat cukup.

9) Memberi bukan contoh

Bukan contoh suatu konsep adalah objek yang tidak termasuk dalam kumpulan yang ditentukan konsep. Bukan contoh biasanya diberikan jika siswa melupakan satu atau lebih syarat perlu dari konsep suatu objek.

Contoh:

Dalam menjelaskan faktor persekutuan dari dua buah bilangan, misalnya 12 dan 24. Guru dapat memilih 4 dan 6 sebagai contoh faktor persekutuan dari kedua bilangan itu dan memilih 8 sebagai bukan contoh. (Guru dapat menunjukkan bahwa 8 memang dapat membagi 24, tetapi tidak dapat membagi 12).

10) Memberi bukan contoh disertai alasan

Langkah ini setara dengan memberi contoh disertai dengan alasannya. Alasan yang menyertai bukan contoh

adalah kegagalan untuk dipenuhinya syarat perlu. Memberikan bukan contoh disertai alasannya adalah langkah yang efektif dalam untuk mengajarkan konsep. Kegunaan memberikan bukan contoh bersama dengan alasannya akan nampak dengan jelas jika guru mengajar murid yang belajar lambat. Murid seperti ini tidak selalu melihat hubungan antara bukan contoh dengan syarat perlu. Guru biasa dengan sengaja menunjukkan hubungan itu pada peserta didik.

Contoh:

“Segi banyak adalah beraturan jika dan hanya jika dia sama sisi dan sama sudut”, ada dua syarat perlu agar suatu segi banyak menjadi beraturan, yaitu (1) sama sisi dan (2) sama sudut. Jika salah satu atau kedua syarat perlu itu tidak dipenuhi, maka suatu segi banyak bukan beraturan (bukan contoh). Atau dinyatakan dengan kalimat implikatif sebagai berikut:

- Jika sisi-sisi segi banyak tidak sama, maka segi banyak tersebut tidak beraturan.
- Jika sudut-sudut segi banyak tidak sama, maka segi banyak tersebut tidak beraturan.

RANGKUMAN

- ❖ **Konsep adalah** ide abstrak yang memungkinkan kita mengelompokkan benda-benda ke dalam contoh dan noncontoh.
- ❖ **Abstraksi** adalah sebuah aktivitas berpikir secara sadar akan kesamaan-kesamaan diantara pengalaman-pengalaman kita.
- ❖ **Klasifikasi** adalah pengelompokan pengalaman-pengalaman yang mempunyai kesamaan-kesamaan dari hasil abstraksi.
- ❖ Dimensi-dimensi dari konsep yang dapat digunakan untuk membedakan konsep-konsep yang lain adalah atribut, struktur, keabstrakan, keinklusifan, generalitas, ketepatan, dan kekuatan.
- ❖ Dalam matematika, dikenal adanya konsep verbal dan konsep takverbal. Konsep takverbal adalah konsep yang diperoleh dengan mengabstraksi contoh-contoh. Sedangkan konsep verbal adalah konsep-konsep yang ditandai dengan adanya pernyataan yang menunjukkan sebutan.
- ❖ Beberapa langkah yang dapat ditempuh dalam mengajarkan konsep matematika diantaranya:

pendefinisian (*defining*), menyatakan syarat cukup, memberi contoh dan alasannya, memberi kesamaan atau perbedaan objek yang dinyatakan konsep, memberi suatu contoh penyangkal, menyatakan syarat perlu, menyatakan syarat perlu dan cukup.

Latihan Soal 2.1

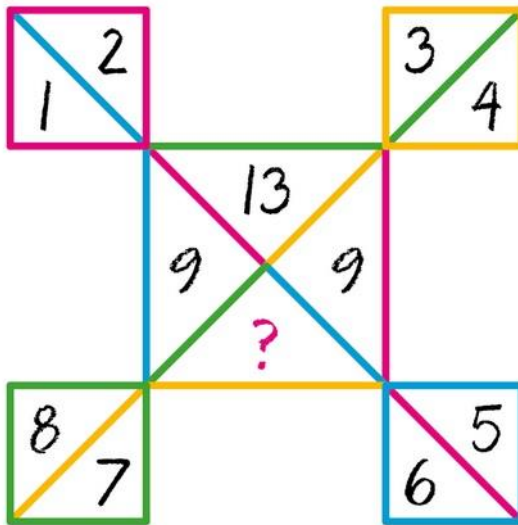
Pertemuan ke-5 (*untuk mengetahui kemampuan analisis mahasiswa dalam memahami materi tentang pembentukan konsep-konsep matematika*)

1. Jelaskan proses/tahapan-tahapan pembentukan konsep!
2. Jelaskan dimensi-dimensi dari konsep yang dapat digunakan untuk membedakan dengan konsep lain menurut Flavel!
3. Bagaimana strategi pembentukan dan pemahaman konsep matematika!
4. Jelaskan pengembangan strategi pengorganisasian pengajaran pemahaman konsep menurut Bruner!

5. Bagaimana cara/langkah yang dapat ditempuh dalam mengajarkan konsep matematika!

QUIS!

Berapakah angka yang tepat untuk mengganti “?”



GAGASAN SKEMA MATEMATIKA

A. Pengertian Skema

Menurut Richard R Skemp (1971) skema adalah istilah psikis umum untuk struktur mental. Skema dapat diartikan sebagai struktur-struktur konsep yang ada di dalam pikiran seseorang. Struktur-struktur ini tidak hanya bersifat struktur konsep matematika yang kompleks, melainkan juga struktur konsep matematika yang sederhana, bahkan struktur konsep yang paling sederhana. Menurut Padesky (1994), skema adalah cara mempersepsi, memahami, dan berpikir tentang dunia atau biasa disebut sebagai kerangka atau struktur pengorganisir aktivitas mental. Pendapat tersebut dikuatkan juga Hill (2012) yang memberi pengertian bahwa skema adalah perangkat mental bagi pengorganisasian pengetahuan. Skema menciptakan struktur bermakna bagi konsep-konsep yang terkait. Seorang peserta didik memiliki skema yang relevan dengan bermacam-macam jenis topik, dan jumlahnya

semakin banyak ketika peserta didik mendekati masa dewasa. Berdasarkan beberapa pendapat ahli di atas, dapat disimpulkan bahwa skema adalah perangkat mental/struktur-struktur konsep untuk mengintegrasikan pengetahuan yang ada dalam memperoleh pengetahuan baru.

Menurut Hill (2012), skema memiliki beberapa ciri yang memastikan fleksibilitas penggunaannya:

- 1) Sebuah skema dapat memiliki skema lain di dalamnya.

Contoh: Sebuah skema bagi bangun ruang mencakup skema bagi kubus, tabung, prisma dan seterusnya.

- 2) Skema memandu fakta-fakta umum yang dapat cukup beragam dari satu contoh khusus ke contoh lain.

Contoh : Skema bagi barisan bilangan mencakup fakta umum bahwa sebuah barisan bilangan membentuk pola tertentu. Hal itu mencakup pula pada barisan geometri yang memiliki rasio tetap dalam membentuk pola tertentu, dan juga barisan aritmetika yang memiliki selisih tetap dalam membentuk pola tertentu.

- 3) Skema-skema bisa beragam sesuai tingkat abstraksinya.

Contoh : Skema mengenai 'peluang suatu kejadian' jauh lebih abstrak daripada skema sebuah buku.

Menurut Padesky (1994), skema mencakup informasi tentang hubungan. Hubungan tersebut diantaranya sebagai berikut: (1) Konsep-konsep (seperti kaitan antara persegi dan belah ketupat); (2) Atribut-atribut di dalam konsep-konsep yang saling berkaitan (sudut 90° dan segitiga siku-siku); (3) Konsep-konsep dan konteks-konteks khusus (fungsi sinus dan trigonometri); dan (4) Konsep-konsep spesifik dan pengetahuan tentang latar belakang umum (konsep-konsep tentang matematikawan tertentu dan teoremanya).

Konsep-konsep awal skema berpusat pada bagaimana kita merepresentasikan informasi dalam memori, sebagai contoh peserta didik telah memperoleh informasi terkait dengan bilangan, pada masing-masing bilangan kita dapat menghubungkannya ke dalam suatu gagasan yang bermakna. Seperti pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Pasangan Bilangan dan Ide Penghubung

No	Contoh Pasangan Objek	Ide Penghubung
1.	Tiap pasangan ditulis dalam tanda kurung. (6, 5), (2, 1), (9, 8), (32,31)	...Satu lebihnya dari...
2.	Memperhatikan urutan penulisan masalah $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{6}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{8}\right)$...Senilai dengan....

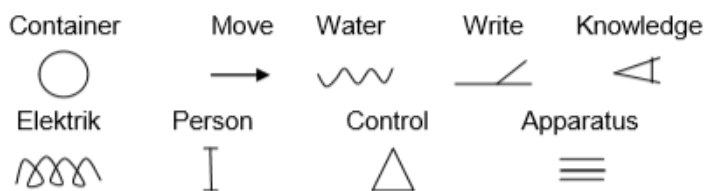
Pada Tabel 3.1 contoh nomor 1 di atas merupakan pasangan-pasangan bilangan yang saling dihubungkan sehingga muncul informasi baru yang disebut dengan relasi. Bisa juga menyebut relasi tersebut dengan “... satu lebihnya dari...”. Untuk contoh nomor 2 relasinya disebut dengan “...ekuivalen/senilai dengan....” Meskipun tidak identik, tetapi setiap bilangan memiliki nilai yang sama. Dua contoh di atas merupakan relasi satu lebihnya dari dan relasi ekuivalen dan masih banyak klasifikasi relasi yang lain yang merupakan hasil pengembangan dari pengetahuan awal.

B. Sekema sebagai Alat Pembelajaran Lebih Lanjut

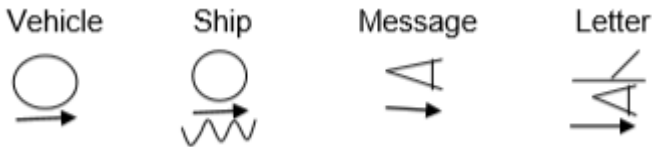
Skema yang sudah ada merupakan alat yang sangat diperlukan untuk memperoleh pengetahuan lebih lanjut. Ketika peserta didik menganalisis sebuah tugas kompleks menjadi komponen-komponennya, ia menemukan adanya

suatu struktur hierarki. Tugas akhir bisa dipecah-pecah berbagai item menjadi komponen pengetahuan atau keahlian, yang masing-masing kemudian bisa dipecah lagi menjadi subkomponen-komponen dan seterusnya. Hampir semua yang kita pelajari tergantung pada pengetahuan yang telah diperoleh. Untuk mempelajari rancangan pesawat harus mengetahui dahulu terkait aerodinamika dan itu tergantung dari pengetahuan sebelumnya yaitu kalkulus yang membutuhkan pengetahuan tentang aljabar dan tergantung juga pada pengetahuan terkait aritmatika. Sebagai ilustrasi, berikut ini diberikan sebuah eksperimen terkait pembentukan skema dengan menggunakan simbol yang menyerupai bahasa isyarat (Isnawan, 2013).

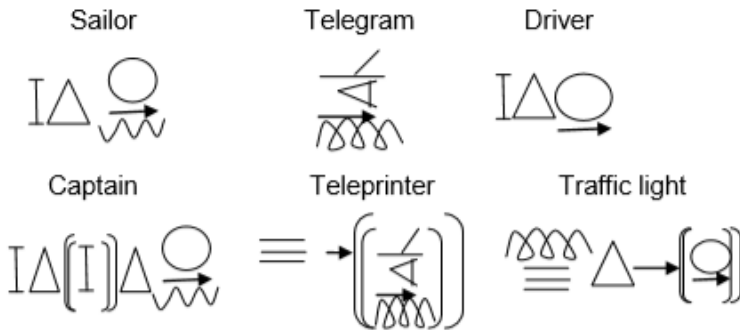
Sebagai ilustrasi, berikut ini diberikan sebuah eksperimen terkait pembentukan skema dengan menggunakan simbol yang menyerupai bahasa isyarat. Pada hari pertama siswa diperkenalkan dengan simbol-simbol dasar yang meliputi:



Pada hari kedua, peserta didik mempelajari pasangan atau gabungan dari tiga simbol. Peserta didik bisa memaknai gabungan dari dua atau tiga simbol berdasarkan simbol-simbol dasar yang telah diberikan.



Pada hari ketiga dan keempat peserta didik mempelajari gabungan simbol yang luas. Pemaknaan simbol tersebut dikaitkan dengan gabungan simbol yang lebih kecil yang diberikan sebelumnya.



Pada hari keempat peserta didik mengerjakan tugas akhir. Mereka mempelajari dua halaman simbol, setiap halaman berisi seratus simbol yang dibagi dalam sepuluh kelompok dan masing-masing kelompok terdiri dari delapan sampai duabelas simbol. Pada halaman pertama, masing-masing kelompok simbol diberi makna yang

berkaitan dengan makna dari kelompok simbol yang lebih kecil, seperti pada contoh yang diberikan. Pada halaman lain terdapat kelompok simbol untuk pembandingan. Kelompok pembandingan dengan simbol yang sama telah dipelajari, tetapi dengan makna yang berbeda, dan telah dibangun dalam skema yang berbeda. Jadi dalam tugas akhir peserta didik, setiap kelompok simbol memiliki skema yang sesuai dengan satu halaman, dan tidak sesuai dengan halaman yang lain. Ini menunjukkan bahwa, makna pembelajaran sebelumnya untuk satu kelompok simbol tidak bermakna untuk yang lain dan sebaliknya (Hill, 2012).

Pada percobaan di atas diketahui bahwa skema yang dibangun pada pembelajaran awal akan sangat penting untuk keberhasilan pembelajaran berikutnya. Penggunaan skema bukan hanya untuk pendekatan belajar pada saat sekarang saja, melainkan mempersiapkan alat mental untuk menerapkan pendekatan yang sama untuk tugas belajar di masa depan.

Dengan susunan hierarki pengetahuan, sebuah tugas bisa dicapai hanya oleh peserta didik yang telah menguasai komponen-komponennya. Gagne memandang bahwa analisis tugas merupakan kunci bagi pengajaran yang efektif untuk mengajarkan tugas apapun. Setidaknya harus dipastikan bahwa semua komponen yang diperlukan

telah dipelajari. Ketika komponen-komponen itu dikuasai intruksi-intruksi yang sederhanaupun bisa jadi akan memadai untuk menjalankan pengerjaan tugas akhir. Meskipun demikian seringkali intruksi - intruksi sederhana tidak cukup untuk presentasi tertentu yang lebih kompleks. Guna menjembatani kesenjangan tersebut, maka diperlukan cara yang tepat untuk menyatukan komponen-komponennya. Upaya semacam ini diperlukan proses penyelesaian yang jelas, memfokuskan perhatian pada komponen-komponen yang diperlukan, mengidentifikasi permasalahan pokoknya dan mengarahkan siswa pada langkah yang benar. Hal ini merupakan program pengajaran yang baik selain memberikan informasi juga menggerakkan peserta didik agar menaiki hierarki menuju level pengetahuan yang semakin tinggi.

Proses kognitif untuk memperoleh pengetahuan baru meliputi akomodasi dan asimilasi. Akomodasi merupakan proses berubahnya skema, hal ini sesuai dengan pendapat Walle (2007) yang menyatakan bahwa akomodasi adalah proses mengubah cara yang ada dalam memandang sesuatu atau gagasan yang berlawanan atau tidak sesuai dengan skema yang ada. Ketika siswa memiliki pengalaman yang tidak konsisten terhadap suatu skema, maka skema tersebut cenderung berubah untuk

mengakomodasi input baru, yaitu membentuk skema baru yang cocok dengan rangsangan yang baru memodifikasi skema yang ada sehingga cocok dengan rangsangan itu. Namun jika skema mempengaruhi interpretasi pengalaman, proses ini disebut dengan asimilasi. Asimilasi adalah proses kognitif yang dengannya siswa mengintegrasikan persepsi, konsep, ataupun pengalaman baru ke dalam skema atau pola yang sudah ada di dalam pikirannya. Asimilasi tidak menyebabkan perubahan melainkan memperkembangkan skemata. Asimilasi merujuk pada penggunaan skema yang ada untuk memberi arti terhadap pengalaman.

C. Kegunaan Skema dalam Pembelajaran Matematika

Pada pembahasan di atas telah dijelaskan bahwa jika skema lama tidak sesuai dengan skema baru maka skema lama tidak akan menyerap skema baru tersebut. Karena perkembangan matematika sangat pesat, maka guru harus menyiapkan siswa agar dapat menyesuaikan diri dengan perkembangan matematika (Isnawan, 2013). Dengan demikian tugas yang seharusnya dilakukan guru saat mengajarkan matematika antara lain:

- 1) Membangun pondasi yang kuat dan terstruktur tentang ide-ide matematika dasar.
- 2) Membimbing peserta didik menemukan ide-ide baru.

3) Mengajarkan peserta didik untuk selalu menyesuaikan skema lama dengan skema baru.

Contoh penggunaan skema dalam pembelajaran matematika:

Menyelesaikan operasi hitung penjumlahan pada pecahan $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \dots$

Sebelum guru memberi petunjuk cara pengerjaan operasi hitung penjumlahan bilangan pecahan, peserta didik dengan skema lama yaitu pengetahuannya tentang penjumlahan pada bilangan bulat, akan menyelesaikan operasi hitung tersebut dengan cara menjumlahkan pembilang dengan pembilang dan menjumlahkan penyebut dengan penyebut.

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{4+2} = \frac{4}{6}$$

Penyelesaian di atas adalah salah karena dalam menjumlahkan pecahan biasa terjadi proses akomodasi terhadap skema lama penjumlahan bilangan bulat. Dalam hal ini guru sangat berperan dalam membimbing siswa untuk menemukan ide-ide baru sehingga akan terbentuk konsep baru cara menyelesaikan penjumlahan pada pecahan tersebut, yaitu dengan menyamakan penyebut,

dengan cara mengalikan kedua penyebut dalam pecahan tersebut, sehingga diperoleh:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{6}{8} + \frac{4}{8} = \frac{10}{8}$$

Penyelesaian penjumlahan pecahan tersebut juga bisa diselesaikan dengan cara lain. Jika kita menginginkan skema yang tepat dan dapat disimpan dalam memori jangka panjang maka penjumlahan pecahan tersebut juga dapat diselesaikan dengan menggunakan perhitungan KPK dari kedua penyebutnya. Hasil KPK dari 4 dan 2 adalah 4, sehingga diperoleh:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

D. Memahami Gagasan dari Skema

Menurut Walle (2007) pemahaman didefinisikan sebagai ukuran kualitas dan kuantitas hubungan suatu gagasan dengan gagasan yang telah ada. Pemahaman tergantung pada gagasan yang sesuai yang telah dimiliki dan tergantung pada pembuatan hubungan baru antar gagasan. Puncak pemahaman berisi hubungan yang sangat banyak. Gagasan yang dipahami dihubungkan dengan banyak gagasan yang lain oleh jaringan konsep dan prosedur yang bermakna.

Untuk melihat bagaimana pemahaman peserta didik, sebagai contohnya dapat dilihat dengan cara melakukan perhitungan untuk penjumlahan dan pengurangan bilang-bilangn dua atau tiga digit. Apa yang mungkin berbeda ketika siswa menjumlahkan 37 dan 28? Bagi para peserta didik yang memahami 37 hanya didasarkan pada proses membilang, dimungkinkan mencari jumlah dengan menggunakan benda-benda dan membilang seluruh benda. Seorang peserta didik yang telah belajar puluhan dan satuan tetapi dengan yang pemahaman terbatas mungkin akan menggunakan pendekatan tradisional ditulis dalam dua baris dengan rata lalu mulai menjumlahkan 7 dan 8. Sehingga peserta didik mungkin akan menuliskan 15 dan akhirnya memperoleh jawaban akhirnya 515. Bagi peserta didik yang memahami bahwa bilangan-bilangan dapat dipecah-pecah dalam banyak cara, yang memahami bahwa dari 38 ke 40 adalah sama dengan dari 8 ke 10, atau yang dapat melihat bahwa jumlah dua bilangan tetap sama jika peserta didik menambah salah satu bilangan dan mengurangi dengan bilangan sama pada bilangan yang lain. Peserta didik mungkin akan menjumlahkan 30 dan 20 dan menggabungkan penjumlahan 8 dan 7. Mungkin juga peserta didik akan

menjumlahkan 37 dengan 30 kemudian mengurangnya dengan 2 dan mungkin juga dengan cara-cara yang lain.

Berdasarkan contoh tersebut dapat terlihat bagaimana tiap-tiap peserta didik mengembangkan gagasan yang berbeda tentang pengetahuan yang sama, sehingga peserta didik mempunyai pemahaman yang berbeda-beda. Pada kasus aturan perhitungan tradisional, resikonya adalah peserta didik belajar aturan dengan benar tetapi tidak memiliki atau hanya memiliki pemahaman yang terbatas tentang mengapa aturan tersebut berlaku. Banyak peserta didik belajar aturan tanpa makna yang dikaitkan dengan rasio yang merupakan upaya merelasikan antar gagasan. Oleh karenanya dalam proses pembelajaran perlu ditekankan pada pemahaman relasional.

Pemahaman relasional membuat usaha yang dilakukan tidak hanya bermanfaat tapi juga penting. Berikut beberapa keuntungan-keuntungan dari pemahaman relasional:

- 1) Meningkatkan Ingatan

Pembelajaran secara relasional hanya sedikit kemungkinan informasi yang diperoleh akan hilang. Informasi yang berkaitan akan tersimpan lebih lama dan untuk mendapatkan informasinya kembali akan lebih mudah.

2) Sedikit Mengingat

Gagasan besar merupakan jaringan yang memuat sekumpulan konsep-konsep yang saling berhubungan. Jaringan yang dibuat sedemikian baik sehingga semua bagian informasi dapat tersimpan dan dapat ditemukan kembali sebagai satu kesatuan dan bukan merupakan bagian-bagian yang terpisah.

3) Membantu Mempelajari Konsep dan Cara Baru

Sebuah gagasan yang secara lengkap dipahami lebih mudah diperluas untuk memahami gagasan baru.

4) Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Soal

Walle (2007) menyatakan bahwa penyelesaian soal baru memerlukan transfer-transfer gagasan yang dipelajari dalam suatu konteks ke situasi yang baru. Bila konsep-konsep disimpan dalam jaringan yang kaya kemampuan pentransferan dan pemecahan soal dapat ditingkatkan secara signifikan.

5) Membangun Sendiri Pemahaman

Semakin luas pemahaman dan lebih terstruktur maka sangat mungkin memperoleh penemuan-penemuan yang menghasilkan pemahaman baru. Menurut Skemp (Walle, 2007) jika memperoleh pengetahuan merupakan hal yang menyenangkan maka orang-orang yang telah mempunyai pengetahuan

memperoleh pengetahuan kemungkinan besar akan menemukan sendiri gagasan baru, khususnya ketika menghadapi situasi pemecahan masalah.

6) Memperbaiki Sikap dan Rasa Percaya Diri

Pemahaman relasional mempunyai pengaruh afektif dan kognitif. Gagasan yang dipahami dan dimengerti dengan baik akan mengembangkan konsep diri yang positif bagi peserta didik yakni kecakapan untuk belajar dan memahami pelajaran. Membangun sesuatu dalam dunia nyata diperlukan alat-alat, bahan, dan usaha. Begitu pula dengan mengkonstruksi suatu ide, alat-alat yang diperlukan untuk membangun pemahaman adalah gagasan yang telah ada, yakni pengetahuan yang telah dimiliki. Material yang digunakan adalah sesuatu yang dilihat, didengar, atau yang disentuh. Terkadang sebagian material adalah pemikiran atau gagasan kita sendiri. Usaha yang harus dilakukan adalah berpikir secara aktif dan reflektif. Mengkonstruksi pengetahuan dengan pemikiran reflektif yaitu secara aktif memikirkan suatu ide, yakni mengubah melalui gagasan yang ada untuk mencari gagasan yang kiranya paling berguna untuk memberi arti terhadap gagasan baru. Sebagai contoh: Seorang guru mengajukan masalah dengan meminta peserta

didik untuk menjumlahkan 100 bilangan asli yang pertama. Jika siswa tersebut menjumlahkan angka 1,2,3...100 maka akan menyita waktu yang cukup lama untuk menemukan jawabannya, akan tetapi dengan berpikir reflektif, maka peserta didik akan menemukan jawaban dengan waktu yang cepat.

Memahami masalah: bilangan 1, 2, 3, 100 akan dijumlahkan dengan demikian masalah yang muncul adalah $1 + 2 + 3 + \dots + 100$?

Merencanakan penyelesaian: salah satu strategi yang diterapkan adalah mencari kemungkinan adanya satu pola. Untuk menyelesaikan masalah ini bila dilakukan pola seperti:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = x \text{ (Persamaan 1)}$$

$$100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 = x \text{ (Persamaan 2)}$$

Menyelesaikan masalah: Jika ke-2 persamaan dijumlahkan maka kita menemukan suatu pola yaitu terdapat 100 pasang bilangan yang berjumlah 101

$$101 + 101 + 101 + \dots + 101 = 2x$$

Karena banyaknya bilangan asli adalah 100, maka:

$$101 \times 100 = 2x$$

$$x = 10100/2 = 5050$$

Memeriksa Kembali: metode yang digunakan secara matematika sudah benar. Sebab penjumlahan dapat dilakukan dalam urutan yang berbeda dan perkalian adalah penjumlahan yang berulang.

Jika masalah umum muncul, tentukanlah jumlah n bilangan asli yang pertama: Dengan n bilangan asli, maka cara seperti sebelumnya dapat digunakan: $1 + 2 + \dots + n-1 + n = x$

$$n + n - 1 + \dots + 2 + 1 = x$$

Pasangan bilangan yang masing-masing berjumlah sebanyak $n + 1$ sebanyak n maka dengan demikian jumlah keseluruhan didapat:

$$(n + 1) \times n = 2x$$

$$x = n/2 (n + 1).$$

E. Pembelajaran dengan Meningkatkan Pemahaman

Mengajar bukan hanya upaya mentransfer informasi kepada peserta didik dan bukan secara pasif menyerap informasi dari buku atau guru. Mengajar yaitu membantu peserta didik mengkonstruksi gagasan peserta didik sendiri dengan menggunakan gagasan yang telah peserta didik miliki. Berbagai cara dapat dilakukan sebagai upaya untuk meningkatkan pemahaman peserta didik yaitu dengan

pengaturan kelas dan suasana sosial yang dibuat dalam kelas. Ada tiga faktor yang mempengaruhi pembelajaran di dalam kelas (Walle, 2007), yaitu:

- 1) Berpikir reflektif peserta didik
- 2) Interaksi sosial dengan peserta didik lain dan guru
- 3) Penggunaan model atau alat-alat untuk belajar (peraga, penggunaan simbol, komputer, menggambar, dan bahasa lisan)

Berpikir reflektif melibatkan beberapa bentuk kegiatan mental. Berpikir reflektif merupakan kegiatan yang aktif dan perlu usaha yang meliputi menjelaskan sesuatu atau mencoba menghubungkan gagasan yang terkait. Berpikir reflektif terjadi pada saat peserta didik mencoba memahami penjelasan dari orang lain, ketika peserta didik bertanya, dan ketika peserta didik menjelaskan atau menyelidiki kebenaran gagasan peserta didik sendiri. Agar peserta didik dapat merefleksikan gagasan yang peserta didik pelajari dan menghubungkan ke dalam jaringan ide, maka peserta didik harus dilibatkan untuk berpikir. Peserta didik harus menemukan gagasan relevan yang peserta didik miliki dan membawanya untuk menunjang pengembangan gagasan baru.

Seorang pengajar bukan hanya meminta peserta didik berpikir dan mengharapkan peserta didik memikirkan

gagasan baru, yang menjadi tantangan adalah bagaimana peserta didik terlibat berpikir. Kunci penting agar peserta didik dapat berpikir reflektif adalah dengan melibatkan peserta didik dalam soal yang menuntut peserta didik untuk menggunakan gagasan yang peserta didik miliki untuk memecahkan soal dan membuat gagasan baru. Pendekatan pemecahan soal bukan hanya memerlukan jawaban tetapi juga penjelasan dan penyelidikan atas jawaban. Peserta didik diminta menjelaskannya baik dalam diskusi dengan teman sekelasnya maupun dalam bentuk tulisan.

Berpikir reflektif menjadi lebih meningkat ketika peserta didik terlibat dengan pekerjaan peserta didik yang lain. Suasana interaktif merupakan kesempatan terbaik bagi peserta didik untuk belajar. Sehingga mengubah kelas menjadi “komunitas pelajar” atau lingkungan dimana sesama peserta didik dan guru saling berinteraksi dengan berbagi gagasan dan penyelesaian, membandingkan dan menilai cara yang digunakan, menyelidiki kebenaran jawaban, dan banyak hal lainnya akan sangat menunjang untuk meningkatkan kemampuan siswa dalam berpikir reflektif.

Menurut Bell (1981), ada empat ciri dari budaya kelas matematika yang produktif menurut sebuah buku yang berjudul *'Making Sense'* dimana para peserta didik dapat

belajar dari peserta didik yang lain dan juga dari kegiatan reflektif peserta didik, adapun empat ciri tersebut adalah:

- 1) Gagasan adalah penting, tidak peduli milik siapa gagasan tersebut. Para peserta didik dapat memiliki gagasannya sendiri dan membaginya dengan yang lain. Secara serupa peserta didik juga perlu memahami bahwa peserta didik dapat juga belajar dari gagasan yang telah diformulasikan oleh orang lain. Belajar matematika adalah memahami gagasan dari komunitas matematika.
- 2) Gagasan harus dipahami bersama-sama di dalam kelas. Setiap peserta didik harus menghargai gagasan dari temannya dan mencoba menilai dan memahaminya. Menghargai gagasan yang telah disampaikan oleh orang lain sangat penting dalam diskusi.
- 3) Kepercayaan harus dibangun dengan pemahaman bahwa membuat kesalahan tidak menjadi permasalahan. Para peserta didik harus menyadari bahwa kesalahan adalah kesempatan untuk berkembang. Semua peserta didik harus percaya bahwa gagasan peserta didik akan sampai kepada kesimpulan benar atau salah. Tanpa kepercayaan ini tidak akan pernah terjadi pertukaran ide.

4) Para peserta didik harus memahami bahwa matematika dapat dipahami atau masuk akal. Sebagai akibatnya kebenaran suatu hasil didasarkan pada matematika sendiri. Bukan guru atau pihak lain yang memutuskan kebenaran jawaban peserta didik.

Faktor lainnya yang mempengaruhi pembelajaran adalah penggunaan model-model atau alat-alat belajar. Benda-benda fisik atau manipulatif untuk memodelkan konsep-konsep matematika merupakan alat-alat yang penting untuk membantu siswa belajar matematika. Model untuk sebuah konsep matematika merujuk pada sebarang objek atau gambar yang menyatakan konsep matematika tersebut atau yang padanya hubungan konsep dapat dikaitkan. Konsep-konsep matematika yang sedang dalam proses pengkonstruksian oleh peserta didik bukanlah gagasan yang telah baik seperti yang dipahami oleh orang dewasa. Gagasan baru diformulasikan sedikit demi sedikit seiring berjalannya waktu. Saat siswa secara aktif memikirkan gagasannya sendiri, peserta didik sebenarnya sedang menguji gagasan tersebut dengan berbagai cara. Berbicara berdasarkan sebuah ide, memberi alasan suatu pendapat, mendengarkan orang lain, menggambarkan, dan menjelaskan semuanya merupakan kegiatan mental yang aktif untuk menguji gagasan yang muncul. Sembari

berjalannya proses pengujian gagasan ini, gagasan yang dikembangkan termodifikasi dan teruraikan dan selanjutnya terintegrasi dengan gagasan yang telah ada. Jika ada kecocokan dengan kenyataan di luar maka kemungkinan besar gagasan tersebut benar.

Model dapat memainkan peran yang sama untuk menguji gagasan yang muncul, model dapat dipikirkan sebagai mainan pemikir (*thinker toys*), mainan penguji (*tester toys*), dan mainan pembicara (*talker toys*). Sulit bagi siswa untuk berbicara dan menguji tentang hubungan abstrak hanya dengan menggunakan kata-kata. Model memberi suatu kepada peserta didik untuk berpikir, mengungkap, berbicara, dan memberi alasan.

Beberapa penggunaan model dalam pemahaman konsep misalnya:

- 1) Konsep 'enam' adalah hubungan antara himpunan yang dapat dipasangkan dengan satu, dua, tiga, empat, lima, enam. Mengubah himpunan pembilang dengan menambah satu berarti mengubah hubungan. Perbedaan antara himpunan yang berisi 6 dan 7 adalah hubungan "satu lebih dari". Model yang bisa digunakan untuk konsep ini adalah objek terhitung, misalnya kancing dan kelereng.

- 2) Konsep 'persegi panjang' memuat hubungan ruang dan panjang. Sisi yang berhadapan adalah sama panjang dan sejajar dan sisi-sisi yang berdekatan berpotongan tegak lurus. Model yang bisa digunakan untuk memahami konsep ini adalah papan bertitik.

Model-model seharusnya selalu tersedia bagi peserta didik untuk dipilih dan digunakan secara bebas. Berbagai macam model seharusnya tersedia untuk membantu peserta didik memahami sebuah gagasan yang penting. Siswa harus disarankan untuk memilih dan menggunakan model untuk membantu peserta didik memecahkan soal atau menjelaskan sebuah gagasan kepada kelompoknya.

RANGKUMAN

- ❖ **Skema** adalah perangkat mental/struktur-struktur konsep untuk mengintegrasikan pengetahuan yang ada dalam memperoleh pengetahuan baru.
- ❖ **Akomodasi** adalah proses mengubah cara yang ada dalam memandang sesuatu atau gagasan yang berlawanan atau tidak sesuai dengan skema yang ada.
- ❖ **Asimilasi** adalah proses kognitif yang dengannya peserta didik mengintegrasikan persepsi, konsep, ataupun pengalaman baru ke dalam skema atau pola yang sudah ada di dalam pikirannya. Asimilasi tidak menyebabkan perubahan melainkan memperkembangkan skemata.
- ❖ Tugas yang seharusnya dilakukan guru saat mengajarkan matematika antara lain:
 1. Membangun pondasi yang kuat dan terstruktur tentang ide-ide matematika dasar.
 2. Membimbing peserta didik menemukan ide-ide baru.
 3. Mengajarkan peserta didik untuk selalu menyesuaikan skema lama dengan skema baru.

- ❖ Beberapa keuntungan-keuntungan dari pemahaman relasional: meningkatkan ingatan, sedikit mengingat, membantu mempelajari konsep dan cara baru, meningkatkan kemampuan pemecahan soal, membangun sendiri pemahaman, memperbaiki sikap dan rasa percaya diri.
- ❖ Ada tiga faktor yang mempengaruhi pembelajaran di dalam kelas (Walle, 2007), yaitu:
 1. Berpikir reflektif peserta didik.
 2. Interaksi sosial guru dengan peserta didik.
- ❖ Penggunaan model atau alat-alat untuk belajar (peraga, penggunaan simbol, komputer, menggambar, dan bahasa lisan)

Latihan Soal 3.1

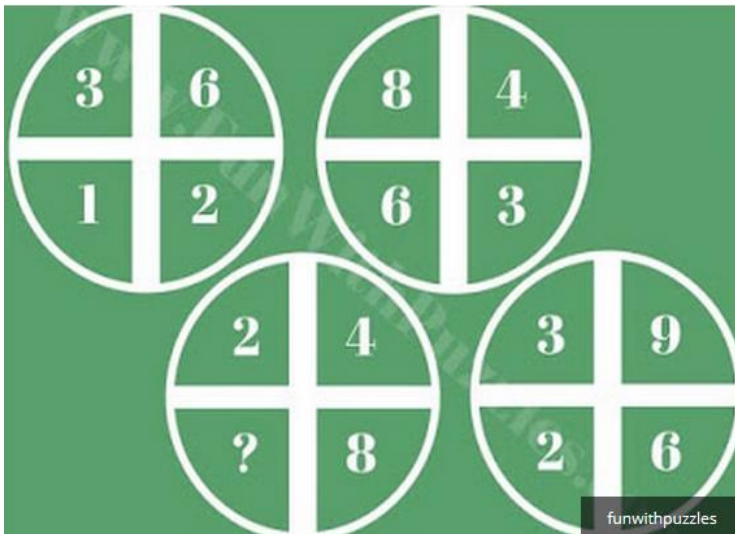
Pertemuan ke-6 (*untuk mengetahui kemampuan analisis mahasiswa dalam memahami materi tentang gagasan skema matematika*)

1. Jelaskan pengertian skema sebagai alat pembelajaran!
2. Jelaskan kegunaan skema dalam pembelajaran matematika!

3. Bagaimana cara memahami gagasan dari sebuah skema!
4. Jelaskan ciri dari budaya kelas matematika yang produktif!
5. Bagaimana suatu pembelajaran dapat meningkatkan pemahaman!

QUIS!

Temukan angka yang hilang!



BAB 4

KECERDASAN INTUITIF DAN REFLEKTIF

Kecerdasan erat kaitannya dengan kemampuan kognitif yang dimiliki oleh seorang individu. Ketika kita berpikir seseorang sangat pandai dalam bidang tertentu atau tahu banyak tentang hal itu, kita dapat mengatakan bahwa ia cerdas. Kita asumsikan bahwa setiap orang lahir dengan sejumlah kemampuan mental, yang secara genetik kita warisi dari orang tua. Anggaplah faktor genetik itu mempengaruhi kemampuan kita. Dengan kata lain, ada orang yang cerdas, dan beberapa orang tidak. Namun perlu disadari bahwa setiap manusia lahir dengan dibekali perangkat berpikir yaitu otak. Otak manusia memiliki wilayah-wilayah kecerdasan, ini berarti sepanjang anak manusia terlahir dengan memiliki otak, maka ia memiliki potensi untuk menjadi cerdas. Akan tetapi yang membuat setiap orang memiliki kemampuan yang berbeda adalah

pemberian perlakuan atau stimulus positif pada masing-masing wilayah kecerdasan (DePorter, 1999).

Contoh, seorang peserta didik yang berprestasi semenjak sekolah dasar belum tentu dia akan berhasil pada jenjang yang lebih tinggi. Sebaliknya, peserta didik yang kurang berhasil di sekolah dasar mungkin akan berhasil di jenjang yang lebih tinggi. Semua ini bukan hanya ditentukan kecerdasan kognitif yang ia miliki tetapi lebih kepada sikap peserta didik tersebut terhadap kecerdasan yang dia punya.

Otak yang cerdas adalah otak yang mampu menjalankan fungsinya sebagai pemikir, bukan otak yang hanya pandai merekam kejadian saja, dimana seseorang itu tidak mampu menghasilkan hikmah dari satu kejadian yang masuk lewat inderanya. Hal inilah yang menyebabkan kita harus mengenal apa yang dimaksud sebagai kecerdasan intuitif dan kecerdasan reflektif. Sebagai gambaran awal tentang kecerdasan intuitif dan reflektif adalah sebuah cerita yang dimuat di dalam Al-Qur'an yang menceritakan dialog antara Nabi Musa AS dan Nabi Khidir AS ketika Nabi Musa merasa menjadi orang yang paling pintar kemudian beliau bertanya kepada Allah SWT, sehingga Allah menunjukkan bahwa ada orang yang lebih pintar dari Nabi Musa AS yakni Nabi Khidir AS.

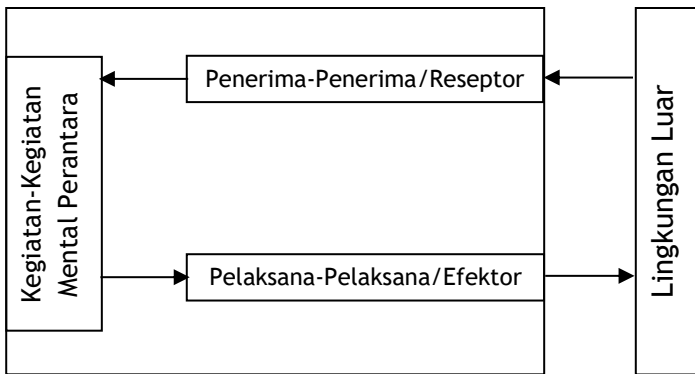
A. Pengertian Kecerdasan Intuitif dan Kecerdasan Reflektif

Istilah intuisi memiliki banyak pengertian. Ada yang mengartikannya sebagai kapasitas batin yang membuat kita mengetahui sesuatu ketika pikiran kita tidak mengetahuinya. Intuisi adalah kemampuan untuk mengetahui sesuatu tanpa melalui proses *reasoning* atau *conscious analyzing* hingga kita bisa menjawab "*what to do*".

Intuisi juga diartikan sebagai Alam Bawah Sadar (*The Unconscious Mind*) atau sesuatu yang kita lakukan tanpa proses berpikir secara sadar atau sudah menjadi kebiasaan. Ini seperti layaknya seorang sopir kendaraan yang mengetahui sesuatu tentang kendaraannya di jalan secara otomatis tanpa proses menemukan fakta logis lebih dahulu, misalnya mengukur besar-kecilnya tekanan udara ban mobil atau harus ke kanan atau kiri.

Pada tingkat intuitif, kita menyadari bahwa melalui reseptor/alat indera (terutama penglihatan dan pendengaran), kita dapat mengetahui lingkungan luar. Hal ini dikarenakan, secara otomatis data tersebut diklasifikasikan dan dihubungkan dengan data serupa yang sudah ada. Dengan otot-otot yang dimiliki, kita dapat menggerakkan kerangka untuk berbuat pada lingkungan luar. Aktivitas ini banyak dikontrol dan diarahkan oleh

umpan balik, selanjutnya informasi mengenai kemajuan dan hasilnya dapat diketahui melalui reseptor luar. Dalam banyak kasus, hal tersebut dapat berhasil tanpa adanya kesadaran. Misalnya, ketika membaca dengan suara keras, mengemudikan mobil, atau menjawab pertanyaan 12 x 25 (Skemp, 1971).



Gambar 4. 1 Skema Kecerdasan Intuitif

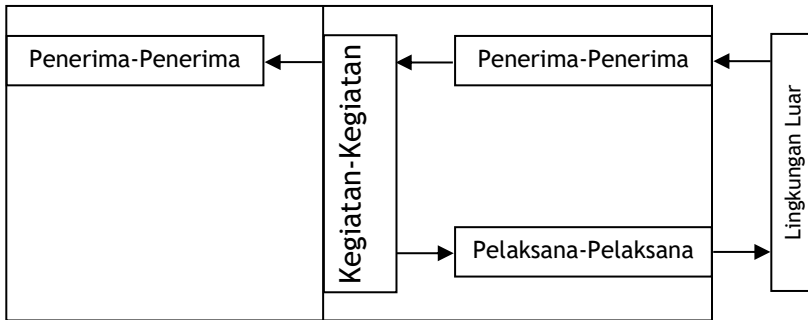
Kecerdasan intuitif merupakan kemampuan untuk memunculkan dan menyeleksi ide/konsep/skema yang sudah kita ketahui untuk merespons stimulus secara otomatis dan spontan dengan tingkat akurasi yang tinggi. Kecerdasan ini mencerminkan peran pengetahuan dalam membantu kita untuk memutuskan dan bertindak lebih efektif. Ketika kita pertama kali menyelesaikan permasalahan matematika yang masih baru, kita mungkin

bergerak perlahan karena kita tidak yakin terhadap solusi yang mungkin. Tetapi ketika kita berpengalaman dengan soal yang bervariasi maka akan lebih mudah bagi kita untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Dengan kata lain, intuisi yang dilatih dari pengalaman membuat kita cerdas (Schwartz & Perkins, 1989).

Sebagai contoh seorang penumpang yang masih belajar bertanya kepada kita mengapa kita memindahkan persnelling sebelum mencapai belokan tajam di jalan. Walaupun kita telah berbuat begitu “tanpa berpikir”, kita tidak kesulitan untuk menjelaskan alasan tersebut. Atau menjawab sesingkat “300” pada pertanyaan “ 12×25 ” yang mungkin ditanyakan kepada kita “Bagaimana anda melakukan hal itu begitu cepat?” Dan setelah kita menguraikan cara kita (banyak pilihan) kita mungkin juga diminta untuk membenarkan sebuah pertanyaan yang dicari dengan sifat asosiatif dari perkalian.

Selanjutnya pada tingkat reflektif, aktivitas mental yang berintervensi itu menjadi objek kesadaran untuk introspeksi/mawas diri. Schwartz & Perkins (1989) mendefinisikan kecerdasan reflektif adalah kemampuan untuk menyadari kebiasaan mentalnya dan kemampuan untuk mentransendensikan pola-pola yang terbatas,

dengan kata lain kemampuan untuk memikirkan cara berpikir.

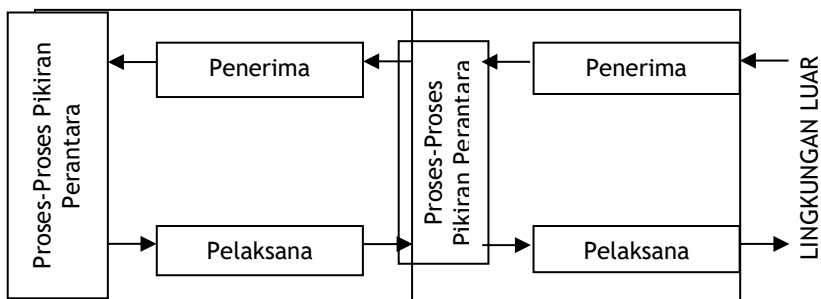


Gambar 4. 2 Skema Kecerdasan Reflektif

Sekalipun kita mampu berpikir untuk merefleksikan ke suatu tingkatan tertentu dengan skema-skema kita sendiri, langkah-langkah penting lebih lanjut dapat dilakukan. Kita dapat mengkomunikasikannya seperti dalam contoh sebelumnya. Kita dapat menyusun skema-skema baru. Seseorang yang sebelumnya tidak dapat mengerjakan 12×25 , setelah dijelaskan bahwa empat kali dua puluh lima adalah seratus, tidak hanya akan dapat mengerjakan 12×25 dengan memikirkannya sebagai $3 \times (4 \times 25)$ yang sama dengan 3×100 , tapi dapat juga mengerjakan perkalian lain seperti 24×25 dan bahkan 25×25 . Jika ia dapat mengerjakan ini semua, itu menunjukkan bahwa dia telah mendapatkan sebuah skema sederhana dan

tidak semata-mata hanya suatu jawaban atas pertanyaan tertentu.

Kita dapat mengganti skema-skema lama dengan skema-skema baru. Kita dapat membenarkan kesalahan-kesalahan di skema-skema yang ada. Jika kita bilang “saya tahu apa yang saya lakukan salah”. Ini tidak hanya berarti membayangkan cara kita yang ada tetapi juga penemuan bagian-bagian tertentu didalamnya yang menyebabkan kesalahan yang nantinya akan diikuti sebuah perubahan yang menjadikannya benar (Skemp, 1971).



Gambar 4. 3 Skema Kecerdasan Reflektif Lebih Lanjut

B. Mengembangkan Kecerdasan Intuitif dan Reflektif

Sebelum kita membahas bagaimana cara mengembangkan kecerdasan intuitif dan reflektif, kita perlu mengetahui kaitannya kecerdasan intuitif dan reflektif pada skema. Data-data yang diperlukan untuk menjawab seluruh pertanyaan, tidak datang dari lingkungan, tetapi dari sistem

konseptual kita sendiri. Perhatian kita arahkan pada sumber data, sehingga dengan begitu kita akan mudah dan terbiasa mampu melakukan aktivitas secara refleksi. Berikut ini dua contoh karya Piaget:

Contoh: 1

Weng (7 tahun)

Guru : "Sebuah meja panjangnya 4 meter, kemudian 3 meja disusun memanjang. Berapa panjang meja sekarang?"

Weng : "12 meter"

Guru : "Bagaimana kamu menghitungnya?"

Weng : "Saya menambahkan 2 dan 2 dan 2 dan 2 dan 2, dan 2"

Guru : "Mengapa 2? Mengapa tidak mengambil bilangan lain?"

Contoh 2

Gath (7 tahun)

Guru : "Jika akan dibagikan 9 apel kepada 3 anak, maka berapa banyak apel yang diterima setiap anak?"

Gath : "Tiga buah"

Guru : "Bagaimana kamu menghitungnya?"

Gath : "Saya mencoba berpikir"

Guru : "Apa?"

Gath : "Saya mencoba berpikir di kepala"

Guru : "Apa yang dipikirkan di kepalamu?"

Gath : “Saya menghitung... Saya mencoba melihat bagaimana itu terjadi dan akhirnya saya menemukan 3”

Dengan mengetahui kemampuan anak mengerjakan suatu hal, maka kita dapat mengetahui bagaimana dia mengerjakan hal lain. Setelah kita mampu memikirkan pada skema kita sendiri, langkah penting selanjutnya dapat diambil, yaitu mengkomunikasikannya dan mempersiapkan skema baru. Seseorang anak mungkin tidak dapat menyelesaikan 16×25 secara cepat, tetapi setelah diberi petunjuk bahwa 16×25 dapat ditulis menjadi $4 \times (4 \times 25) = 4 \times 100$ maka dimungkinkan dapat langsung menemukan jawabannya yaitu 400. Sehingga dengan cara yang sama, diharapkan anak juga dapat menyelesaikan perkalian lain seperti 24×25 secara cepat, bahkan menyelesaikan 25×25 . Jika seorang anak dapat menyelesaikan semua itu, ini akan menunjukkan bahwa anak tersebut telah mencapai skema sederhana dan tidak sekedar jawaban atas pertanyaan tertentu (Hamdi, 2012).

Kita dapat membenahi kesalahan dalam skema yang ada. Jika kita mengatakan “Saya melihat kesalahan yang saya lakukan”. Ini berarti kita tidak hanya berpikir pada metode yang kita gunakan, tetapi kita berusaha menemukan detail-detail khusus didalamnya yang

menyebabkan kegagalan, yang biasanya diikuti dengan perubahan detail-detail itu. Berikut ini contoh yang melibatkan aktivitas reflektif. Seseorang ingin mengetahui bagaimana mengalikan dua pecahan desimal, misalnya 1,2 dan 0,57. Maka kita dapat menerangkan bahwa titik desimal dapat dihilangkan terlebih dahulu, kemudian mengalikan 12 dan 57 dengan cara biasa dan kemudian baru koma desimalnya dimasukkan kembali dengan menghitung jumlah seluruh angka di belakang koma desimal ($12 \times 57 = 684$). 1,2 punya satu angka di belakang koma desimal. 0,57 punya dua; jumlah tiga. Jadi kita masukkan kembali koma desimal pada hasilnya dan mendapat tiga angka di belakang koma desimal. Hasil 0,684. Aturan ini memungkinkan anak mendapatkan jawaban benar, tetapi siswa tidak mengetahui pengertian notasi desimal. Untuk menjelaskan notasi desimal, kita dapat menulis kembali pecahan desimal tersebut ke dalam pecahan biasa, sebagai berikut:

$$1,2 \times 0,57 = \frac{12}{10} \times \frac{57}{100} = \frac{684}{1000} = 0.684$$

Pada penyebut terdapat angka 10 dan 100. Banyaknya 0 pada penyebut itu sama dengan banyaknya angka di belakang titik desimal. Perkalian penyebut setara dengan penambahan banyaknya 0 dan juga setara dengan penambahan banyaknya tempat desimal. Setelah

menyelesaikan perkalian tersebut, kita dapat melangkah ke bagian selanjutnya, tanpa disadari kita telah menggunakan metode komunikasi, kemudian kita dapat memutuskan metode yang lebih baik. Sehingga kita akan dapat mengkomunikasikan skema perkalian desimal.

Salah satu hal yang penting dalam mengembangkan kecerdasan reflektif adalah komunikasi. Komunikasi muncul sebagai salah satu pengaruh yang menguntungkan pada perkembangan kecerdasan reflektif. Di dalamnya perlu ada kaitan antara ide dengan simbol-simbol. Selain itu, adanya interaksi ide-ide seseorang dengan ide-ide orang lain, yaitu menjelaskan ide-ide dalam pikiran seseorang, menyebutnya dengan istilah-istilah yang tidak menimbulkan salah paham, menyatakan hubungannya dengan ide-ide lain; memodifikasi kelemahan pihak lain dan akhirnya mendapatkan struktur yang lebih kuat dan lebih kohesif dibandingkan sebelumnya. Sehingga diskusi merupakan salah satu aktivitas yang mendukung pengembangan kecerdasan reflektif.

Berdasarkan contoh-contoh sebelumnya, kita bisa melihat bahwa kecerdasan reflektif selalu mengiringi kecerdasan intuisi. Intuisi berasal dari hal-hal yang kita ketahui, pola yang kita kenali yang memandu kita secara otomatis dan spontan dalam merespons stimulus. Ketika

intuisi sudah muncul maka ada kecenderungan untuk memikirkan kembali respons yang sudah dilakukan, dengan kata lain merefleksikan kembali cara berpikirnya.

Ketika kita sudah sanggup melakukan sesuatu dengan cepat (tanpa perlu berpikir keras, panjang dan lama) dan tingkat akurasi yang tinggi (*The unconsciously skilled*), maka tingkat keahlian kita sudah tinggi levelnya, Stephen R. Covey, menyebutnya sebagai habit. Untuk melatih habit, maka syaratnya harus tiga, yaitu: (a) mengasah keterampilan; (b) menambah pengetahuan; dan (c) memiliki keinginan yang kuat.



Gambar 4.4 Melatih Kebiasaan

Dominasi Intuisi dalam pengambilan keputusan, dapat mengakibatkan beberapa hal berikut (Krutetskii, 1976):

- 1) *Hasty : make snap judgments without taking time to consider the situation fully.*
- 2) *Narrow : focus only on a small area that we think we know well or feel comfortable with.*
- 3) *Fuzzy : look at a situation without clarity, discrimination, or synthesis of deeper insight.*
- 4) *Sprawling : jump from idea to idea without organization or connectedness.*

Sehingga dalam hal ini dibutuhkan kecerdasan reflektif yang mampu mengatur dan mengontrol kecerdasan intuisi. Kecerdasan reflektif tidak terpisah dari kecerdasan intuitif. Jika kita terjebak dalam kesalahan berpikir di atas, maka kita butuh waktu untuk berpikir lebih, berpikir lebih jernih dan mendalam serta menyusun cara berpikir yang kesemua itu adalah kecerdasan reflektif.

Salah satu hal yang penting dalam mengembangkan kecerdasan reflektif adalah komunikasi. Komunikasi muncul sebagai salah satu pengaruh yang menguntungkan pada perkembangan kecerdasan reflektif. Di dalamnya perlu ada kaitan antara ide dengan simbol-simbol. Selain itu, adanya interaksi ide-ide seseorang dengan ide-ide

orang lain, yaitu menjelaskan ide-ide dalam pikiran seseorang, menyebutnya dengan istilah-istilah yang tidak menimbulkan salah paham, menyatakan hubungannya dengan ide-ide lain, memodifikasi kelemahan pihak lain, dan akhirnya mendapatkan struktur yang lebih kuat dan lebih kohesif dibandingkan sebelumnya. Sehingga diskusi merupakan salah satu aktivitas yang mendukung pengembangan kecerdasan reflektif.

C. Kecerdasan Intuitif dan Kecerdasan Reflektif dalam Pembelajaran Matematika

Jenis aktivitas reflektif yang jangkauannya lebih jauh adalah aktivitas yang mengarah pada generalisasi matematis. Dalam perkalian pangkat, kita dapat melakukan secara langsung maupun melalui berberapa tahapan. Contohnya sebagai berikut:

$$a^2 = a \times a \quad (\text{dimana } a \text{ adalah sebarang bilangan})$$

$$a^3 = a \times a \times a$$

$$a^4 = a \times a \times a \times a, \text{ dan seterusnya}$$

Nampak bahwa:

$$a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a)$$

$$= a \times a \times a \times a \times a$$

$$= a^5$$

Secara intuitif, kita akan mempunyai skema untuk menyelesaikan perkalian bilangan berpangkat secara langsung. Contohnya:

$$a^5 \times a^7 = a^{12}$$

Dengan menggunakan metode perkalian pecahan, maka kita dapat menyusun skema untuk menyelesaikan pembagian bilangan berpangkat, seperti contoh berikut:

$$a^5 \div a^2 = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a \times a = a^3$$

Secara intuitif, kita akan mempunyai skema untuk menyelesaikan pembagian bilangan berpangkat secara langsung. Contohnya:

$$a^{15} \div a^6 = a^9$$

Dari dua skema di atas, kita dapat membentuk rumus umum, sebagai berikut:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

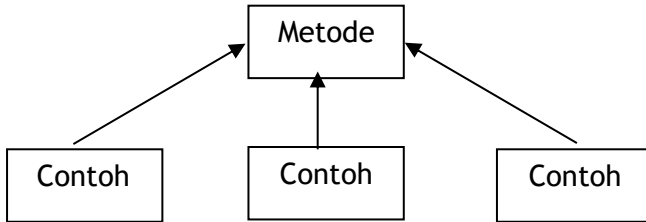
$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Dimana m dan n harus bilangan asli dan $m > n$

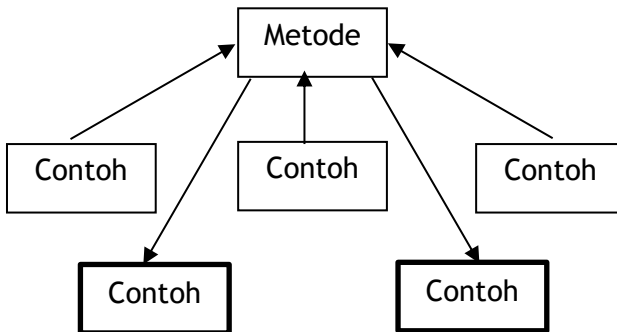
Aturan di atas dibatasi untuk m dan n adalah bilangan asli dan $m > n$, sehingga aturan tersebut hanya dapat berlaku untuk a, a^2, a^3, a^4, \dots dan tidak berlaku untuk $a^0, a^{1/2}, a^{-2}$.

Berikut ini tahapan proses pengembangan metode

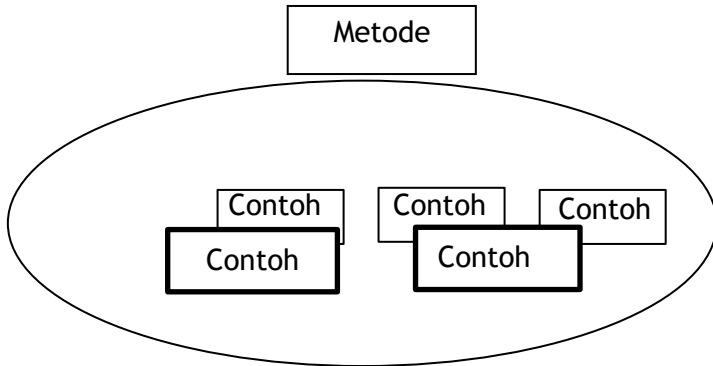
- 1) Dari contoh-contoh disusun suatu metode



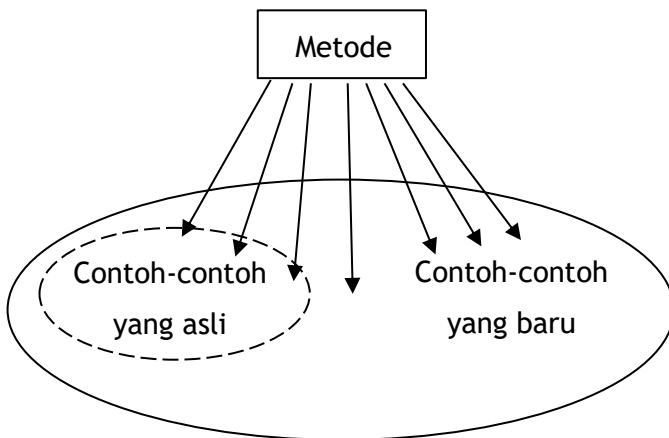
- 2) Kemudian metode tersebut diaplikasikan kebeberapa contoh lain



- 3) Metode dirumuskan secara eksplisit dengan mempertimbangkan sesuatu yang ada di dalamnya dan menganalisis struktur



- 4) Metode tersebut diterapkan pada contoh-contoh baru



Proses generalisasi matematis merupakan aktivitas yang rumit dan tangguh. Rumit karena melibatkan pemikiran pada bentuk metode di dalamnya. Sedangkan tangguh karena membutuhkan kesadaran yang tinggi, perlu pengendali dan harus akurat. Akurat yang dimaksud, tidak hanya pada jawaban tetapi pada langkah-langkahnya. Selanjutnya, kita menciptakan contoh-contoh baru yang sesuai dengan konsep tersebut.

Fungsi kecerdasan reflektif sangat penting untuk kemajuan matematika ke tingkat yang lebih tinggi, Penelitian Inhelder dan Piaget yang menunjukkan bahwa anak akan mengembangkan kemampuan untuk memikirkan pada isi (*content*) selama usia 7–11 tahun, dan memanipulasi ide-ide konkret dengan berbagai cara, seperti melakukan aksi (dalam imajinasi). Memanipulasi ide-ide konkret dengan berbagai cara, seperti melakukan aksi (dalam imajinasi). Tetapi mereka menemukan bahwa subyeknya tidak dapat beralasan secara formal sampai masa dewasa. Yang berkaitan erat dengan ini, mereka menyatakan bahwa anak-anak yang lebih muda tidak dapat membantah hipotesis meskipun hipotesis ini bertolak belakang dengan pengalaman mereka (Skemp, 1971).

Guru telah mencoba mengajarkan kecerdasan reflektif. Dalam mengajarkan suatu topik, guru lebih

menekankan pada klarifikasi pemikiran peserta didiknya. Penelitian sederhana juga mendukung pandangan ini. Para peserta didik SLTP yang berusia sekitar 14 tahun diajarkan beberapa topik yang berbeda oleh guru matematikanya. Masing-masing diberikan sebuah tes mengenai topik yang telah diajarkan, kemudian peserta didik dibagi menjadi dua kelompok yang sama berdasarkan hasil tes tersebut. Kelompok pertama mengajarkan apa yang telah mereka pelajari mengenai bilangan kepada kelompok kedua. Peserta didik yang beraksi sebagai tenaga pengajar berpikir bahwa peserta didiknya akan dites mengenai apa yang telah diajarkan oleh mereka. Sebenarnya, pada akhir penelitian semua dites lagi atas topik yang telah mereka pelajari. Tujuannya adalah untuk membandingkan efek pengajaran suatu topik pada orang lain, dan terus mempraktekkannya sendiri. Hasilnya nampak sangat jelas bahwa kelompok peserta didik yang menjadi tenaga pengajar mempunyai hasil tes akhir yang lebih baik. Dengan kata lain, saling pendapat dan diskusi adalah cara-cara pembelajaran yang sangat bermanfaat bagi pengembangan kecerdasan reflektif.

Siswa yang masih pada tahap intuitif, biasanya banyak tergantung pada cara penyajian materi oleh guru. Jika konsep baru yang didapati sangat jauh dari skema yang

ada, mungkin dia tidak mampu mengasimilasikannya; khususnya karena tingkat akomodasi yang mungkin pada tingkat intuitif lebih rendah daripada yang dicapai dengan refleksi. Maka pada tahap-tahap awal, guru harus menganalisis konseptual peserta didik secara cermat sebagai dasar merencanakan pembelajaran, sehingga peserta didik dapat melakukan sintesa struktur-struktur dalam ingatannya sendiri. Itulah hal yang harus diperhatikan, tidak peduli apakah pembelajaran terjadi langsung oleh guru, maupun pembelajaran tidak langsung yaitu dari buku. Pembelajaran langsung oleh guru mempunyai keuntungan yaitu pertanyaan dapat diajukan, penjelasan dapat diberikan; dan bahkan keuntungan yang lebih besar bahwa guru yang sensitif dapat mempersepsikan perkembangan skema tiap peserta didiknya, dan mengajarkan materi yang tepat sesuai dengan kondisi siswa. Pendekatan ini lebih fleksibel, disesuaikan dengan penguasaan siswa sehingga tidak harus tepat sesuai rencana yang telah disiapkan.

Kontribusi akhir dari guru adalah mengurangi ketergantungan peserta didik padanya. Contohnya, ketika seorang anak sedang mengerjakan sebuah teka-teki (*jigsaw puzzles*) untuk pertama kalinya, maka ibunya biasa memberi bagian-bagian yang dirasa cocok dengan apa yang

telah dia tempatkan bersama. Tetapi ketika tahap intuitif dan reflektif telah dicapai, maka anak tidak akan suka jika dibantu dalam mengerjakan, sehingga guru harus memberi kebebasan kepada peserta didiknya. Setelah seorang peserta didik mampu menganalisis materi baru untuk dirinya sendiri, maka dia dapat mencocokkan pada skemanya sendiri dengan cara-cara yang paling berarti bagi dirinya sendiri dan mungkin mempunyai cara yang sama dengan apa yang disajikan oleh guru.

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa ada tiga hal yang harus dilakukan oleh tenaga pengajar matematika, yaitu:

- 1) Guru harus menyesuaikan materi matematika sesuai dengan status perkembangan skema matematis peserta didik.
- 2) Guru harus menyesuaikan cara penyajian materi sesuai dengan kemampuan berpikir peserta didik.
- 3) Secara bertahap guru harus meningkatkan kemampuan analitiknya untuk mencerna terlebih dahulu sebelum materi diberikan kepada peserta didik, ketika siswa berada pada tahap dimana mereka tidak lagi tergantung pada guru.

RANGKUMAN

- ❖ **Kecerdasan Intuitif** adalah kemampuan untuk memunculkan dan menyeleksi ide/konsep/ skema yang sudah kita ketahui untuk merespons stimulus secara otomatis dan spontan dengan tingkat akurasi yang tinggi.
- ❖ **Kecerdasan Reflektif** adalah kemampuan untuk menyadari kebiasaan mentalnya dan kemampuan untuk mentransendensikan pola-pola yang terbatas, dengan kata lain kemampuan untuk memikirkan cara berpikir.
- ❖ Tahapan proses pengembangan metode antara lain:
 1. Dari contoh-contoh disusun suatu metode.
 2. Kemudian metode tersebut diaplikasikan kebeberapa contoh lain.
 3. Metode dirumuskan secara eksplisit dengan mempertimbangkan sesuatu yang ada di dalamnya dan menganalisis struktur.
 4. Metode tersebut diterapkan pada contoh-contoh baru.
- ❖ Ada tiga hal yang harus dilakukan oleh tenaga pengajar matematika, yaitu:

1. Guru harus menyesuaikan materi matematika sesuai dengan status perkembangan skema matematis peserta didik.
2. Guru harus menyesuaikan cara penyajian materi sesuai dengan kemampuan berpikir peserta didik.
3. Secara bertahap guru harus meningkatkan kemampuan analitiknya untuk mencerna terlebih dahulu sebelum materi diberikan kepada peserta didik.

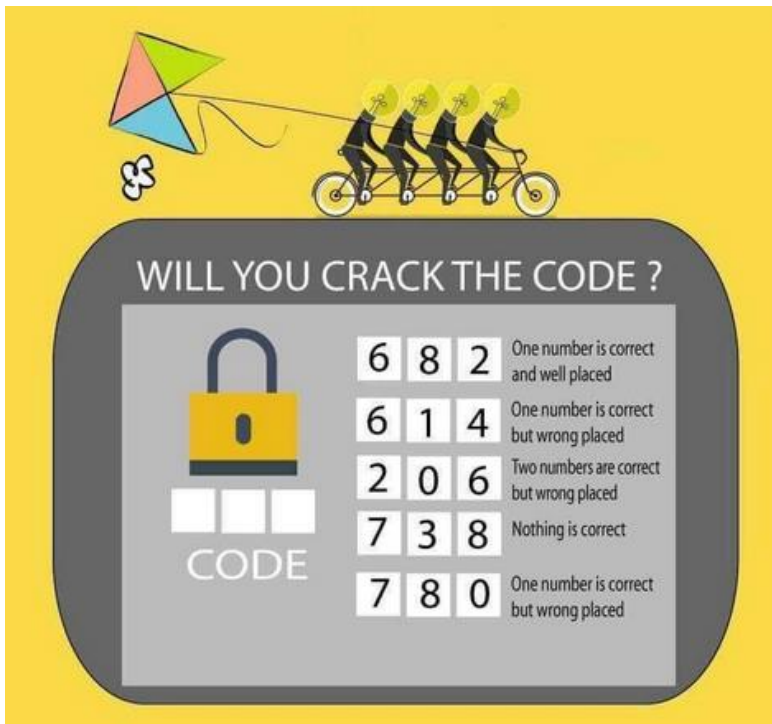
Latihan Soal 4.1

Pertemuan ke-7 (*untuk mengetahui kemampuan analisis mahasiswa dalam memahami materi tentang kecerdasan intuitif dan reflektif*)

1. Jelaskan perbedaan skema kecerdasan intuitif dengan kecerdasan reflektif!
2. Bagaimana cara mengembangkan kecerdasan intuitif dan kecerdasan reflektif!

3. Bagaimana peran kecerdasan intuitif dan kecerdasan reflektif dalam pembelajaran matematika!
4. Buatlah skema tahapan proses pengembangan metode!
5. Uraikan tugas yang harus dilakukan oleh guru dalam mengajar matematika!

QUIS!



WILL YOU CRACK THE CODE ?

6 8 2 One number is correct and well placed

6 1 4 One number is correct but wrong placed

2 0 6 Two numbers are correct but wrong placed

7 3 8 Nothing is correct

7 8 0 One number is correct but wrong placed

SIMBOL-SIMBOL MATEMATIKA

A. Pengertian Simbol

Pada bab-bab sebelumnya telah dibahas tentang pembentukan konsep-konsep, fungsi skema-skema dalam menyatukan pengetahuan yang ada dan menyerap pengetahuan baru, dan kecerdasan-kecerdasan yang dimiliki untuk memikirkan skema-skema yang ada. Dalam setiap proses tersebut bagian utama diperankan oleh simbol.

Menurut Dillistone (2002), simbol berasal dari kata kerja dasarnya *symbollein* dalam bahasa Yunani berarti 'mencocokkan, kedua bagian yang dicocokkan disebut *symbola*. Sebuah simbol pada mulanya adalah sebuah benda, sebuah tanda, atau sebuah kata, yang digunakan untuk saling mengenali dan dengan arti yang sudah dipahami (Dillistone, 2002). Simbol merupakan sebuah pusat perhatian yang tertentu, sebuah sarana komunikasi dan landasan pemahaman bersama. Setiap komunikasi,

dengan bahasa atau sarana yang lain, menggunakan simbol-simbol. Cassirer memberi petunjuk kepada manusia mengenai simbol, yakni selalu berhubungan dengan (1) ide simbol (didasarkan pada pertimbangan prinsip-prinsip empirik untuk memvisualisasikan ide dalam bentuk simbol), (2) lingkaran fungsi simbol dan (3) sistem simbol (sebagai sistem, memuat bermacam-macam benang yang menyusun jaring-jaring simbolis) (Cassirer,1987).

Menurut AN. Whitehead dalam bukunya *Symbolism* yang dikutip Dilliston, dijelaskan bahwa pikiran manusia berfungsi secara simbolis apabila beberapa komponen pengalamannya menggugah kesadaran, kepercayaan, perasaan dan gambaran mengenai komponen-komponen lain pengalamannya. Perangkat komponen yang terdahulu adalah "simbol" dan perangkat komponen yang kemudian membentuk "makna" simbol. Keberfungsian organis yang menyebabkan adanya peralihan dari simbol kepada makna itu akan disebut "referensi". Simbol sesungguhnya mengambil bagian dalam realitas yang membuatnya dapat dimengerti, nilainya yang tinggi terletak dalam suatu substansi bersama dengan ide yang disajikan. Simbol sedikit banyak menghubungkan dua entitas. Setiap simbol mempunyai sifat mengacu kepada apa yang tertinggi dan ideal. Simbol yang efektif adalah simbol yang memberi

terang, daya kekuatannya bersifat emotif dan merangsang orang untuk bertindak (Dillistone, 2002).

B. Fungsi Simbol

Adapun fungsi-fungsi simbol dijelaskan sebagai berikut (Skemp, 1971):

1) Alat Komunikasi

Konsep merupakan objek, pola pikir yang murni, tidak dapat didengar dan tidak dapat dilihat. Karena tidak ada cara untuk mengamati langsung pikiran seseorang, maka harus menggunakan alat-alat yang dapat didengar atau dilihat, seperti mengucapkan kata atau bunyi lainnya, penulisan kata atau tanda lainnya yang ditulis di atas kertas.

Simbol adalah suara atau sesuatu yang dapat dilihat, yang secara mental berhubungan dengan suatu ide. Ide inilah yang kemudian diberi arti simbol. Tanpa ada ide yang melekat padanya, maka simbol tersebut tidak mempunyai arti. Simbol dan maknanya harus diterima sebagai satu kesatuan.

Harus dipahami bahwa simbol dikaitkan pada konsep yang sama dalam pikiran A dan B, kemudian melahairkan simbol. A dapat memanggil konsep dari memori B kedalam pengertiannya sendiri. Sekali hubungan ini terbentuk, artinya diproyeksikan kepada simbol, maka

simbol dan maknanya diterima sebagai suatu kesatuan. Akan tetapi bisa jadi suatu makna yang dilekatkan pada suatu simbol oleh seseorang berbeda dengan makna yang diterima orang lain sekalipun simbolnya sama. Misalnya kata “braces” bagi orang Inggris dapat berarti alat untuk menahan celana (supaya tidak lepas) tetapi bagi orang Amerika diartikan sebagai { }.

Jika hal ini terjadi maka tidak sedang terjadi komunikasi. Hal inilah yang seringkali salah dipahami orang. Untuk itu kita perlu memperhatikan konsep awal berikut ini, bahwa suatu simbol dan konsep yang berhubungan dengan simbol itu adalah dua hal yang berbeda; perbedaan ini tidak sepele yaitu antara sebuah objek dengan nama objek. Jika kita sebut suatu objek dengan nama lain, tidak mengubah objek itu sendiri, Hal ini tetap benar untuk objek-objek pikiran dalam konteks ide matematika. Misalnya : “lima”, “five”, “cink” “5”, “V” , “101” Semuanya menyatakan bilangan yang sama, tetapi dalam simbol yang berbeda.

Biasanya jika kita menyatakan suatu simbol, kita ingin minta perhatian penerima (*receiver*) terhadap ide yang melekat pada simbol itu dari pada terhadap simbol itu sendiri. Ketelitian dalam komunikasi perlu diperhatikan

agar dapat menghasilkan ide yang sama dalam pikiran penerima.

2) Membuat bermacam klasifikasi dengan jelas

Suatu objek tunggal dapat diklasifikasikan dalam beberapa cara dengan menggunakan atau memberikan nama-nama yang berbeda untuk objek tersebut. Kita dapat menunjukkan bahwa bagian klasifikasi mana yang sedang digunakan. Seorang laki-laki dapat disebut sebagai Pak Brown “pak” ‘Orang laki-laki terhormat’ “Paman Ari” , “Ayah”. Bilangan yang sama dapat dipandang sebagai kuadrat dari 8, 4 pangkat 3, atau 10 kuadrat dikurangi 6 kuadrat, disimbolkan dengan 8^2 , 4^3 , $10^2 - 6^2$

Sebagaimana disebutkan terdahulu kita tunjukkan bahwa kita masih mengacu pada objek yang sama dengan menggunakan simbol “=”, dan dengan penamaan kembali menurut kebiasaan yang ada kita dapat mencari sifat-sifat yang pada mulanya tidak jelas.

Contoh

$4x^2 - 12xy + 9y^2$ dimana x dan y keduanya merupakan peubah (variabel)

Kita tahu bahwa kumpulan simbol ini mempresentasikan beberapa bilangan. Tetapi dengan menuliskan, $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$ kita mengetahui

sesuatu yang baru bahwa simbol-simbol itu menggambarkan suatu bilangan positif

Meskipun prinsipnya sederhana namun berakibat pada penemuan yang jauh. Suatu kali kita mempunyai klasifikasi sesuatu secara tepat kita mempunyai banyak cara untuk mengetahui ketepatannya. Hal ini dapat membantu kita memecahkan problem yang kita hadapi, sehingga lebih banyak cara lagi untuk mengklasifikasi, sehingga kita dapat memecahkan *problem* yang lebih bervariasi. Lebih banyak simbol yang dapat digunakan pada konsep yang sama maka lebih banyak cara untuk mengklasifikasi.

3) Penjelasan

Penjelasan adalah suatu bentuk komunikasi yang dilakukan agar seseorang dapat memahami sesuatu yang sebelumnya tidak dipahami. Memahami adalah hasil dari asimilasi terhadap skema yang ada, sehingga bila terdapat kegagalan, ada tiga kemungkinan penyebabnya, yaitu:

a) Penggunaan skema yang salah. Dalam keadaan ini diperlukan penjelasan yang sederhana untuk mengaktifkan skema yang tepat. Di dalam buku ini, kata-kata seperti: fungsi, bayangan, grup, dan lain-lain digunakan dalam pengertian sehari-hari. Juga dalam pengertian matematik. Kegagalan dalam memahaminya

dapat disebabkan karena pemberian arti yang berbeda dari yang diharapkan.

- b) Kesenjangan antara ide-ide baru dengan skema yang sudah ada terlalu besar. Sebagai contoh :

Misalkan mulai dengan menunjukkan notasi-notasi berikut:

$$a^2 = a \times a$$

$$a^3 = a \times a \times a$$

dan kemudian langsung

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Besar kemungkinan pelajar mengatakan dia tidak memahami, mungkin juga mengatakan “Anda terlalu cepat”. Dalam hal ini penjelasan diperlukan untuk memperbaiki tahap-tahap yang digunakan. Dengan cara demikian jaraknya dapat dijembatani. Dalam istilah psikologi, pemberi penjelasan akan mengemukakan simbol-simbol yang cocok untuk membangkitkan konsep-konsep yang berhubungan dengan skema yang ada dengan ide-ide baru.

- c) Skema yang sudah ada mungkin tidak mampu menyerap ide-ide baru tanpa pemberian akomodasi, khususnya dalam kasus generalisasi matematika. Dalam keadaan ini, fungsi penjelasan adalah membantu pelajar untuk

menggambarkan skema yang dipikirkannya, untuk melepaskan contoh-contoh atau ide-ide murni yang mempunyai pengaruh penyempitan dan untuk memodifikasikan ide-ide tersebut secara tepat. Perluasan notasi bilangan nol, negatif dan pecahan merupakan contoh kasus ini, jika ide baru disajikan dalam komunikasi lebih lanjut diperlukan untuk memahaminya. Nampaknya cara ini dapat digunakan dalam pengajaran. Tidak diinginkan menempatkan para pelajar pada sesuatu yang tidak sesuai dengan tingkatan yang sudah dimilikinya. Seringkali bermanfaat untuk memperhatikan permasalahannya dulu, misalnya penemuan tentang kecepatan dan seseorang penerjun bebas. Berikutnya mendefinisikan dengan tepat tentang “kecepatan sesaat” dan modifikasi pengembangan dengan proses-proses deskripsi konsep-konsep baru (misalnya limit) yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah.

4) Mengungkap Kembali Informasi dan Pemahaman

Penggunaan simbol mengungkap kembali konsep-konsep dan skema yang tersimpan dalam memori seseorang. Meskipun konsep yang digunakan merupakan objek yang dihindari yaitu sudah tidak dikerjakan untuk beberapa lama atau mungkin sama sekali tak dapat dicapai

tanpa menggunakan beberapa cara untuk mengungkap kembali.

Contoh berkaitan dengan pengetahuan tentang persamaan kuadrat. Apakah persamaan kuadrat berikut mempunyai akar nyata?.

$$3x^2 - 4x + 2 = 0$$

Pada kasus di atas istilah “deskriminan” atau simbol: “ b^2-4ac ” perlu diperhatikan terlebih dahulu. Setelah itu dasar-dasar metode untuk menyelesaikan kasus itu perlu diingat kembali.

Suatu contoh lagi, sudah pernahkah anda ketemu seorang teman sekolah lama yang sudah tidak anda kenal. Tetapi setelah ia berkata “Saya” anda bukan hanya mengenalnya, tetapi bahkan teringat segala sesuatu tentang dia.

Proses mengingat kembali informasi dengan bantuan simbol-simbol itu ditunjukkan oleh kemampuan menghafal terlepas dari konsep.

Contoh :

Sin	All
Tan	Cos

Hai ini bermaksud baik untuk mengingat tanda dari pembagian sudut trigonometri dari 0° sampai 360° . Diagram di atas menunjukkan perbandingan sudut-sudut positif.

Perbedaan menghafal dengan sebuah formula adalah formula mengorganisasikan struktur yang harus diingat kembali. Oleh karena itu, dari sebuah formula pemahaman dapat dikonstruksikan, meskipun tidak dengan segera dapat diingat kembali simbol- simbol yang dimaksud. Dengan melihat atau mendengar istilah hukum

ohm, formula
$$\frac{V}{I} = R$$

Untuk kebanyakan orang hal itu dapat dibangkitkan kembali dengan sengaja dari ruang penyimpanan memori. Selanjutnya dari formula mudah untuk mengkonstruksi pengertiannya. Jika diberikan sebuah medan listrik maka arus yang mengalir dengan voltase ganda juga akan meningkatkan ampere sebesar dua kali lipat. Urutan-urutan untuk mengingat kembali: pertama simbol-simbol, kemudian makna simbol tanpa kecuali. Pada saat mengingat kembali sebuah percakapan atau sesuatu yang dibaca sebagian orang dapat mengingatnya kembali dalam bahasanya sendiri.

Dalam matematika, yang kita simpan adalah kombinasi struktur konsep yang diasosiasikan dengan simbol, karena itu lebih baik untuk mengingat secara total. Pertanyaannya adalah bagian dari kombinasi simbol dan konsep mana yang lebih mudah dikuasai, ketika kita mencoba mengingat kembali materi-materi yang tersimpan pada ruang penyimpanan memori. Bukti mengingat kembali simbol-simbol lebih mudah dicapai itu ada, tetapi seberapa besar, masih perlu penelitian lebih lanjut.

5) Aktivitas Mental yang Kreatif

Pembentukan konsep yang terdiri dari formasi ide-ide baru dari ingatan masing-masing individu merupakan faktor-faktor kreatif. Oleh karena itu, mempelajari matematika adalah suatu proses belajar yang menantang karena penjelasan yang digunakan lebih mengutamakan pada kreasi ide-ide. Jika pemahaman diperoleh hal itu dapat dikomunikasikan dalam cara-cara yang siap didiskusikan satu sama lain untuk dapat diasimilasikan.

Sebuah proses aktivitas mental memerlukan permulaan yaitu diperlukan untuk berkonsentrasi dengan sungguh-sungguh pada suatu masalah. Maksudnya ada suatu priode tertentu dimana suatu *problem* dikesampingkan, jadi sejauh ini kesadaran ingatan yang diperhatikan adalah saat situasi rileks, kegiatan mental atau

kegiatan jasmani lain atau istirahat. Nampaknya selama periode ini, tanpa sadar kegiatan mental konsen dengan *problem* yang berkelanjutan, secara tiba-tiba pemahaman yang berhubungan dengan *problem*, mungkin merupakan penyelesaian yang komplit, mencuat dalam kesadaran, sehingga kita mendapatkan solusi. Pemahaman ini disertai dengan perasaan yang senang dan yang menarik, penting untuk dikomunikasikan.

Selama pada tingkat pusat dimana keberadaan ide-ide secara tiba-tiba cocok dengan cara baru untuk menghasilkan ide baru. Tidak mungkin untuk mengatakan berapa besar simbol-simbol memainkan peran yang penting atau mempunyai andil disini. Pada bagian terdahulu dan pada tingkatan berikutnya bagaimanapun juga fungsi mereka cukup penting. Tahap pertama adalah kuatnya konsentrasi pada *problem* dimana semua ide yang relevan dibawa bersama dan dipertimbangkan dari beberapa aspek dan dalam kombinasi-kombinasi yang berbeda dan hubungannya satu sama lain. Selama periode dari refleksi ini simbol memainkan suatu bagian dasar, untuk itu kita mengontrol secara sengaja pemikiran kita. Hal ini bisa terjadi dengan baik jika pada tahap ini kontribusi konsep dimunculkan pada tingkatan yang lebih tinggi dari aktivitas bawah sadar.

Jika pemahaman telah terjadi, hal itu memungkinkan mengingat simbol-simbol yang sesuai secara spontan untuk menunjukkan adanya asosiasi dengan proses pemecahan. Masalahnya adalah tidak semua ide-ide diperoleh dengan cara-cara demikian. Setelah pemahaman seharusnya diikuti dengan pemeriksaan atas kebenarannya. Dalam sains ini berarti menguji ide dengan eksperimen. Dalam matematika ini berarti analisa logika, menguji konsistensi internal, dan menerima pengetahuan.

C. Simbol Matematika

Simbol matematika merupakan pilihan, artinya tidaklah menjadi masalah ketika seseorang ingin menulis tentang matematika dengan simbol tertentu yang ia pilih. Jangan pernah kita bayangkan bahwa orang-orang dahulu menulis penjumlahan dengan tanda "+". Setiap kebudayaan menggunakan simbol sendiri-sendiri, bahkan antar matematikawan dalam daerah dan waktu yang sama dapat berbeda-beda.

Mula-mula orang menulis simbol-simbol matematika menggunakan kata-kata dalam bahasa sehari-hari. Tahap ini disebut aljabar retorik (*rethoric algebra*). Perkembangan selanjutnya, orang-orang mulai memikirkan efisiensi, sehingga digunakanlah singkatan dalam beberapa

huruf saja, inilah yang disebut Aljabar Singkatan (*syncopated algebra*). Nah, akhirnya orang-orang secara lambat laun menyepakati untuk menggunakan lambang-lambang tersendiri dalam matematika (tahap *symbolic algebra*). Dalam matematika murni, lambang-lambang tersebut, yang biasanya sangat sederhana, tidaklah diberi arti menurut pengertian sehari-hari melainkan menurut konsep yang diturunkan secara deduktif (umum). Bahasa sehari-hari, akhirnya hanya sebagai interpretasi terapan saja. Contohnya, tanda + dapat diartikan ditambah, diperpanjang, digabung, dan lain-lain. Berikut ini diuraikan simbol matematika dan artinya pada Tabel 5.1 (Ruseffendi, 2006).

Tabel 5.1 Simbol Matematika dan Artinya

Kategori	Simbol	Nama	Dibaca	Penjelasan
umum	=	kesamaan	sama dengan	$x = y$ berarti x dan y mewakili hal atau nilai yang sama.
	\neq	Ketidaksamaan	tidak sama dengan	$x \neq y$ berarti x dan y tidak mewakili hal atau nilai yang sama.

	()	Penge lomp okkan lebih dulu		Laksanakan operasi di dalam tanda kurung terlebih dulu
teori urutan	< >	ketida ksam aan	lebih kecil dari; lebih besar dari	$x < y$ berarti x lebih kecil dari y . $x > y$ berarti x lebih besar dari y .
	\leq \geq	ketida ksam aan	lebih kecil dari atau sama denga n, lebih besar dari atau sama denga n	$x \leq y$ berarti x lebih kecil dari atau sama dengan y . $x \geq y$ berarti x lebih besar dari atau sama dengan y .
aritmat ika	+	tamba h	tamba h	$4 + 6$ berarti jumlah antara 4 dan 6.
	-	kuran g	kuran g	$9 - 4$ berarti 9 dikurangi 4.

	-	tanda negatif	negatif	-3 berarti negatif dari angka 3.
	\times	Perkalian	kali	3×4 berarti perkalian 3 oleh 4.
	\div /	pembagian	bagi	$6 \div 3$ atau $6/3$ berarti 6 dibagi 3.
	Σ	jumlahan	Jumlah atas ... dari ... sampai ...	$\sum_{k=1}^n a_k$ berarti $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
	Π	produk atau jumlah kali	Produk atas ... dari ... sampai...	$\prod_{k=1}^n a_k$ berarti $a_1 a_2 \dots a_n$.
teori himpunan	\cup	Gabungan tak beririsan	Gabungan tak beririsan dari ... dan ...	$A_1 + A_2$ berarti gabungan tak beririsan dari himpunan A_1 dan A_2 .
	-	Komplemen teori	minus ; tanpa	$A - B$ berarti himpunan yang mempunyai semua anggota dari A yang tidak terdapat pada B .

	himpunan		
x	Produk Cartesius	Produk Cartesius dari ... dan ...; produk langsung dari ... dan ...	$X \times Y$ berarti himpunan semua pasangan terurut dengan elemen pertama dari tiap pasangan dipilih dari X dan elemen kedua dipilih dari Y.
{, }	Kurung kurawal	Himpunan dari ...	$\{a, b, c\}$ berarti himpunan terdiri dari a , b , dan c .
{:} { }	notasi pembangun himpunan	Himpunan dari ... sedemikian sehingga ...	$\{x: P(x)\}$ berarti himpunan dari semua x dimana $P(x)$ benar. $\{x P(x)\}$ adalah sama seperti $\{x: P(x)\}$.
\emptyset { }	himpunan kosong	himpunan kosong	\emptyset berarti himpunan yang tidak memiliki elemen. { } juga berarti hal yang sama.

\subseteq \subset	Himpunan bagian	Adalah himpunan bagian dari	$A \subseteq B$ berarti setiap elemen dari A juga elemen dari B . $A \subset B$ berarti $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$.
\supseteq \supset	super set	Adalah super set dari	$A \supseteq B$ berarti setiap elemen dari B juga elemen dari A . $A \supset B$ berarti $A \supseteq B$ tetapi $A \neq B$.
\cup	Gabungan teori himpunan	gabungan dari ... dan ...; gabungan	$A \cup B$ berarti himpunan yang berisi semua elemens dari A dan juga semua dari B , tetapi tidak selainnya.
\cap	Irisan teori himpunan	Beririsan dengan; irisan	$A \cap B$ berarti himpunan yang berisi semua elemen yang A dan B punya bersama.
\setminus	kompl emen teori himpunan	minus ; tanpa	$A \setminus B$ berarti himpunan yang berisi semua elemen dari A yang tidak ada di B .
$()$	Terapan fungsi	dari	$f(x)$ berarti nilai fungsi f pada elemen x .

	$f: X \rightarrow Y$	fungsi panah	dari ... ke	$f: X \rightarrow Y$ berarti fungsi f memetakan himpunan X ke dalam himpunan Y .
	\circ	Komposisi fungsi	Komposisi dengan	$f \circ g$ adalah fungsi, sedemikian sehingga $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
	\prod	Produk kartesius	Produk kartesius dari; produk langsung dari	$\prod_{i=0}^n Y_i$ berarti himpunan dari semua $(n+1)$ -tuples (y_0, \dots, y_n) .
Aljabar vektor	\times	hasil kali silang	kali	$u \times v$ berarti hasil kali silang dari vektor u dan v
bilangan real	$\sqrt{\quad}$	Akar kuadrat	akar kuadrat	\sqrt{x} berarti bilangan positif yang kuadratnya x .
Bilangan kompleks	$\sqrt{\quad}$	akar kuadrat kompleks	akar kuadrat kompleks dari; akar	jika $z = r \exp(i\varphi)$ direpresentasikan di koordinat kutub dengan $-\pi < \varphi \leq \pi$, maka $\sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(i\varphi/2)$.

			kuadrat	
Bilangan	$ $	Nilai mutlak	nilai mutlak dari	$ x $ berarti jarak di garis real (atau bidang kompleks) antara x dan nol.
	\mathbb{N}	Bilangan asli	\mathbb{N}	\mathbb{N} berarti $\{0,1,2,3,\dots\}$,
	\mathbb{Z}	Bilangan bulat	\mathbb{Z}	\mathbb{Z} berarti $\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$.
	\mathbb{Q}	Bilangan rasional	\mathbb{Q}	\mathbb{Q} berarti $\{p/q : p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.
	\mathbb{R}	Bilangan real	\mathbb{R}	\mathbb{R} berarti $\{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{Q}, \text{ the limit exists}\}$.
	\mathbb{C}	Bilangan kompleks	\mathbb{C}	\mathbb{C} berarti $\{a + bi : a,b \in \mathbb{R}\}$.
	∞	ketakhinggaan	Tak hingga	∞ adalah elemen dari perluasan garis bilangan yang lebih besar dari semua bilangan real; ini sering terkadi di limit.

kombinatorika	!	faktorial	faktorial	$n!$ adalah hasil dari $1 \times 2 \times \dots \times n$.
statistika	\sim	distribusi kemungkinan	mempunyai distribusi	$X \sim D$, berarti peubah acak X mempunyai distribusi kemungkinan D .
Logika proposisi	$\Rightarrow \rightarrow \supset$	materi implikasi	mengakibatkan; jika .. maka	$A \Rightarrow B$ berarti jika A benar maka B juga benar; jika A salah maka tiada bisa dikatakan tentang B . \rightarrow bisa berarti sama seperti \Rightarrow , atau itu bisa berarti untuk fungsi diberikan di bawah. \supset bisa berarti sama seperti \Rightarrow , atau itu bisa berarti untuk superset diberikan di bawah.
	$\Leftrightarrow \leftrightarrow$	materi ekuivalensi	jika dan hanya jika; iff	$A \Leftrightarrow B$ berarti A benar jika dan hanya jika B benar dan A salah jika B salah.
	$\neg \sim$	Logika ingkaran	tidak	Pernyataan $\neg A$ benar jika dan hanya jika A salah. Tanda slash ditempatkan melalui operator lain

				sama seperti “ \neg ” ditempatkan di depan.
Logika proposisi, teori lattice	\wedge	logika konjungsi atau meet di lattice	dan	Pernyataan $A \wedge B$ benar jika A dan B keduanya benar; selain itu salah.
	\vee	logika disjungsi or join in a lattice	atau	The pernyataan $A \vee B$ benar jika A atau B (atau keduanya) benar; jika keduanya salah, pernyataan salah.
Logika proposisi, aljabar boolean	$\oplus \vee$	exclusive or	xor	pernyataan $A \oplus B$ benar bila A atau B , tetapi tidak keduanya, benar. $A \vee B$ berarti sama.
Logika predikat	\forall	universal quantification	untuk semua; untuk sebarang; untuk setiap	$\forall x: P(x)$ berarti $P(x)$ benar untuk semua x .

	\exists	eksistensial kuantifikasi on	terdapat	$\exists x: P(x)$ berarti terdapat sedikitnya satu x sedemikian sehingga $P(x)$ benar.
	$\exists!$	unikness kuantifikasi on	Terdapat dengan tepat satu	$\exists! x: P(x)$ berarti terdapat tepat satu x sedemikian sehingga $P(x)$ benar.
Dimana pun	$:=$ $\equiv: \Leftrightarrow$	definisi	Didefinisikan sebagai	$x:= y$ atau $x \equiv y$ berarti x didefinisikan menjadi nama lain untuk y (tetapi catat bahwa \equiv dapat juga berarti sesuatu lain, misalnya kongruensi). $P: \Leftrightarrow Q$ berarti P didefinisikan secara logika ekuivalen ke Q .
dimana pun, teori himpunan	\in \notin	Keanggotaan himpunan	Adalah elemen dari; bukan elemen dari	$a \in S$ berarti a elemen dari himpunan S ; $a \notin S$ berarti a bukan elemen dari S .
geometri	π	<u>pi</u>	pi	π berarti perbandingan (rasio) antara keliling

Euclidean				lingkaran dengan diameternya.
Aljabar linear	$\ \ $	norma	norma dari; panjang dari	$\ x\ $ adalah norma elemen x dari ruang vektor bernorma.
kalkulus	'	turunan	... prima ; turunan dari ...	$f'(x)$ adalah turunan dari fungsi f pada titik x , yaitu, kemiringan dari garis singgung.
	\int	Integral tak tentu atau antiturunan	Integral tak tentu dari ...; antiturunan dari ...	$\int f(x) dx$ berarti fungsi dimana turunannya adalah f .
	\int	integral tentu	integral dari ... sampai ... dari ... berkenaan dengan	$\int_a^b f(x) dx$ berarti area ditandai antara sumbu x dan grafik fungsi f antara $x = a$ dan $x = b$.

	∇	gradien	del, nabra, gradien dari	$\nabla f(x_1, \dots, x_n)$ adalah vektor dari turunan parsial ($df/dx_1, \dots, df/dx_n$).
	∂	Turunan parsial	Turunan parsial dari	dengan $f(x_1, \dots, x_n)$, $\partial f/\partial x_i$ adalah turunan dari f berkenaan dengan x_i , dengan semua variabel lainnya tetap konstan.
topologi	∂	batas	Batas dari	∂M berarti batas dari M
geometri	\perp	Tegak lurus	Adalah tegak lurus dengan	$x \perp y$ berarti x tegak lurus dengan y ; atau secara umum ortogonal ke y .
Teori lattice	\perp	elemen dasar	elemen dasar	$x = \perp$ berarti x adalah elemen terkecil.
Teori model	$ =$	Perikutan/entailment	mengikuti	$A \models B$ berarti kalimat A mengikuti kalimat B , bahwa setiap model dimana A benar, B juga benar.
Logika proposisi, logika	\vdash	inferensi	Menyimpulkan atau	$x \vdash y$ berarti y diturunkan dari x .

predikat			diturunkan dari	
Teori grup	\triangleleft	subgrup normal	adalah subgrup normal dari	$N \triangleleft G$ berarti bahwa N adalah subgrup normal dari grup G .
	$/$	Grup kosien	mod	G/H berarti kosien dari grup G modulo itu adalah subgrup H .
	\approx	isomorfisma	isomorfik ke	$G \approx H$ berarti bahwa grup isomorphik ke group

RANGKUMAN

- ❖ **Simbol** adalah suara atau sesuatu yang dapat dilihat, yang secara mental berhubungan dengan suatu ide.
- ❖ Fungsi-fungsi simbol adalah sebagai berikut:
 1. Alat komunikasi
 2. Membuat bermacam klasifikasi dengan jelas.
 3. Penjelasan
 4. Mengungkap kembali informasi dan pemahaman.
 5. Aktivitas mental yang kreatif
- ❖ Mula-mula orang menulis simbol-simbol matematika menggunakan kata-kata dalam bahasa sehari-hari. Tahap ini disebut aljabar retorik (*rethoric algebra*). Perkembangan selanjutnya, orang-orang mulai memikirkan efisiensi, sehingga digunakanlah singkatan dalam beberapa huruf saja, inilah yang disebut Aljabar Singkatan (*syncopated algebra*). Terakhir orang-orang secara lambat laun menyepakati untuk menggunakan lambang-lambang tersendiri dalam matematika (*tahap symbolic algebra*).

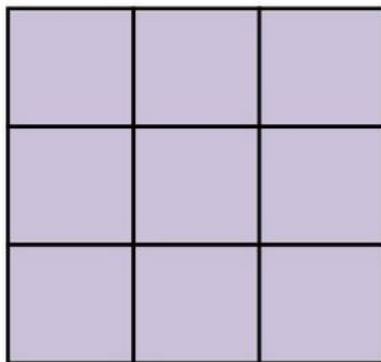
Latihan Soal 5.1

Pertemuan ke-8 (*untuk mengetahui kemampuan analisis mahasiswa dalam memahami materi tentang simbol-simbol matematika*)

1. Jelaskan pengertian simbol!
2. Jelaskan fungsi simbol!
3. Jelaskan proses pembentukan simbol matematika!
4. Buatlah contoh permasalahan matematika dengan menggunakan simbol aritmatika!
5. Buatlah masing-masing contoh simbol kalkulus dalam pembelajaran matematika!

QUIS!

ISILAH KOTAK-KOTAK BERIKUT DENGAN ANGKA dari 1 sd 9 SEHINGGA KALAU DIJUMLAHKAN KESAMPING, KE ATAS, KEBAWAH SERTA DIAGONALNYA SAMA DENGAN 15



BAB 6

REPRESENTASI MATEMATIKA

A. Simbol Visual dan Simbol Verbal

Pada bab sebelumnya telah dipelajari tentang simbol, fungsi simbol, dan simbol dalam matematika. Pada Bab ini akan diperjelas penggunaan istilah simbol visual dan simbol verbal. Ketika kata-kata dituliskan kata-kata itu menjadi sesuatu yang dilihat, bukan didengar. Namun demikian kata-kata adalah simbol yang berhubungan dengan pendengaran, dan cara mengkomunikasikannya adalah ucapan, bukan tulisan. Jadi simbol verbal dapat diartikan sebagai kata yang diucapkan dan kata yang dituliskan.

Simbol visual jelas dicontohkan dengan diagram, khususnya gambar bentuk-bentuk geometri. Tetapi ke dalam kategori mana kita harus meletakkan simbol aljabar seperti ini?

$$\int_a^b \sin x dx$$

$$\{x : x^2 \geq 0\}$$

Pada dasarnya ini adalah stenografi lisan. Tulisan ini dapat dibaca dengan jelas, atau dikomunikasikan tanpa melihat bentuk visual. Yang pertama dibaca sebagai "*Integral a sampai b dari sin x dx*"; dan yang kedua sebagai "*himpunan semua nilai x sedemikian hingga x² lebih besar atau sama dengan nol*". Keuntungan dari notasi-notasi aljabar tersebut adalah, pertama, singkatan ini menghemat waktu dan mengurangi kesalahan serta menambah kejelasan dan kekuatan karena ide-ide yang dipertahankan muncul dalam waktu yang singkat dan singkatan ini lebih bermanfaat. Mungkin ada sedikit kecenderungan untuk membacanya; kemudian memberikan aspek visual. Tetapi dalam pembicaraan yang sering digunakan, simbol aljabar dan simbol verbal biasa digunakan daripada diagram dan gambar geometri. Contoh pernyataan yang sesuai, adalah "*Jika p adalah bilangan prima, dan p|ab \Rightarrow p|a atau p|b*" ("*jika p adalah bilangan prima, dan p membagi habis ab maka p membagi habis a atau p membagi habis b*").

Kedua simbol, visual dan verbal digunakan dalam matematika secara bersamaan maupun terpisah. Oleh

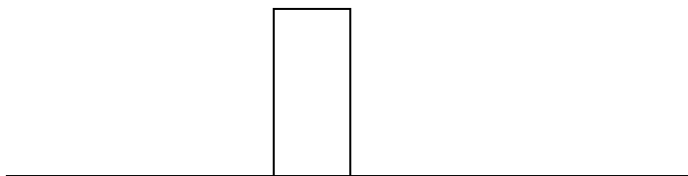
karena itu, kita menemukan diagram-diagram dengan penjelasan verbal dan bentuk perhitungan-perhitungan trigonometri; kita menemukan kurva disertai persamaannya; tetapi kita juga menemukan bentuk aljabar tanpa gambar atau diagram. Hal itu terlihat seolah-olah simbol verbal (termasuk aljabar) sangat diperlukan, tetapi simbol visual tidak. Meskipun terkadang simbol-simbol visual tidak dibutuhkan, namun tidak ada keraguan bahwa simbol visual sangat berguna dan mungkin simbol visual lebih dapat dimengerti daripada simbol verbal dalam bentuk aljabar (Skemp, 1971).

Sudah sepantasnya jika fungsi-fungsi yang disimbolkan dengan dua cara yang berbeda, mungkin saling melengkapi. Ingat pada pembahasan simbol di Bab V, tentang manfaat simbol. Pada bagian yang membahas fungsi simbol matematika ini yang penting sekali. Sehingga, beberapa sajian tentang bagaimana memilih dan menggunakan simbol dan menemukan satu yang baru akan memberikan nilai yang bermanfaat.

Simbol visual kelihatannya menjadi dasar, paling tidak dalam menyajikan bentuk yang sederhana untuk menunjukkan objek yang sesungguhnya. Seperti yang ditunjukkan Piaget, sekalipun persepsi kita terhadap sebuah objek termasuk di dalamnya sebuah bentuk konsep.

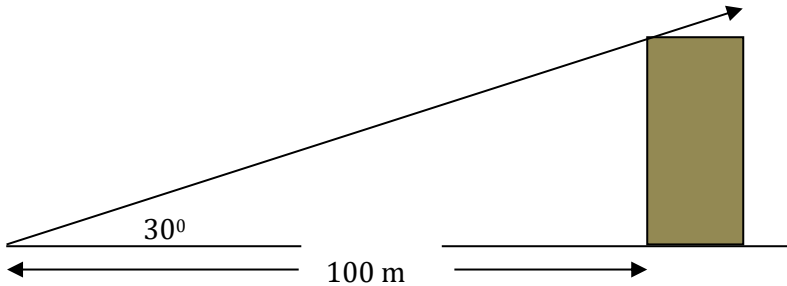
Ketika kita melihat beberapa objek dari sudut pandang tertentu dalam kesempatan tertentu, pengalaman ini menimbulkan ingatan pada pengalaman-pengalaman yang lalu sebagai sebuah abstraksi terhadap sesuatu. Kita mengakui pada saat kita menemukan sebuah objek baru tidak berdasarkan pada data masukan tetapi pada konsep objek yang diperoleh. Jadi sebuah gambaran visual, atau sebuah representasi, dari sebuah objek lebih baik digambarkan sebagai simbol; walaupun konsep objek ini merupakan aturan yang digunakan dalam matematika. Berdasarkan sifat visual dari sebuah objek kita lebih mudah menggambarannya selama digambarkan oleh simbol visual daripada simbol verbal (Skemp, 1971).

Untuk contoh matematika, pertimbangkan diagram ini, yang mewakili sebuah blok tinggi yang berdiri di atas tanah. Untuk tujuan saat ini kami hanya tertarik dalam bentuk dan tingginya.



Selanjutnya kita merepresentasikan pengamatan seorang surveyor. Dari sudut ketinggian dari atap bangunan, diambil pada jarak 100 meter dari bawah. Yang

surveyor merepresentasikan simbol tertentu (titik dan garis) pada saat pengukuran, dan tinggi yang tidak diketahui diwakili oleh simbol aljabar verbal.



Tentu saja kita membutuhkan pemahaman konsep matematika dan sesegera melakukan perhitungan.

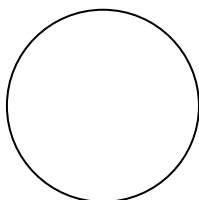
$$h = 100 \tan 30^\circ$$

Meskipun demikian diagram sangat membantu untuk mewakili keseluruhan struktur masalah. Itu memberikan konteks darimana perhitungan secara khusus diperlukan untuk diabstraksikan.

B. Simbol-Simbol Visual di dalam Geometri

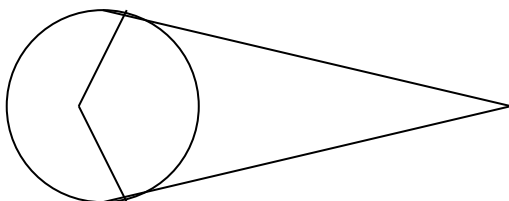
Sebuah perbedaan penting antara kedua jenis simbol, visual dan verbal adalah yang satu lebih tampak sebagai objek tipikal dari set/rangkaian yang diwakilinya, dimana yang satunya lagi tidak tampak seperti itu. Jadi simbol visual ini, pada tingkat apapun, memiliki hubungan yang lebih erat dengan konsep daripada dengan simbol

verbal. Hal yang sama berlaku bagi simbol-simbol geometris. Berikut ini adalah simbol geometris:



Simbol verbal dari simbol geometris di atas adalah *lingkaran*. Persamaan simbol geometris dengan konsepnya memiliki kelebihan dan kekurangan. Manfaatnya adalah menimbulkan sifat-sifat konsep. Hal ini terjadi ketika kita menggambarkan secara visual beberapa konsep secara bersama-sama. Diagram tersebut menjelaskan pada kita hubungan antara konsep dengan representasi verbal dari konsep yang sama lebih jelas.

Sebuah lingkaran dengan dua garis singgung dari suatu titik di luar lingkaran; dan jari-jari melalui titik-titik singgung dari kedua garis singgung tersebut.

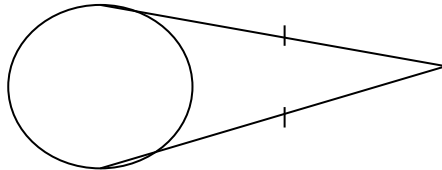


Simbol visual harus digambarkan supaya dapat dikomunikasikan. Ingat, bahwa simbol itu tidak menyajikan suatu lingkaran tertentu, garis singgung dan lain-lain.

Tetapi menyajikan variabel-variabel suatu lingkaran. Bukan pula sebuah lingkaran dengan jari-jari dan diameter seperti yang terlihat.

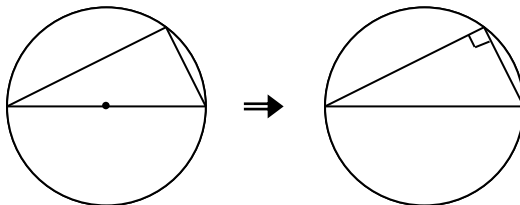
Alasan-alasan penyajian secara visual. Dengan beberapa konvensi sederhana, diagram tersebut tersampaikan dengan jelas dan nyata (Skemp, 1971).

1. *Garis singgung lingkaran dari suatu titik yang berada di luar lingkaran adalah sama panjangnya.* (Perhatikan bahwa diagram juga menunjukkan bagian-bagian dari garis singgung yang kita maksudkan).



Gambar 6. 1 Menyatakan Teorema 1 dalam Simbol Visual

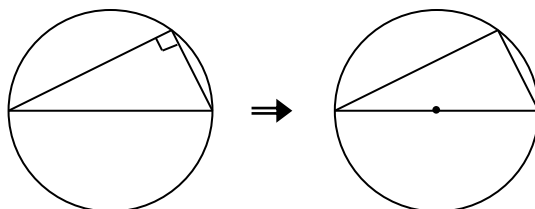
2. Kita dapat juga menunjukkan teorema dan konversnya. *Sudut di dalam setengah lingkaran adalah sudut siku-siku*



Gambar 6. 2 Menyatakan Teorema 2 dalam Simbol

Di sini, \Rightarrow berarti 'implikasi'. Gambar bagian kiri menunjukkan data yang menggunakan kesepakatan dimana suatu titik yang digambarkan di pusat lingkaran sesungguhnya mewakili pusat. Gambar bagian kanan mewakili kesimpulan yang diperoleh dengan menggunakan teorema dari data yang ada.

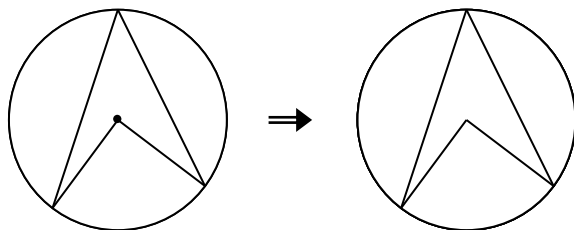
Konvers dari teorema ini juga benar. Jika tali busur suatu lingkaran yang berhadapan dengan suatu sudut siku-siku pada keliling lingkaran, tali busur itu adalah diameter.



Gambar 6.3 Konversi dari Teorema

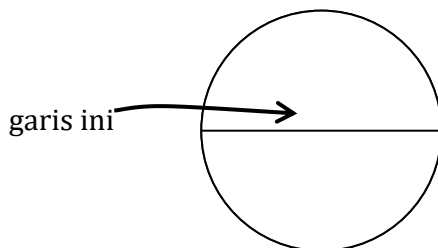
Sejauhmana, pernyataan visual lebih jelas dan singkat. Berbagai kesulitan muncul ketika ingin melakukan lebih dari dua hal memberi bukti logis, dan mengarahkan perhatian ke bagian-bagian tertentu dari diagram. Teorema di atas merupakan kasus kecil berikut.

3. *Ukuran sudut pada pusat lingkaran dua kali ukuran sudut pada keliling yang menghadap pada busur yang sama.*

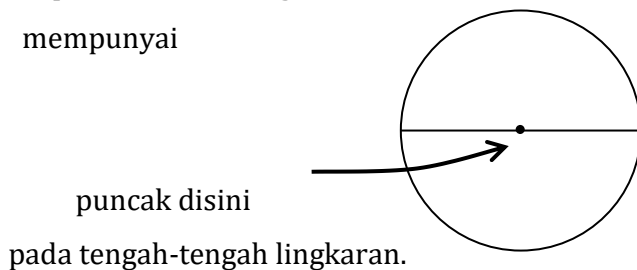


Gambar 6.4 Menyatakan Teorema 3 dalam Simbol Visual

- a. Tanda bukti teorema menunjukkan agar kita mempertimbangkan

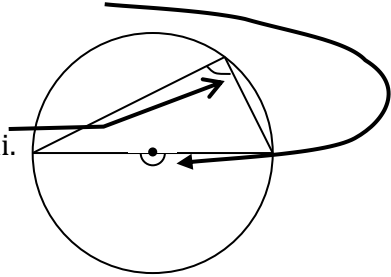


- b. Seperti sudut dengan ukuran 2 siku-siku, yang mempunyai

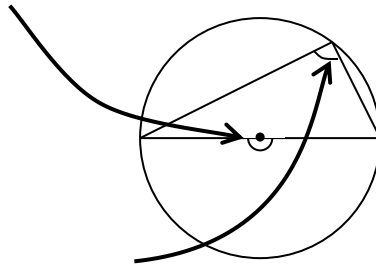


c. Teorema memberi tahukan kita bahwa sudut ini

adalah dua kali sudut ini.

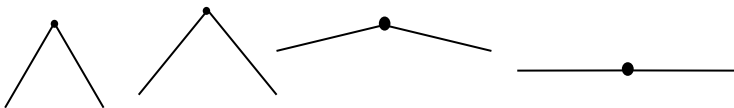


d. Tetapi ukuran sudut ini dua kali sudut siku-siku



Jadi ukuran pada sudut ini adalah salah satu sudut siku-siku.

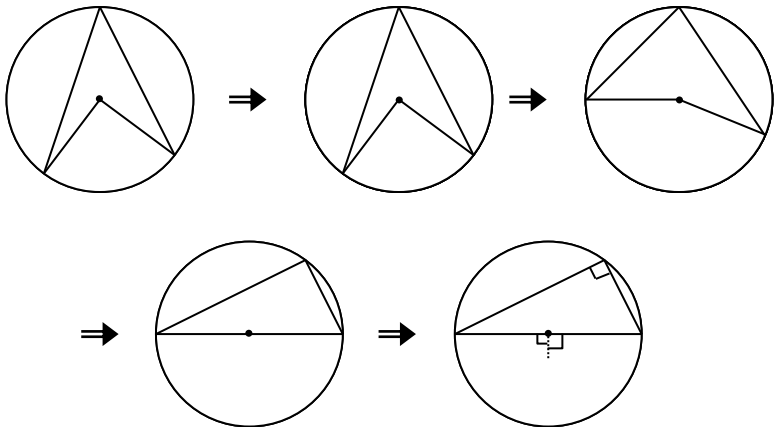
4. Penggunaan kata-kata yang lain mengisyaratkan klasifikasi baru kepada pembaca; sebagai contoh, bahwa suatu garis lurus boleh dianggap sebagai sudut khusus. Ini dapat juga ditunjukkan secara visual.



Gambar 6.5 Menyatakan Teorema 4 dalam Simbol Visual

Penyajian secara visual dapat memberikan keuntungan-keuntungan. Seperti pada tahap-tahap berikut:

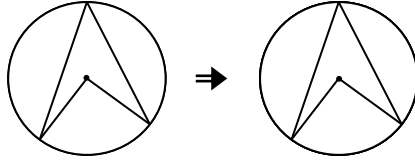
Berikut adalah salah satu kemungkinan. Perhatikan gambar pertama yang menunjukkan data.



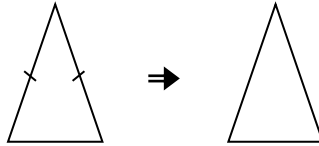
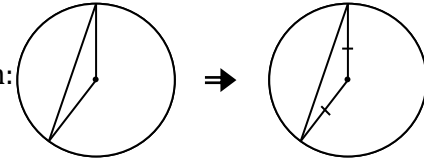
Gambar 6. 6 Keuntungan Penyajian Secara Visual

5. Satu contoh lebih lanjut; sebuah bukti pada teorema yang lebih umum dari yang sudah kita sebutkan terdahulu.

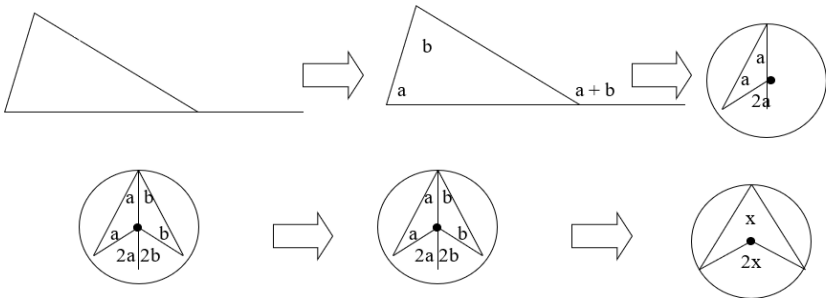
Teorema:



Pembuktian:



Gambar 6.7 Pembuktian Teorema dengan Simbol Visual



Gambar 6.8 Pembuktian Lebih Lanjut

Apakah ini lebih jelas daripada pembuktian verbal-aljabar, atau apakah pada kasus lain memang tidak ada kata yang bisa digunakan untuk pembuktian? Tujuan utama dari uraian di atas adalah menguji kontribusi tertentu dari

simbolisme visual dan menjawab pertanyaan mengenai keberadaan simbol visual yang tidak terlalu diperlukan.

C. Representasi dalam Pembelajaran Matematika

Kemampuan representasi matematis merupakan salah satu tujuan umum dari pembelajaran matematika di sekolah. Kemampuan ini sangat penting bagi siswa dan erat kaitannya dengan kemampuan komunikasi dan pemecahan masalah. Untuk dapat mengkomunikasikan sesuatu, seseorang perlu representasi baik berupa gambar, grafik, diagram, maupun bentuk representasi lainnya. Dengan representasi, masalah yang semula terlihat sulit dan rumit dapat dilihat dengan lebih mudah dan sederhana, sehingga masalah yang disajikan dapat dipecahkan dengan lebih mudah (Sabirin, 2014)

1. Pengertian Representasi

Representasi merupakan salah satu konsep psikologi yang digunakan dalam pendidikan matematika untuk menjelaskan beberapa fenomena penting tentang cara berpikir siswa (Mulyana, 2014). Representasi yang dimunculkan oleh peserta didik merupakan ungkapan-ungkapan dari gagasan-gagasan atau ide-ide matematis yang ditampilkan siswa dalam suatu upaya untuk mencari suatu solusi masalah yang sedang dihadapinya. NCTM, (2000)

dengan lebih sederhana mendefinisikan bahwa segala sesuatu yang dibuat siswa untuk mengeksternalisasikan dan memperlihatkan kerjanya disebut representasi. Dengan demikian, bilamana siswa memiliki akses representasi-representasi dan gagasan-gagasan yang mereka tampilkan, maka mereka memiliki sekumpulan alat yang siap secara signifikan akan memperluas kapasitas mereka dalam berpikir matematis.

Representasi merupakan proses pengembangan mental yang sudah dimiliki seseorang, yang terungkap dan divisualisasikan dalam berbagai model matematika, yakni: verbal, gambar, benda konkret, tabel, model-model manipulatif atau kombinasi dari semuanya (Steffe, Weigel, Schultz, Waters, Joice, & Reijs dalam Hudoyo, 2002). Cai, Lane, & Jacobsen (1996) menyatakan bahwa ragam representasi yang sering digunakan dalam mengkomunikasikan matematika antara lain: tabel, gambar, grafik, pernyataan matematika, teks tertulis, ataupun kombinasi semuanya.

Hiebert & Carpenter (1992) mengemukakan bahwa pada dasarnya representasi dapat dibedakan dalam dua bentuk, yakni representasi internal dan representasi eksternal. Berpikir tentang ide matematika yang kemudian dikomunikasikan memerlukan representasi eksternal yang

wujudnya antara lain: verbal, gambar dan benda konkret. Berpikir tentang ide matematika yang memungkinkan pikiran seseorang bekerja atas dasar ide tersebut merupakan representasi internal.

Cai, Lane, & Jacobcsin. (1996) membagi representasi yang digunakan dalam pendidikan matematika dalam lima jenis, meliputi representasi objek dunia nyata, representasi konkret, representasi simbol aritmetika, representasi bahasa lisan atau verbal dan representasi gambar atau grafik. Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa representasi adalah bentuk interpretasi pemikiran peserta didik terhadap suatu masalah, yang digunakan sebagai alat bantu untuk menemukan solusi dari masalah tersebut. Bentuk interpretasi peserta didik dapat berupa kata-kata, simbol matematika atau verbal, tulisan, gambar, tabel, grafik, benda konkret, atau simbol visual.

2. Representasi Matematis dalam Pembelajaran Matematika

Representasi sangat berperan dalam upaya mengembangkan dan mengoptimalkan kemampuan matematika siswa. NCTM dalam *Principle and Standars for School Mathematics* (Standars, 2000) mencantumkan representasi (*representation*) sebagai standar proses kelima setelah *problem solving, reasoning, communication,*

and connection. Menurut Jones (2000) beberapa alasan penting yang mendasarinya adalah sebagai berikut:

- 1) Kelancaran dalam melakukan translasi di antara berbagai bentuk representasi berbeda, merupakan kemampuan mendasar yang perlu dimiliki peserta didik untuk membangun konsep dan berpikir matematis.
- 2) Cara guru dalam menyajikan ide-ide matematika melalui berbagai representasi akan memberikan pengaruh yang sangat besar terhadap pemahaman peserta didik dalam mempelajari matematika.
- 3) Peserta didik membutuhkan latihan dalam membangun representasinya sendiri sehingga memiliki kemampuan dan pemahaman konsep yang kuat dan fleksibel yang dapat digunakan dalam memecahkan masalah.

Meskipun demikian, ada beberapa keberatan dari para ahli matematika yang berkaitan dengan dimasukkannya representasi sebagai standar proses seperti yang diungkapkan Jones (2000) sebagai berikut:

- 1) Anggapan bahwa representasi adalah sinonim dengan model matematika. Ini berarti bahwa representasi sudah merupakan bagian dari standar isi, khususnya dalam aljabar yang berkaitan dengan rumus-rumus dan

fungsi yang dideskripsikan sebagai standar bahwa "Peserta didik dapat menggunakan model-model matematika dan menganalisis perubahan dalam konteks *real* dan abstrak."

- 2) Representasi adalah hanya bagian dari proses pemecahan masalah dan hal ini sudah tercakup dalam standar pemecahan masalah. Selain itu, kelebihan dari representasi sebagai standar proses tidak begitu penting. Standar proses dari pemecahan masalah, komunikasi, penalaran dan koneksi semua memuat standar isi yang tidak dibatasi dalam representasinya
- 3) Representasi sebagai bagian dari perkembangan kognitif tidak memberikan jaminan memiliki peranan yang menonjol dalam sajian masalah matematika.

Menanggapi keberatan di atas, beberapa ahli pendidikan matematika dan peneliti aliran kognitif menyatakan bahwa representasi tidak hanya membahas terbatas pada penggunaan notasi simbol untuk menterjemahkan suatu situasi ke langkah matematika. Representasi lebih dari sekedar produk fisik hasil observasi. Representasi juga merupakan proses kognitif yang terjadi secara internal. Representasi adalah suatu aktivitas interpretasi konsep atau masalah dengan memberikan makna (Hudoyo, 2002). Dalam pembelajaran,

melalui representasi eksternal peserta didik, guru dapat menebak apa yang sesungguhnya terjadi yang merupakan representasi internal dalam benak peserta didik, sehingga guru dapat melakukan langkah yang tepat untuk membawa siswa belajar.

Sebagai salah satu standar proses maka NCTM (2000) menetapkan standar representasi yang diharapkan dapat dikuasai peserta didik selama pembelajaran di sekolah yaitu:

- 1) Membuat dan menggunakan representasi untuk mengenal, mencatat atau merekam, dan mengkomunikasikan ide-ide matematika;
- 2) Memilih, menerapkan, dan melakukan translasi antar representasi matematis untuk memecahkan masalah;
- 3) Menggunakan representasi untuk memodelkan dan menginterpretasikan fenomena fisik, sosial, dan fenomena matematika.

Ketika peserta didik dihadapkan pada suatu situasi masalah matematika dalam pembelajaran di kelas, mereka akan berusaha memahami masalah tersebut dan menyelesaikannya dengan cara-cara yang mereka ketahui. Cara-cara tersebut sangat terkait dengan pengetahuan sebelumnya yang sudah ada yang berhubungan dengan masalah yang disajikan. Salah satu bagian dari upaya yang

dapat dilakukan siswa adalah dengan membuat model atau representasi dari masalah tersebut. Model atau representasi yang dibuat bisa bermacam-macam tergantung pada kemampuan masing-masing individu dalam menginterpretasikan masalah yang ada.

Pembelajaran matematika di kelas hendaknya memberikan kesempatan yang cukup bagi peserta didik untuk dapat melatih dan mengembangkan kemampuan representasi matematis sebagai bagian yang penting dalam pemecahan masalah. Masalah yang disajikan disesuaikan dengan isi dan kedalaman materi pada jenjang masing-masing dengan memperhatikan pengetahuan awal atau prasyarat yang dimiliki siswa.

Salah satu contoh masalah matematika dalam NCTM (2000) yang terkait dengan representasi matematis disajikan dalam contoh berikut:

"Apa yang akan terjadi terhadap luas daerah sebuah persegi panjang jika panjang sisinya menjadi dua kali panjang semula?"

Masalah di atas menarik untuk disajikan karena peserta didik ditantang untuk berpikir menggunakan informasi yang tersedia dan mengaitkannya dengan pengetahuan yang sudah mereka miliki sebelumnya. Masalah tersebut juga memungkinkan untuk diselesaikan

dengan lebih dari satu cara. Salah satu contoh pemecahan masalah yang mungkin dilakukan peserta didik adalah dengan menyelesaikannya secara langsung yakni menggunakan representasi simbolik sebagai berikut:

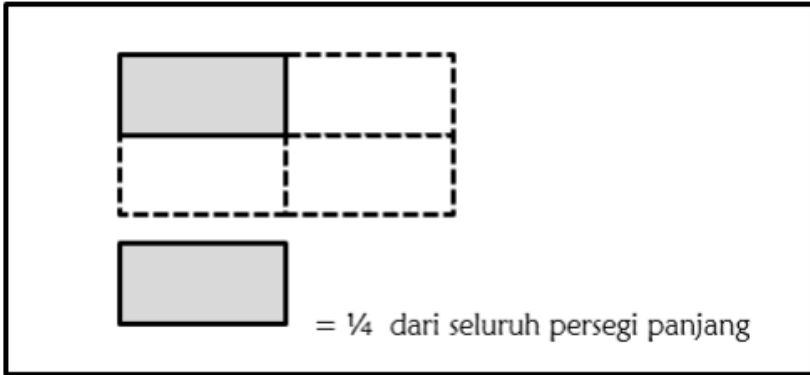
“Misalkan persegi panjang semula panjangnya a dan lebarnya b , sehingga diperoleh luasnya adalah $L = a \times b = ab$.

Jika panjang sisinya menjadi dua kali panjang semula, maka panjangnya $2a$ dan lebarnya $2b$, sehingga luasnya menjadi $L = 2a \times 2b = 4ab$

Jadi dapat disimpulkan bahwa luas persegi panjang yang baru menjadi 4 kali luas persegi panjang semula.”

Selain cara tersebut, sebagian peserta didik mungkin ada yang berpikir tergesa-gesa dan langsung menjawab bahwa luasnya menjadi dua kali dari luas persegi panjang semula. Mereka menduga atau berargumen bahwa jika panjang sisinya dua kali panjang semula tentu luasnya juga akan menjadi dua kali luas persegi panjang semula. Guru harus berusaha memberikan pemahaman yang lebih mudah dipahami agar pemikiran peserta didik tidak berhenti sampai disitu, misalnya dengan menanyakan kembali jawaban mereka atau meminta untuk berpikir kembali menggunakan cara lain.

Masalah di atas akan lebih mudah dipahami jika disajikan dengan menggunakan representasi gambar sebagai berikut:



Gambar 6. 9 Representasi peserta didik sebagai hasil dari menduakalikan ukuran panjang sisi-sisi persegi panjang

Dari hasil representasi Gambar 6. 9, terlihat bahwa penyelesaian dari masalah yang diberikan dapat lebih mudah ditemukan dan dapat menunjukkan dengan jelas bahwa persegi panjang yang baru besarnya empat kali ukuran semula. Aktivitas yang terjadi dalam pembelajaran tidak hanya menunjukkan bagaimana cara peserta didik menjawab tetapi juga ada proses pembenaran terhadap jawaban peserta didik yang lain.

RANGKUMAN

- ❖ Simbol visual dan verbal digunakan dalam matematika secara bersamaan maupun terpisah. Oleh karena itu, kita menemukan diagram-diagram dengan penjelasan verbal dan bentuk perhitungan-perhitungan trigonometri dan kita menemukan kurva disertai persamaannya, tetapi kita juga menemukan bentuk aljabar tanpa gambar atau diagram.
- ❖ Representasi adalah untuk interpretasi pemikiran peserta didik terhadap suatu masalah, yang digunakan sebagai alat bantu untuk menemukan solusi dari masalah tersebut.
- ❖ Representasi sangat berperan dalam upaya mengembangkan dan mengoptimalkan kemampuan matematika peserta didik, beberapa alasan penting yang mendasarinya adalah sebagai berikut:
 1. Kelancaran dalam melakukan translasi di antara berbagai bentuk representasi berbeda, merupakan kemampuan mendasar yang perlu dimiliki peserta didik untuk membangun konsep dan berpikir matematis.

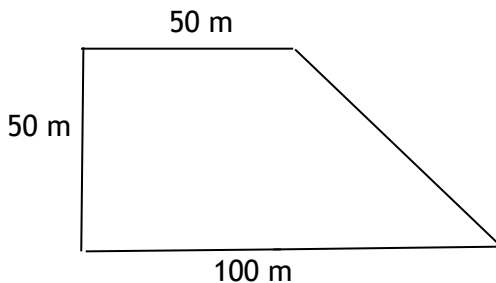
2. Cara guru dalam meyajikan ide-ide matematika melalui berbagai representasi akan memberikan pengaruh yang sangat besar terhadap pemahaman peserta didik dalam mempelajari matematika.
 3. Siswa membutuhkan latihan dalam membangun representasinya sendiri sehingga memiliki kemampuan dan pemahaman konsep yang kuat dan fleksibel yang dapat digunakan dalam memecahkan masalah.
- ❖ Sebagai salah satu standar proses maka NCTM (2000) menetapkan standar representasi yang diharapkan dapat dikuasai siswa selama pembelajaran di sekolah yaitu:
 1. Membuat dan menggunakan representasi untuk mengenal, mencatat atau merekam, dan mengkomunikasikan ide-ide matematika;
 2. Memilih, menerapkan, dan melakukan translasi antar representasi matematis untuk memecahkan masalah;
 - ❖ Menggunakan representasi untuk memodelkan dan menginterpretasikan fenomena fisik, sosial, dan fenomena matematika.

Latihan Soal 6.1

Pertemuan ke-9 (*untuk mengetahui kemampuan analisis mahasiswa dalam memahami materi tentang representasi matematis*)

1. Jelaskan perbedaan simbol verbal dan simbol visual!
2. Jelaskan fungsi simbol visual dalam geometri!
3. Jelaskan peran representasi matematis dalam pembelajaran matematika!
4. Mengapa kemampuan representasi menjadi salah satu standar proses dalam NCTM (2000)!
5. Buatlah satu contoh masalah matematika yang terkait dengan representasi matematis!

QUIS!



Buatlah empat bangun datar yang kongruen (memiliki bentuk dan ukuran yang sama) di dalam bangun trapesium di atas!

SISTEM NUMERASI

A. Sejarah Perkembangan Bilangan

Sejarah perkembangan teori bilangan dapat dikelompokkan menjadi dua masa (Rosen, 2000):

1. Bilangan pada Masa Prasejarah (Sebelum Masehi)

Konsep bilangan dan proses berhitung berkembang dari zaman sebelum ada sejarah (artinya tidak tercatat sejarah kapan dimulainya). Mungkin bisa diperdebatkan, tapi diyakini sejak zaman paling primitif pun manusia memiliki “rasa” terhadap apa yang dinamakan bilangan, setidaknya untuk mengenali mana yang “lebih banyak” atau mana yang “lebih sedikit” terhadap berbagai benda.

Hal ini dibuktikan dengan ditemukannya benda matematika tertua, yaitu tulang Lebombo di pegunungan Lebombo di Swaziland dan mungkin berasal dari tahun 35.000 SM. Tulang ini berisi 29

torehan yang berbeda yang sengaja digoreskan pada tulang fibula baboon. Terdapat bukti bahwa kaum perempuan biasa menghitung untuk mengingat siklus haid mereka; 28 sampai 30 goresan pada tulang atau batu, diikuti dengan tanda yang berbeda. Tulang Ishango, ditemukan di dekat batang air Sungai Nil (timur laut Kongo), berisi sederetan tanda lidi yang digoreskan di tiga lajur memanjang pada tulang itu. Tafsiran umum adalah bahwa tulang Ishango menunjukkan peragaan terkuno yang sudah diketahui tentang barisan bilangan prima.

2. Bilangan pada Suku Bangsa Babilonia

Matematika Babilonia merujuk pada seluruh matematika yang dikembangkan oleh bangsa Mesopotamia (kini Iraq) sejak permulaan Sumeria hingga permulaan peradaban helenistik. Dinamai "Matematika Babilonia" karena peran utama kawasan Babilonia sebagai tempat untuk belajar. Pada zaman peradaban helenistik, Matematika Babilonia berpadu dengan Matematika Yunani dan Mesir untuk membangkitkan Matematika Yunani. Kemudian di bawah Kekhalifahan Islam, Mesopotamia, terkhusus

Baghdad, sekali lagi menjadi pusat penting pengkajian Matematika Islam.

Bertentangan dengan langkanya sumber pada Matematika Mesir, pengetahuan Matematika Babilonia diturunkan dari lebih daripada 400 lempengan tanah liat yang digali sejak 1850-an. Lempengan ditulis dalam tulisan paku ketika tanah liat masih basah, dan dibakar di dalam tungku atau dijemur di bawah terik matahari. Beberapa di antaranya adalah karya rumahan.

Bukti terkini matematika tertulis adalah karya bangsa Sumeria, yang membangun peradaban kuno di Mesopotamia. Mereka mengembangkan sistem rumit metrologi sejak tahun 3000 SM. Dari kira-kira 2500 SM ke muka, bangsa Sumeria menuliskan tabel perkalian pada lempengan tanah liat dan berurusan dengan latihan-latihan geometri dan soal-soal pembagian. Jejak terdini sistem bilangan Babilonia juga merujuk pada periode ini.

Sebagian besar lempengan tanah liat yang sudah diketahui berasal dari tahun 1800 sampai 1600 SM, dan meliputi topik-topik pecahan, aljabar, persamaan kuadrat dan kubik, dan perhitungan bilangan regular, invers perkalian, dan bilangan prima kembar.

Lempengan itu juga meliputi tabel perkalian dan metode penyelesaian persamaan linear dan persamaan kuadrat. Lempengan Babilonia 7289 SM memberikan hampiran bagi $\sqrt{2}$ yang akurat sampai lima tempat desimal.

Matematika Babilonia ditulis menggunakan sistem bilangan seksagesimal (basis-60). Dari sinilah diturunkannya penggunaan bilangan 60 detik untuk semenit, 60 menit untuk satu jam, dan 360 (60×6) derajat untuk satu putaran lingkaran, juga penggunaan detik dan menit pada busur lingkaran yang melambangkan pecahan derajat. Juga, tidak seperti orang Mesir, Yunani, dan Romawi, orang Babilonia memiliki sistem nilai-tempat yang sejati, di mana angka-angka yang dituliskan di lajur lebih kiri menyatakan nilai yang lebih besar, seperti di dalam sistem desimal.

3. Teori Bilangan pada Suku Bangsa India

Sulba Sutras (kira-kira 800–500 SM) merupakan tulisan-tulisan geometri yang menggunakan bilangan irasional, bilangan prima, aturan tiga dan akar kubik; menghitung akar kuadrat dari 2 sampai sebagian dari seratus ribuan; memberikan metode konstruksi lingkaran yang luasnya menghampiri persegi yang diberikan,

menyelesaikan persamaan linear dan kuadrat mengembangkan triple Pythagoras secara aljabar, dan memberikan pernyataan dan bukti numerik untuk teorema Pythagoras.

Pāṇini (kira-kira abad ke-5 SM) yang merumuskan aturan-aturan tata bahasa Sanskerta menggunakan notasi yang sama dengan notasi matematika modern, dan menggunakan aturan-aturan meta, transformasi, dan rekursi. Pingala (kira-kira abad ke-3 sampai abad pertama SM) di dalam risalah *prosodynya* menggunakan alat yang bersesuaian dengan sistem bilangan biner. Pembahasannya tentang kombinatorika bersesuaian dengan versi dasar dari teorema binomial. Karya Pingala juga berisi gagasan dasar tentang bilangan Fibonacci.

Pada sekitar abad ke 6 SM, kelompok Pythagoras mengembangkan sifat-sifat bilangan lengkap (*perfect number*), bilangan bersekawan (*amicable number*), bilangan prima (*prime number*), bilangan segitiga (*triangular number*), bilangan bujur sangkar (*square number*), bilangan segilima (*pentagonal number*) serta bilangan-bilangan segibanyak (*figurate numbers*) yang lain. Salah satu sifat bilangan segitiga yang terkenal sampai sekarang disebut triple Pythagoras, yaitu :

$a.a + b.b = c.c$ yang ditemukannya melalui perhitungan luas daerah bujur sangkar yang sisi-sisinya merupakan sisi-sisi dari segitiga siku-siku dengan sisi miring (*hypotenosa*) adalah c , dan sisi yang lain adalah a dan b . Hasil kajian yang lain yang sangat populer sampai sekarang adalah pembedaan bilangan prima dan bilangan komposit. Bilangan prima adalah bilangan bulat positif lebih dari satu yang tidak memiliki faktor positif kecuali 1 dan bilangan itu sendiri. Bilangan positif selain satu dan selain bilangan prima disebut bilangan komposit. Catatan sejarah menunjukkan bahwa masalah tentang bilangan prima telah menarik perhatian matematikawan selama ribuan tahun, terutama yang berkaitan dengan berapa banyaknya bilangan prima dan bagaimana rumus yang dapat digunakan untuk mencari dan membuat daftar bilangan prima.

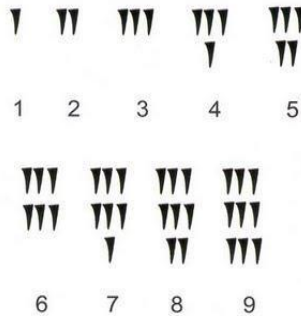
Dengan berkembangnya sistem numerasi, berkembang pula cara atau prosedur aritmetis untuk landasan kerja, terutama untuk menjawab permasalahan umum, melalui langkah-langkah tertentu, yang jelas yang disebut dengan algoritma. Awal dari algoritma dikerjakan oleh Euclid. Pada sekitar abad 4

S.M. Euclid mengembangkan konsep-konsep dasar geometri dan teori bilangan. Buku Euclid yang ke VII memuat suatu algoritma untuk mencari Faktor Persekutuan Terbesar dari dua bilangan bulat positif dengan menggunakan suatu teknik atau prosedur yang efisien, melalui sejumlah langkah yang terhingga. Kata algoritma berasal dari *algorism*. Pada zaman Euclid, istilah ini belum dikenal. Kata *algorism* bersumber dari nama seorang muslim dan penulis buku terkenal pada tahun 825 M., yaitu Abu Ja'far Muhammed ibn Musa Al-Khowarizmi. Bagian akhir dari namanya (Al-Khowarizmi), mengilhami lahirnya istilah *Algorism*. Istilah algoritma masuk kosakata kebanyakan orang pada saat awal revolusi komputer, yaitu akhir tahun 1950.

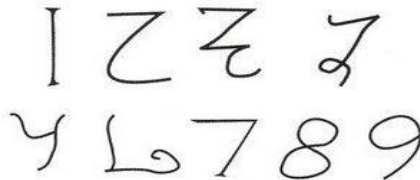
Pada abad ke 3 S.M., perkembangan bilangan ditandai oleh hasil kerja Erathosthenes, yang sekarang terkenal dengan nama Saringan Erastosthenes (*The Sieve of Erastosthenes*). Dalam enam abad berikutnya, Diopanthus menerbitkan buku yang bernama *Arithmetika*, yang membahas penyelesaian persamaan didalam bilangan bulat dan bilangan rasional, dalam bentuk lambang (bukan bentuk/bangun geometris

seperti yang dikembangkan oleh Euclid). Dengan kerja bentuk lambang ini, Diopanthus disebut sebagai salah satu pendiri aljabar.

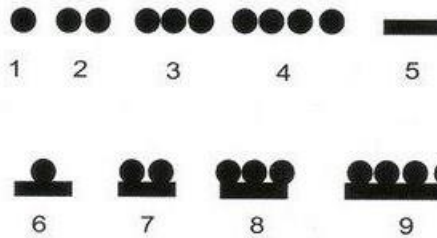
Berikut ini adalah simbol-simbol bilangan yang ditemukan :



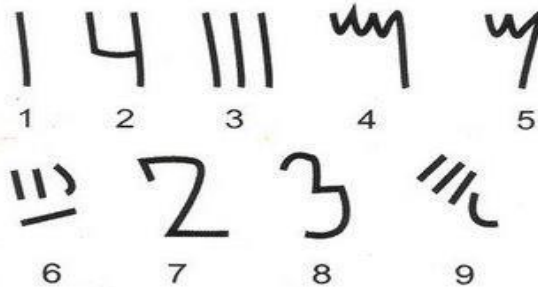
Bilangan *Cunieform* yang digunakan bangsa Babilonia sejak tahun 5000 SM



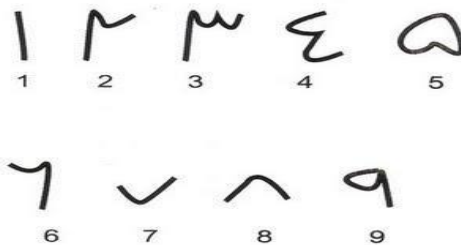
Lambang bilangan bangsa Hindu-Arab kuno pada abad X



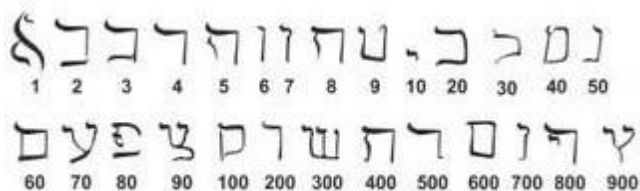
Lambang bilangan yang digunakan bangsa Maya di Amerika pada tahun 500 SM



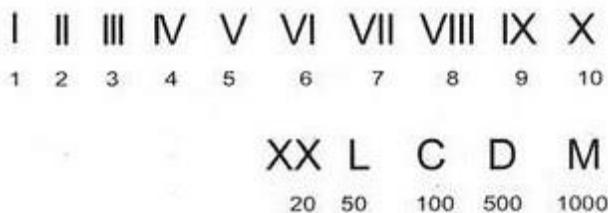
Lambang bilangan Hieroglif yang digunakan



Lambang bilangan bangsa Arab pada abad XI



Lambang bilangan bangsa Yunani Kuno



Lambang bilangan bangsa Romawi yang masih digunakan hingga saat ini

4. Bilangan pada Masa Sejarah (Masehi)

Awal kebangkitan teori bilangan modern dipelopori oleh Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783), J.L. Lagrange (1736-1813), A.M. Legendre (1752-1833), Dirichlet (1805-1859), Dedekind (1831-1916), Riemann (1826-1866), Giuseppe Peano (1858-1932), Poisson (1866-1962), dan Hadamard (1865-1963). Sebagai seorang pangeran matematika, Gauss begitu terpesona terhadap keindahan dan kecantikan teori

bilangan, dan untuk melukiskannya, ia menyebut teori bilangan sebagai *the queen of mathematics*.

Pada masa ini, teori bilangan tidak hanya berkembang sebatas konsep, tapi juga banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Hal ini dapat dilihat pada pemanfaatan konsep bilangan dalam metode kode baris, kriptografi, komputer, dan lain sebagainya.

B. Himpunan

Sudah dinyatakan bahwa bilangan adalah ide yang lebih mendasar. Sebelum kita membilang, kita harus mengetahui objek-objek yang termasuk dan objek yang tidak termasuk. Misalnya dalam sebuah ruangan yang penuh dengan orang, kemudian kita diminta membilang banyaknya gadis yang cantik. Kesulitan kita yang pertama adalah menentukan siapa yang termasuk di dalamnya? Andaikan kita dapat menentukan menurut aturan kita sendiri, apakah orang lain menyetujui aturan kita itu? Sangatlah berbahaya jika kita kehilangan salah satu dasar matematika yang paling penting yaitu kesepakatan (persetujuan) dasar yang rasional.

Jadi untuk tujuan-tujuan matematika kita harus menolak permintaan-permintaan seperti di atas dan

menyetujui untuk membatasi perhatian kita pada kumpulan objek-objek yang didefinisikan dengan baik. Selanjutnya, kumpulan objek yang didefinisikan dengan baik itu disebut dengan himpunan. Sedangkan objek-objeknya disebut elemen.

Cara untuk mendefinisikan suatu himpunan adalah dengan mendaftar elemen-elemennya. Kita dapat mengumpulkan beberapa kriteria dan mengumpulkan objek-objek yang sesuai dengan karakter tersebut. Sebagai contoh, himpunan nama-nama buah yang berwarna merah atau himpunan pohon-pohon di pulau Inggris. Kita dapat membentuk beberapa kumpulan objek yang kita pilih dari kumpulan yang terdefinisi dengan baik dan mencoba menemukan sesuatu yang dimiliki bersama-sama. Hal ini sangat baik dalam pencapaian konsep baru dan merupakan salah satu cara yang akan digunakan dalam pengembangan konsep bilangan (Risnawati, 2013).

Tidak ada pembatasan pada jenis objek dari himpunan. Objek tersebut dapat berupa objek material (contohnya himpunan uang logam dalam saku saya), atau objek abstrak (contohnya tujuh petisi kardinal). Bahkan kita memiliki suatu himpunan tanpa objek sama sekali, misalnya himpunan sapi yang bersayap. Himpunan yang tidak mempunyai elemen disebut *himpunan kosong*. Kita

juga mempunyai himpunan yang elemen-elemennya merupakan suatu himpunan. Misalnya “Manchester United” adalah nama tim sepak bola yang elemen-elemennya terdiri atas para pemain sepak bola. Himpunan ini merupakan elemen dari himpunan lain yang elemen-elemennya adalah tim-tim sepak bola di Asosiasi sepak bola. Contoh seperti ini sangat banyak dalam kehidupan sehari-hari.

Ide lain yang kita perlukan adalah himpunan bagian. Misalnya, himpunan peranko-peranko di laci meja. Saya boleh membaginya menjadi himpunan peranko satu sen, himpunan peranko dua sen, dan sebagainya. Himpunan-himpunan tersebut merupakan himpunan bagian dari himpunan pertama. Dengan kata lain, “Semua himpunan tersebut merupakan himpunan-himpunan bagian dari semesta pembicaraan”.

Pentingnya ide tentang suatu himpunan dan hubungan antar ide akan berkembang sebagai jembatan antara fungsi inteligensi dalam kehidupan sehari-hari dengan pemikiran matematis. Dari satu sisi, konsep suatu himpunan merupakan pengenalan sesuatu yang kita lakukan setiap saat mengklasifikasikan sesuatu yang kita temui. “Apakah ini?” berarti “ini tergolong pada kelas apa atau himpunan apa?”. Tetapi pertama kali secara eksplisit

ide tentang suatu himpunan dan ide yang didapat dari himpunan akan banyak bermanfaat (membantu) dalam menjelaskan ide matematika yang dasar dan ide matematika yang tinggi.

C. Numerasi

Bilangan adalah suatu konsep matematika yang bersifat abstrak yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran atau suatu ide yang digunakan untuk mengabstraksikan banyaknya anggota suatu himpunan. Simbol ataupun lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut sebagai angka atau lambang bilangan. Misalnya, tulisan atau ketikan 1 yang terlihat saat ini bukanlah bilangan 1, melainkan hanya lambang dari bilangan 1 yang tertangkap oleh indera penglihatan berkat keberadaan unsur-unsur kimia yg peka cahaya dan digunakan untuk menampilkan warna dan gambar. Demikian pula jika kita melihat lambang yang sama di papan tulis, yang terlihat bukanlah bilangan 1, melainkan serbuk dari kapur tulis yang melambangkan bilangan 1. Seperti yang dinyatakan pada bab V 'five', 'cinq', '5', 'V', '101' adalah angka-angka yang berbeda untuk bilangan yang sama. Numerasi berarti sekumpulan lambang dan aturan pokok

untuk menuliskan bilangan. Apakah sistem numerasi sangat penting untuk konsep bilangan?

Untuk menjawab pertanyaan di atas, perhatikan penjelasan berikut. Jika kita mencoba menjumlahkan dalam angka Romawi, terlebih lagi jika kita mencoba mengalikan. Bandingkan penjumlahan berikut:

$$\begin{array}{r} \text{XXXIV} \text{ dan} \quad 34 \\ + \text{XXXIX} \quad \quad + \underline{39} \end{array}$$

atau perkalian berikut ini:

$$\begin{array}{r} \text{XXIV} \quad \quad \text{dan} \quad 24 \\ \times \underline{\text{VII}} \quad \quad \quad \times \underline{7} \end{array}$$

Perkalian yang lebih panjang :

$$\begin{array}{r} \text{XXIV} \quad \quad \text{dan} \quad 24 \\ \times \underline{\text{XXXIX}} \quad \quad \quad \times \underline{39} \end{array}$$

Angka Romawi bahkan tidak memberitahu kita secara sepintas apa jenis ukuran suatu bilangan. Meskipun XLIX adalah satu kurangnya dari L, hal itu tidak terlihat. Tidak heran bahkan perkalian sederhana adalah suatu tugas untuk ahli matematika yang profesional, dan perhitungan itu harus diselesaikan dengan bantuan seperti *calculi* (batu kerikil) (Skemp, 1971).

Kesalahan utama sistem Romawi adalah gagal membuat penggunaan fakta bahwa jika kita menambah satu

himpunan dari 2 dan satu himpunan dari 3, kita mendapat satu himpunan dari 5; anggota dari himpunan ini adalah objek tunggal atau bahkan himpunan dari himpunan. Jadi 2 pertandingan dan 3 pertandingan bersama menghasilkan 5 pertandingan. Juga 2 kotak dari 40 dan 3 kotak dari 40 menghasilkan 5 kotak dari 40, dll. Sehingga satu abstraksi $2 + 3 = 5$ memuat semua operasi ini. Dalam sistem Hindu-Arab, hasil ini digunakan dalam bentuk 2 himpunan dari 10 bersama dengan 3 himpunan dari 10 menghasilkan 5 himpunan dari 10, dan dengan cara yang sama 2 himpunan dari 10 himpunan dari 10 bersama dengan 3 himpunan dari 10 himpunan dari 10 menghasilkan 5 himpunan dari 10 himpunan dari 10 dst. Lebih jelasnya dapat ditulis sebagai berikut : $20 + 30 = 50$ dan $200 + 300 = 500$. Jika kamu menemukan himpunan pernyataan kedua lebih mudah untuk diikuti daripada yang pertama, ini tentu saja akan menjadi bagian karena kebiasaan, tetapi juga menunjukkan nilai singkatnya dalam suatu notasi untuk penanganan yang mudah dari apa yang terlihat, dengan perluasan ke dalam kalimat lisan, untuk memperoleh cukup banyak informasi (Skemp, 1971).

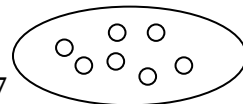
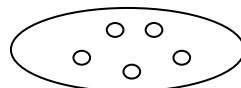
Dalam sistem Hindu-Arab kita belajar seperti menjumlahkan semua pasangan bilangan berbentuk

$n_1 + n_2$, dimana n_1 dan n_2 adalah sebarang bilangan 1, 2, 3,9. Oleh karena sebarang bilangan pertama dapat ditambahkan dengan sebarang bilangan kedua, hal ini berakibat 81 hasil hafalan, yang berkurang sampai 45 berdasarkan fakta bahwa $7 + 5 = 5 + 7$ dst. Dan ini menunjukkan bahwa alasan utama mengapa matematika Romawi tidak pernah mengalami kemajuan adalah kekurangan mereka atas notasi aritmatika yang bagus.

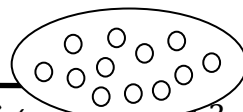
D. Penjumlahan

Dalam percakapan sehari-hari kita menggunakan 'tambah' untuk banyak kegiatan mengkombinasi yang berbeda. Contoh tambahkan telur masak. Disini kita perlu membedakan antara cara mengkombinasikan 2 himpunan, yang akan kita sebut penggabungan, dan cara mengkombinasikan dua bilangan yang akan kita sebut penjumlahan. Sehingga menjumlahkan 2 bilangan sebut 5 dan 7, berhubungan dengan

mengambil sebarang himpunan yang banyak anggotanya (bilangannya) lima dan sebarang himpunan yang banyak anggotanya (bilangannya) 7



menggabungkan keduanya menjadi satu



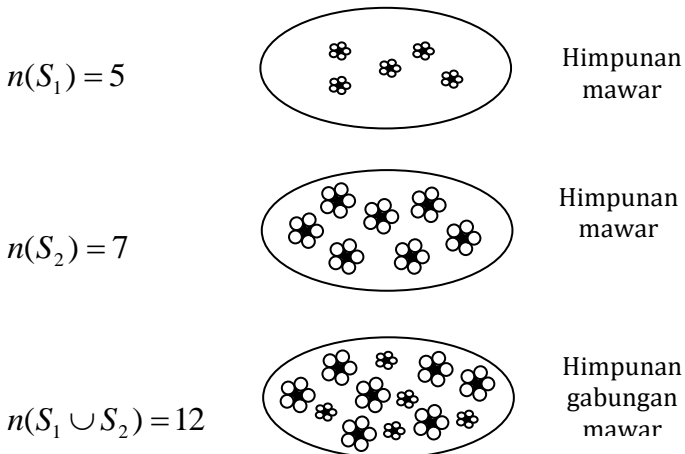
himpunan dan menemukan bilangan dari himpunan baru ini. Himpunan hasilnya disebut gabungan dari dua himpunan aslinya.

Bilangan hasilnya adalah jumlah dari dua bilangan aslinya.

Kita membutuhkan cara yang lebih ringkas untuk menulis semua ini. Misal S_1 dan S_2 adalah sebarang dua himpunan (disjoin), dan $S_1 \cup S_2$ untuk gabungannya. Maka, secara umum, jika $n(S)$ berarti 'bilangan dari himpunan S ' dst.

$$n(S_1) + n(S_2) = n(S_1 \cup S_2)$$

Ini secara jelas menunjukkan hubungan antara penggabungan dua himpunan dan penambahan bilangannya. Contoh lain yang belum mengenal notasi di atas.



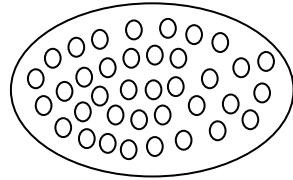
Gagasan yang memerlukan penggabungan adalah bahwa menggabung dua himpunan mawar dan

menambahkan bilangan-bilangannya, melibatkan dua tingkat pengabstraksian; secara fisik meletakkan dua ikat bunga mawar bersama-sama, yang mana suatu tindakan di dunia luar, sedangkan menjumlah bilangan-bilangan itu adalah suatu operasi mental.

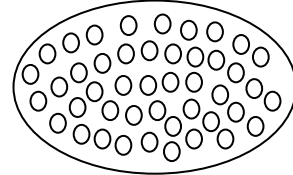
Sama halnya pada saat lima menggambarkan sifat semua himpunan dengan memasang ('satu', 'dua', 'tiga', 'empat', 'lima'), sehingga $5+7=12$ menunjukkan keadaan semua unit himpunan. Karena hasil hanya tergantung pada banyaknya himpunan yang bersangkutan, kita dapat mengerjakan dengan himpunan apapun (yang mempunyai anggota), kita bisa gunakan jari, batang korek api, kubus atau kertas. Sampai didapatkan hasilnya, selanjutnya dapat direkam, diingat, dan digunakan cara pendek untuk menentukan setiap gabungan dari dua himpunan dengan menggunakan cara menghitung tersebut.

Sebagai permulaan, kita belajar bahwa terdapat himpunan yang anggotanya sebanyak lima digabung dengan himpunan yang anggotanya sebanyak 7 menjadi himpunan yang anggotanya 12. Dapat diabstraksikan "Lima ditambah tujuh adalah 12" atau $5+7=12$.

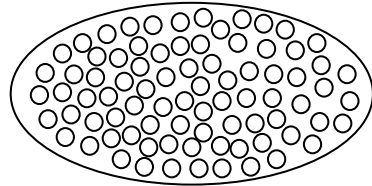
Pada saat kita menjumlahkan $37+45$, bisa ditentukan jawabannya dengan mengambil himpunan yang beranggotakan 37



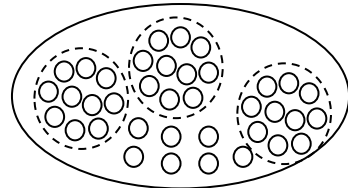
dan mengambil himpunan yang anggotanya sebanyak 45



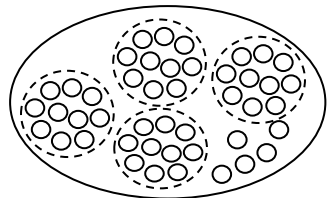
Gabungan dua himpunan akan menjadi himpunan baru yang anggotanya berapa?



Jelaslah metode ini menjadi susah untuk diterapkan. Kita bisa menggunakan cara yang singkat, yaitu 3 himpunan yang anggotanya sebanyak 10 satuan dan 7 satuan.

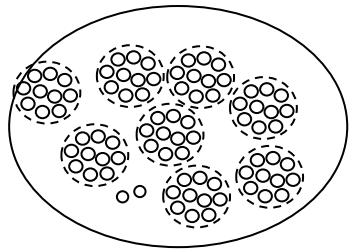


Sama halnya pada himpunan yang anggotanya sebanyak 45.



Setelah gabungan dua himpunan yang telah disusun dengan cara ini, kita hanya menghitung banyaknya himpunan yang anggotanya sebanyak 10 dan satuan anggota yang lain dalam jumlah yang relatif kecil, yang perlu diingat pada saat kita mempunyai 10 satuan dianggap sebagai 1 himpunan yang anggotanya sebanyak 10.

Gabungan dari keduanya menunjukkan terdapat 7 buah himpunan yang anggotanya sebanyak 10, dan 12 yang merupakan satuan yang dapat disusun lagi menjadi 8 buah himpunan yang anggotanya sebanyak 10 dan 2 satuan.



Pada tingkat penghitungan kita perlu mengorganisasikan notasi bilangan. Bilangan yang berada di sebelah kanan merupakan satuan, selanjutnya disebelah kirinya adalah bilangan puluhan, ratusan dan seterusnya.

Jadi dengan menulis bilangan pada kolom yang tepat kita bisa menjumlahkan setiap satuan, puluhan dan sebagainya, yang sesuai untuk dihitung. Kita tahu bahwa menjumlahkan tujuh dan lima adalah dua belas. Namun notasi 12, ditulis

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 7 \\
 \hline
 4 \quad 5 \\
 7 \quad \text{twelve} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 1 \quad 2 \\
 \hline
 8 \quad 2
 \end{array}$$

tiap kolom satu digit (aturan nilai), secara otomatis aturannya 1 sebagai puluhan dan 2 sebagai satuan.

Cara ini disebut sebagai metode 'nilai', nilai tempat dari suatu bilangan, yaitu satuan, puluhan, ratusan, ribuan, puluh ribuan, dan seterusnya. Nilai tempat ini digunakan untuk melakukan penjumlahan dengan cara bersusun panjang. Ini merupakan penerapan prinsip bahwa bilangan dari himpunan tidak tergantung pada anggotanya.

Bandingkan penjumlahan tersebut dengan notasi yang sama pada notasi bilangan Romawi XXXVII
yang tidak memberikan bantuan apapun. XLV

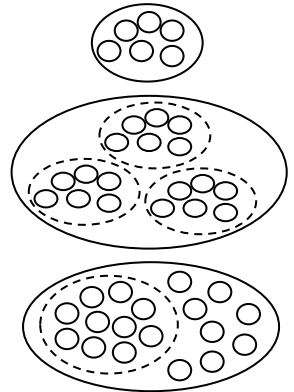
XXXVII menggambarkan bilangan 37 yang digunakan dua kali sebagai simbol. Tiga X menunjukkan 30 yang tidak praktis. Namun untuk 40 pada baris berikutnya, satu L digunakan untuk menunjukkan 50 diletakkan setelah X artinya 10 kurangnya.

Sehingga XV artinya 10 lebihnya dari V. Hal ini menunjukkan konsistensi yang kurang, dan letak simbol menunjukkan bilangan lebih sekaligus kurang yang tidak berhubungan satu sama lain (Skemp, 1971).

E. Perkalian

Keuntungan dari notasi bilangan Hindu-Arab menjadi lebih berarti ketika bilangan tersebut dikalikan. Kita mulai dari $6 \times 3 = 18$ maksudnya dalam himpunan objek.

Kita mulai dengan himpunan 6 dan kombinasi dengan 3 dari himpunan tersebut. Hasilnya dapat disusun ulang dengan 1 himpunan dengan 10 satuan dan 8 satuan.



Seperti yang dapat kita lakukan pada saat menjumlahkan bilangan dengan metode yang direpresentasikan berdasarkan satuan, puluhan, ratusan dan sebagainya, sehingga kita dapat mengalikan bilangan yang besar dengan cara menjumlahkan satuan, kemudian membawa bilangan yang dibutuhkan pada kolom selanjutnya dari kanan ke kiri (seperti penulisan versi Arab). Contohnya : 586×3

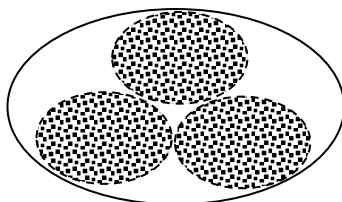
Penyingkatan notasi yang tidak sesuai menyebabkan ketidakjelasan hal yang harus dilakukan.

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 8 \quad 6 \\
 \underline{\quad \quad 3} \\
 1 \ 7_2 \quad 5_1 \quad 8
 \end{array}$$

menghitung 6×3 , 80×3 , 500×3 , kemudian menjumlahkan ketiga hasilnya. Persamaan tersebut menunjukkan bahwa dengan menggunakan kedua metode diperoleh hasil yang sama.

Bagaimana cara menghitung operasi yang ada pada ruas kanan? Sementara perkalian 3 yang dikenal hanya sampai pada 9×3 dan kita tahu hal ini benar jika kita gunakan perkalian satuan, puluhan dan ratusan. Namun kita tidak perlu mempunyai tabel perkalian sampai 586×3 .

Kasus ini dapat dicek dengan penjumlahan. 586×3 adalah banyaknya 3 himpunan yang masing-masing anggotanya adalah 586 (misalnya menjumlahkan 3 himpunan yang masing-masing berisi 586 titik).



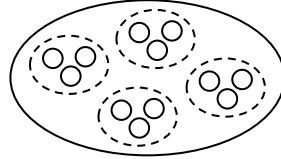
Kita dapat menjumlahkan bilangan tersebut dengan membuat beberapa asumsi yang disimpan.

$$\begin{array}{r} 586 \\ 586 \\ 586 \\ \hline 1758 \end{array}$$

Sehingga metode tersebut memberikan jawaban yang benar pada permasalahan ini. Namun yakinkah kita bahwa setiap bilangan dapat dilakukan hal yang sama? Berikanlah kasus pada siswa sebagai latihan, maka akan terdapat perbedaan

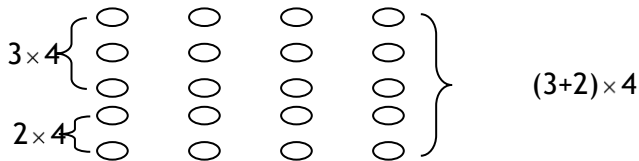
cara menerapkannya. Kita dapat memulainya pada kasus yang sederhana.

Ilustrasi berikut menunjukkan perkalian 3×4 (Dimulai dengan sebuah himpunan 3 satuan dan 4 himpunan di dalamnya).



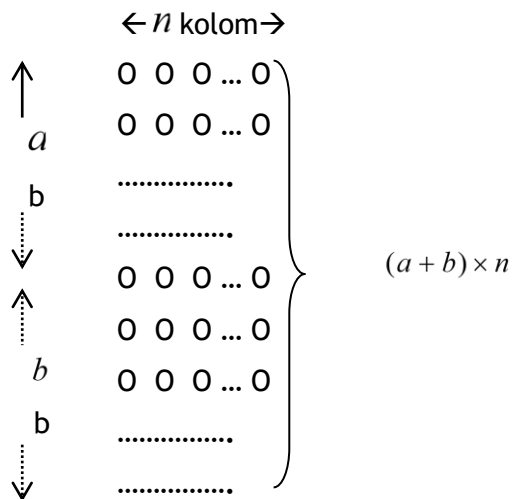
Menyusun ulang ilustrasi tersebut seperti ini, dimana setiap kolom mewakili himpunan dengan 3 satuan dan himpunan dari 4 kolom mewakili hasil dari kesatuan 4 himpunan.

Dengan ilustrasi yang sama menunjukkan perkalian 2×4 .



Gabungan 2 himpunan tersebut menempatkan penjumlahan bilangan tepat pada baris. Tanpa perhitungan hal itu jelas bahwa hasil ilustrasi menunjukkan perkalian $(3+2) \times 4$. Karena $(3 \times 4) + (2 \times 4) = (3+2) \times 4$.

Hal ini jelas bahwa cara ini tidak tergantung pada bilangan khusus mana yang kita gunakan. Keduanya bahkan tidak kita butuhkan untuk mengetahuinya. Misalkan n , a , b adalah sebarang bilangan.



Ilustrasi berikut menunjukkan perkalian

$$a \times n \text{ dan } b \times n$$

$$(a \times n) + (b \times n) = (a + b) \times n.$$

Ini adalah sifat dari bilangan asli, ketika bentuk tersebut ditulis dalam cara lain:

$$(a + b) \times n = (a \times n) + (b \times n)$$

bentuk tersebut sering dinyatakan dalam kata-kata yaitu: “perkalian yang distributif terhadap penjumlahan”. Hal itu kemudian disingkat *sifat distributif*. Sifat distributif sangat penting karena dengan sifat ini kita dapat

menghitung hasil perkalian seperti 586×3 dengan mudah begitupun dengan perkalian bilangan lain (Krutetskii, 1976).

G. Dua Sifat Pada Penjumlahan

Apakah ada sifat lain yang kita terima benar pada semua metode perhitungan yang ditunjukkan juga tergantung pada sifat sebelumnya? Salah satu sifat tersebut digunakan ketika kita menjumlahkan bilangan yang lebih dari 10.

Kita kerjakan contoh pada samping kanan

dengan perhitungan mental:

$$3 + 4 = 7 \quad \text{dan} \quad 20 + 6 = 26$$

$$\text{berarti} \quad 20 + 60 = 80$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 64 \\ \hline 87 \end{array}$$

Ada dua asumsi yang tersembunyi di sini. Cara ini hanya benar jika :

$$23 + 64 = (20 + 60) + (3 + 4)$$

$$(20 + 3) + (60 + 4) = (20 + 60) + (3 + 4)$$

menggunakan tanda kurung sebagai kebiasaan untuk menunjukkan operasi pertama yang dikerjakan. Yang diperlukan dalam hal ini adalah (i) bahwa hal itu tidak masalah pasangan bilangan mana yang kita jumlahkan; (ii) bahwa hasil tidak dipengaruhi perubahan urutan bilangan. Sifat-sifat operasi penjumlahan pada bilangan asli tersebut

kita terima benar. Dengan bentuk, jika a , b , c adalah sebarang bilangan asli,

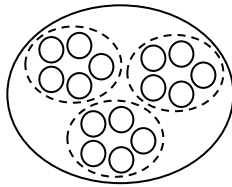
$$(i) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(ii) \quad a + b = b + a$$

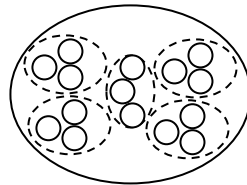
Pernyataan pertama bahwa hasil sama berapapun dua bilangan yang kita asosiasikan terlebih dahulu; dan pernyataan kedua bahwa hasil sama jika kita mengubah (menukar) bilangan untuk dijumlahkan. Jadi kedua sifat tersebut boleh dinyatakan secara singkat dalam kalimat: penjumlahan pada bilangan asli adalah assosiatif dan komutatif.

H. Perkalian adalah Asosiatif dan Komutatif

Perkalian komutatif telah kita anggap benar. Yang ditunjukkan dalam himpunan, bagaimanapun, sifat tersebut dapat ditunjukkan sebagai *non-trivial*.

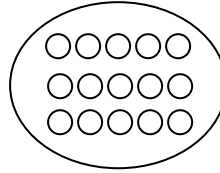


$$3 \times 5$$



$$5 \times 3$$

Himpunan pada ilustrasi di samping kanan dapat dipandang sebagai 3 baris dari 5, atau 5 kolom dari 3, dan kesesuaian yang jelas dari kedua himpunan pertama, yang sesuai dengan yang lain.



Contoh perluasan sifat perkalian: hal itu menggunakan sifat distribusi pada dua cara. 412 terlebih dahulu dikalikan dengan 7 dan

$$\begin{array}{r}
 412 \\
 \underline{37} \\
 2884 \\
 \underline{1236} \\
 15244
 \end{array}$$

selanjutnya dikalikan dengan 3, masing-masing perhitungan tersebut tergantung pada sifat distribusi yang didiskusikan pada halaman sebelumnya.

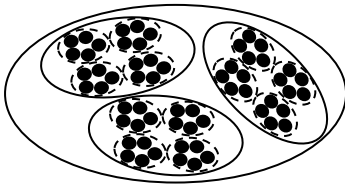
$$(412 \times 37) = (412 \times 7) + (412 \times 30).$$

Tetapi bagaimana kita menghitung 412×30 tanpa pengetahuan daftar perkalian 30? Kita kalikan dengan 3, dan selanjutnya kita kalikan dengan 10, pengerjaan selanjutnya dengan memindahkan hasil satu kolom ke kiri. Asumsi ini bahwa:

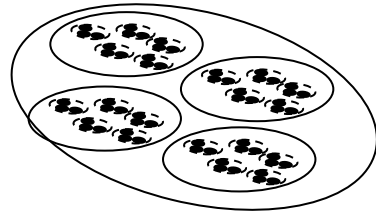
$$412 \times 30$$

berarti $412 \times (3 \times 10) = (412 \times 3) \times 10$

itu adalah perkalian asosiatif. Hasil sama berapapun dua bilangan yang kita kalikan terlebih dahulu. Mari kita menguji contoh berikut dengan bilangan yang lebih kecil, katakanlah 3, 4, 5.



$$(4 \times 5) \times 3$$



$$4 \times (5 \times 3)$$

(masing-masing lingkaran kecil berisi 5 titik)

Perbedaan antara kedua ilustrasi di atas adalah, pada ilustrasi sebelah kiri, terlebih dahulu kita membuat empat himpunan yang beranggotakan lima titik-titik lalu dihimpun menjadi satu himpunan besar sebanyak tiga kali, sedangkan ilustrasi di sebelah kanan pertama kali kita membuat lima himpunan yang beranggotakan tiga titik-titik lalu dihimpun menjadi satu himpunan besar sebanyak empat kali. Secara jelas bilangan dari himpunan terakhir yang beranggotakan titik-titik tersebut akan sama dengan ilustrasi sebelah kiri (Skemp, 1971).

I. Lima Sifat Sistem Bilangan Asli

Berdasarkan sistem bilangan asli kita mengartikan himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ bersama dengan dua operasi $+$ dan \times . Kita telah menemukan cara umum untuk penjumlahan dan perkalian yang tergantung pada lima sifat yang dapat diringkas seperti pada Tabel 7.1 di bawah:

Tabel 7.1 Sifat-sifat Bilangan Asli

No	Dalam kata-kata	Dalam symbol Jika n, a, b, c adalah sebarang bilangan asli (\mathbb{N}), maka:
1	Penjumlahan bersifat komutatif	$a + b = b + a$
2	Penjumlahan bersifat asosiatif	$a + (b + c) = (a + b) + c$
3	Perkalian bersifat komutatif	$a \times b = b \times a$
4	Perkalian bersifat asosiatif	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
5	Perkalian distributif terhadap penjumlahan	$n \times (a + b) = (n \times a) + (n \times b)$

Kebanyakan dari kita mengetahui sifat-sifat tersebut tanpa memperhatikan bahwa betapa pentingnya sifat-sifat tersebut. Hal ini memungkinkan kita untuk memperluas kemampuan kita dalam menjumlah dan mengalikan bilangan asli.

RANGKUMAN

- ❖ Bilangan adalah suatu konsep matematika yang bersifat abstrak yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran atau suatu ide yang digunakan untuk mengabstraksikan banyaknya anggota suatu himpunan.
- ❖ Sejarah perkembangan teori bilangan dapat dikelompokkan menjadi dua masa:
 1. Bilangan pada Masa Prasejarah (Sebelum Masehi) diantaranya:
 - 1) Bilangan pada Suku Bangsa Babilonia.
 - 2) Teori Bilangan pada Suku Bangsa India
 2. Bilangan pada Masa Sejarah (Masehi)
- ❖ Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang didefinisikan dengan baik dan jelas.
- ❖ Operasi adalah suatu aturan dalam mengkombinasikan dua ide matematika untuk memperoleh ide yang ketiga.
- ❖ Sifat-sifat bilangan asli:
 1. Penjumlahan bersifat komutatif
 2. Penjumlahan bersifat asosiatif
 3. Perkalian bersifat komutatif

4. Perkalian bersifat asosiatif
5. Perkalian distributif terhadap penjumlahan

Latihan Soal 7.1

Pertemuan ke-10 (*untuk mengetahui kemampuan analisis mahasiswa dalam memahami materi tentang sistem numerasi*)

1. Uraikan secara ringkas sejarah perkembangan bilangan!
 2. Mengapa ide tentang suatu himpunan sangat penting dalam pembelajaran matematika!
 3. Mengapa sistem numerasi sangat penting untuk konsep bilangan!
 4. Jelaskan proses terbentuknya ide penjumlahan bilangan!
 5. Jelaskan proses terbentuknya ide perkalian bilangan!
- Uraikan dengan jelas lima sifat sistem bilangan asli!

BAB 8

KEBUTUHAN AKAN BILANGAN BARU

Suatu masalah yang selalu muncul dalam pengukuran di luar perhitungan adalah ketidaksesuaian. Diberikan suatu himpunan yang banyak anggotanya berhingga, maka selalu dapat ditentukan banyak anggotanya dengan tepat, karena kita dapat mengkorespondensikan satu-satu terhadap bilangan asli. Apabila mengukur berat, panjang, volume, temperatur dari suatu benda, dengan menyesuaikan dalam beberapa cara, kualitas yang sama, dalam objek fisik lain, kita tidak akan pernah memastikan suatu objek standar yang memberikan kesesuaian yang sempurna. Sebagai contohnya mengukur berat dengan satuan kilogram, kemungkinan benda yang diukur akan sama tepatnya dengan mengukur beberapa objek yang kecil. Dengan demikian model matematika tidak selalu dapat menampilkan objek fisik secara akurat.

Suatu cara sederhana dalam hal ini adalah dengan menggunakan satuan-satuan yang lebih kecil. Apabila hal ini tidak sesuai, maka kita harus memotong-motong objek standar ke dalam bagian-bagian yang lebih kecil dan berharap memperoleh gabungannya yang akan sesuai dengan objek-objek yang telah diberikan. Membentuk suatu model untuk memotong-motong dan menggabungkan satuan-satuan dari suatu objek yang hal ini disebut satuan-satuan dari pecahan. Konsep pecahan muncul jika di dalam kehidupan sehari-hari ada benda-benda yang disajikan dalam bentuk yang tidak utuh. Misalnya ada sebuah kue tart yang akan dimakan sebuah keluarga yang terdiri dari empat orang dan setiap orang mendapat bagian kue tart yang sama banyak. Maka masing-masing setiap anggota keluarga akan mendapat bagian kue tart yang tidak utuh yaitu masing-masing orang mendapatkan seperempat bagian dari kue tart (Skemp, 1971).

A. Sejarah Bilangan Pecahan

Menurut catatan sejarah, perkembangan bilangan pecahan tertua mungkin dimulai di Mesir Kuno. Bangsa Mesir Kuno mengenal pecahan berupa pecahan satuan, yaitu pecahan dengan pembilang satu. Pengecualian dengan $\frac{2}{3}$ mereka memiliki lambang tersendiri. Sementara

bangsa Babilonia lewat batu bertulis telah menunjukkan penggunaan bilangan pecahan hingga pada penarikan akar. Penulisan pecahan bangsa Babilonia telah menggunakan nilai tempat.

Penggunaan bilangan pecahan di Yunani Kuno telah begitu akrab, bahkan mereka beranggapan semua ukuran panjang dapat dinyatakan dengan perbandingan bilangan bulat, hanya mereka belum menggunakan pelambangan seperti sekarang ini.

Pelambangan dan perhitungan dengan pecahan berkembang dari India. Penulisan pecahan desimal yang mendasari pecahan desimal kita sekarang juga berasal dari India. Brahmagupta yang lahir di Sind (kini Pakistan) dalam Brahmasphutasiddhanta menjelaskan tentang penulisan dan perhitungan bilangan pecahan, hanya belum benar-benar persis seperti yang kita gunakan. Ia dan juga matematikawan India lainnya menyatakan pecahan tanpa garis mendatar yang memisahkan pembilang dan penyebut. Walaupun perhitungan pecahannya sudah berdasarkan nilai tempat (desimal) tetapi belum menggunakan penulisan desimal.

Di Cina dapat kita lihat pada Jiuzhang Suanshu atau sering diterjemahkan *The Nine Chapter on The Mathematical Arts* (sembilan bab tentang seni matematika)

juga telah menggunakan nilai tempat untuk pecahan, bahkan menggunakan ide tentang Kelipatan Persekutuan Terkecil. Penggunaan ide pecahan desimal sendiri diawali pada Dinasti Shang (sekitar 1800 hingga 1100 SM).

Penulisan garis horizontal di antara pembilang dan penyebut pertama kali dituliskan oleh Al-Qalasadi (1412-1486). Sedangkan pemakaian pecahan desimal berikut cara perhitungannya yang signifikan terdapat pada karya dari Al-Kasyi (1380-1429), Miftah al-Hisab (Kunci Perhitungan). Hal ini pertama kali diungkapkan oleh P. Luckey tahun 1948. Sebelumnya sering disebut bahwa penemu pecahan desimal adalah Simon Stevin (1548-1620), yang menulis *La Disme* tahun 1585, padahal Francçis Viète (1540-1603) sendiri sebelumnya telah menulis tentang pecahan desimal. Sekarang telah banyak diakui bahwa al-Kasyi adalah penemu pecahan decimal (Kenneth, 2000).

Walaupun demikian, dasar-dasarnya telah diperkenalkan sebelumnya terutama di perguruan yang didirikan oleh Al-Karaji atau al-Karkhi (k.953-k.1019 atau 1029), khususnya al-Samawal (1125-1180). Al-Kasyi sendiri belum menggunakan tanda koma untuk pecahan desimal, tetapi menggunakan tanda berupa kata sha (sebuah huruf arab) antara bilangan bulat dan bagian pecahan desimalnya.

B. Bilangan Pecahan

Kita biasanya menggunakan istilah pemotongan atau pemisahan sebagai cara memecah suatu objek ke dalam bagian-bagian.

Gambar di bawah ini menunjukkan suatu objek standar



Gambar di bawah ini menunjukkan objek yang dipotong ke dalam lima bagian



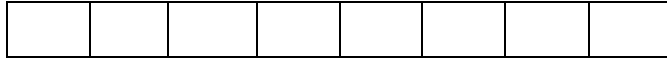
Cara pemotongan di atas tidak menggunakan pengukuran, karena kita tidak mengetahui berapa besar potongan-potongannya, dan kita tidak dapat menghitungnya apabila besar potongannya tidak sama.

Jika kita memotong objek-objek standar ke dalam potongan yang sama, berapa besar potongan-potongan itu selanjutnya akan tergantung pada berapa banyaknya potongan yang ada. Jenis pemotongan pada objek standar ini disebut pembagian; potongan-potongan yang sama akan disebut bagian-bagian, dan ukuran dari bagian-bagian itu dinyatakan dengan berapa banyak bagian objek standar yang telah dibagi.

Objek standar yang dibagi ke dalam lima bagian



Objek standar yang dibagi ke dalam delapan bagian



Objek standar yang dibagi ke dalam tiga bagian



Gambar di bawah ini menunjukkan hasil pembagian ke dalam delapan bagian, dan kemudian menggabungkan tiga dari bagian itu.



Kita menyebut bagian pecahan di atas tiga dari delapan bagian atau secara singkat disebut tiga per delapan.

Satu bagian pecahan adalah bagian yang diperoleh dengan dua kegiatan yaitu pembagian dan penggabungan. Pengabstraksian yang biasanya terjadi dari kedua operasi tersebut diperoleh tiga dari delapan bagian sebagai hasil operasi ganda matematika (pembagian dan penggabungan) yang disebut suatu pecahan (Skemp, 1971).

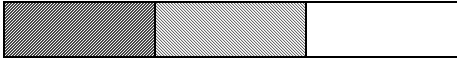
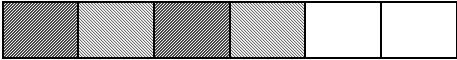
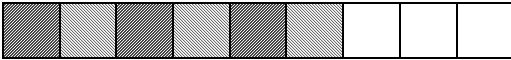
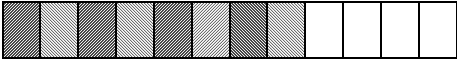
Notasi matematika untuk hasil operasi ganda tersebut adalah $\frac{3}{8}$ (dibaca sebagai tiga dari delapan). Karena angka di bawah garis menyatakan nama dari bagian-bagian yang diwakili, apakah itu lima bagian, delapan bagian, tiga bagian dan lain-lain inilah yang disebut penyebut dalam pecahan. Sedangkan angka di atas garis menyatakan berapa

banyak bagian yang digabungkan disebut dengan pembilang.

Secara umum dapat didefinisikan bilangan pecahan adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dimana: a dan b adalah bilangan asli, $b \neq 0$ dan b bukan faktor dari a.

C. Pecahan Ekuivalen

Himpunan-himpunan pecahan dapat dinyatakan kedalam suatu relasi ekuivalen.

PECAHAN	WUJUDNYA
$\frac{2}{3}$	
$\frac{4}{6}$	
$\frac{6}{9}$	
$\frac{8}{12}$	

dan seterusnya, polanya adalah jelas. Meskipun pecahan-pecahan tersebut berbeda, jika diterapkan kegiatan yang berkaitan dengan pembagian dan penggabungan terhadap suatu objek standar menghasilkan bagian-bagian objek yang sesuai, pecahan-pecahan $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \dots$ menghasilkan

nilai yang sama. Karena $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$, dapat ditentukan pecahan

lain yang ekuivalen dengan pecahan yang diberikan, dengan cara mengalikan atau membagi pembilang dan penyebut dengan bilangan asli yang sama. Sebagai contoh:

$$\frac{9}{12} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{4}$$

diperoleh pula: $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$

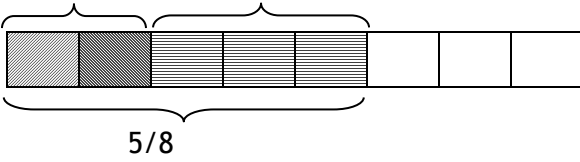
jadi pecahan-pecahan ini masuk dalam kelas ekuivalen yang

dapat ditulis: $\left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{18}{24}, \dots \right\}$

D. Penjumlahan Bilangan Pecahan

Kita ingin menggunakan sebuah operasi matematika yaitu penjumlahan terhadap bilangan pecahan. Hal ini mudah dipahami jika bilangan-bilangan itu ditampilkan dengan pecahan yang penyebutnya sama, kemudian kita gabungkan bagian objek yang penyebutnya sama. tetapi kita harus ingat bahwa penjumlahan tidak berarti sama persis untuk bilangan pecahan seperti pada bilangan asli. Untuk mengingatkan kita akan hal ini kita menggunakan \oplus untuk penjumlahan jenis baru dan $+$ untuk penjumlahan jenis lama.

Contoh:

$$\frac{2}{8} \oplus \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8}$$


$$= \frac{5}{8}$$

Jika penyebutnya tidak sama, hal ini dibantu dengan kemampuan merubah ke dalam himpunan-himpunan ekuivalen. Karena semua pecahan dalam suatu himpunan ekuivalen itu merupakan bilangan yang sama, kita dapat memilih salah satu pecahan yang dianggap paling baik untuk suatu tujuan lain, dalam kasus ini untuk perhitungan. Misalnya kita akan menjumlahkan:

$$\frac{2}{4} \oplus \frac{3}{9}$$

Ubah menjadi pecahan ekuivalennya: $\frac{2 \times 9}{4 \times 9} \oplus \frac{3 \times 4}{9 \times 4}$

Yang berlaku untuk bilangan-bilangan yang ekuivalen: $\frac{18}{36} \oplus \frac{12}{36}$

Sebagaimana sebelumnya. Untuk penyebut, kita pilih:

$$4 \times 9 = 36$$

Sekarang kita dapat menjumlahkan $\frac{18+12}{36} = \frac{30}{36}$

Tentunya ini tidak ada perbedaan dengan pecahan yang kita gunakan sebagai pengganti, dengan syarat bahwa hal ini berlaku bagi bilangan asli dan mempunyai penyebut-penyebut yang sama. Selanjutnya dicoba perhitungan dengan suatu cara yang berbeda. Pertama kita akan mengubah:

$$\frac{2}{4} \oplus \frac{3}{9}$$

$$\text{Pecahan asal dengan pecahan ekuivalen} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} \oplus \frac{1 \times 3}{3 \times 3}$$

$$\text{Dengan menggunakan hukum pencoretan} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3}$$

$$\text{Sekarang ditemukan} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} \oplus \frac{1 \times 2}{3 \times 2}$$

$$\text{Penyebut bersama yang lebih kecil} = \frac{3}{6} \oplus \frac{2}{6}$$

$$\text{Yaitu } 2 \times 3 \text{ sama} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Jawaban ini kelihatan berbeda, tetapi $\frac{5}{6}$ menyatakan

$$\text{bilangan pecahan yang sama dengan } \frac{30}{36} \text{ karena } \frac{30}{36} = \frac{5 \times 6}{6 \times 6}$$

$$= \frac{5}{6}.$$

E. Perkalian Bilangan Pecahan

Sampai saat ini kita belum mempunyai pengertian mengenai “perkalian” dalam konteks baru tentang bilangan pecahan. Untuk memahami operasi perkalian pada bilangan pecahan seperti memahami perkalian pada bilangan asli, kita mulai dengan objek standar.

Seperti biasa dimulai dengan objek standar:

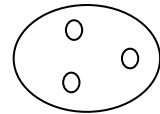


Selanjutnya objek ini menggambarkan pecahan $\frac{2}{3}$

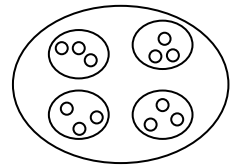


Dalam bilangan asli, 4×3 bila diwujudkan dalam objek-objek fisik/berarti:

Mulai dengan suatu himpunan 3-an

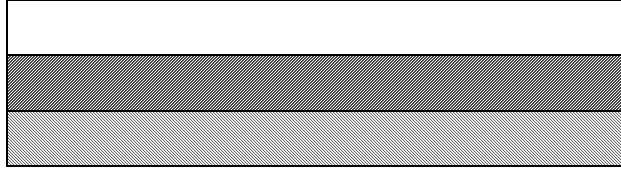


Dan menggabungkan 4 himpunan itu.

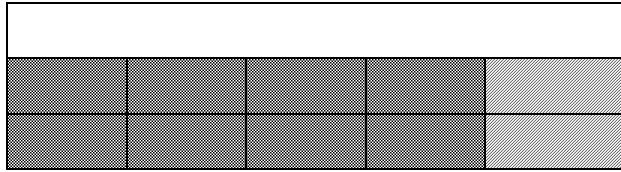


Sedangkan dalam bilangan pecahan $\frac{2}{3} \otimes \frac{4}{5}$

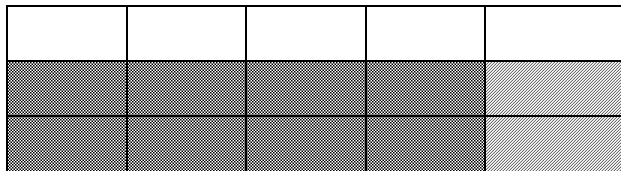
Dapat diartikan dengan bagian dua pertiga bagian dari suatu objek



Dan ambil empat seperlimanya



Dalam bilangan asli menghitung 4×3 berarti "menentukan banyaknya anggota himpunan hasil". Dalam bilangan pecahan menghitung $\frac{2}{3} \otimes \frac{4}{5}$ dapat diartikan menentukan berapa bagian pecahan dari objek yang merupakan bagian objek hasil. Bagian objek hasil ditunjukkan dengan daerah arsiran bersilang. Objek asal sekarang dibagi kedalam lima belas bagian (3×5), dan daerah arsiran bersilang menggabungkan 8 (2×4).



Ini menunjukkan bahwa $\frac{2}{3} \otimes \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$ cara ini

masuk akal untuk mengalikan pecahan-pecahan tersebut; dalam arti bahwa hal ini memberikan model pengerjaan yang baru untuk operasi bilangan pecahan.

Metode ini telah disepakati oleh para matematikawan untuk penjumlahan dan perkalian bilangan-bilangan pecahan. Secara umum dinyatakan jika a, b, c, d adalah bilangan asli maka metode untuk penjumlahan adalah

$$\frac{a}{d} \oplus \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$$

dan metode untuk perkalian adalah

$$\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

dimana \oplus dan \otimes mengacu pada operasi dalam bilangan pecahan, sedangkan $+$ dan \times pada operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan asli.

Banyak yang belum diungkapkan mengenai bilangan pecahan. Teknik-teknik untuk memanipulasi belum disistematiskan dan notasi desimal yang sangat mempermudah manipulasi tersebut belum perlu. Tak satupun dari teknik-teknik itu akan digunakan disini,

karena tujuan yang diharapkan adalah lebih ke pemahaman daripada keterampilan perhitungan.

F. Sifat Dari Bilangan Pecahan

Bilangan pecahan mempunyai lima sifat dari suatu sistem bilangan. Misalkan a, b, c, d, e, f, x, y , mewakili untuk beberapa bilangan asli dan $\frac{a}{b}$ dll, menunjukkan bilangan pecahan, maka berlaku beberapa sifat bilangan pecahan sebagai berikut:

1) Komutatif terhadap penjumlahan.

Kita hanya dapat menjumlahkan jika penyebutnya sama,

$$\frac{a}{d} \oplus \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} = \frac{a+b}{d} = \frac{a}{d} \oplus \frac{b}{d}$$

2) Asosiatif terhadap penjumlahan

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} \oplus \frac{b}{d} \right) \oplus \frac{c}{d} &= \frac{(a+b)}{d} \oplus \frac{c}{d} = \frac{(a+b)+c}{d} = \frac{a+(b+c)}{d} \\ &= \frac{a}{d} \oplus \frac{(b+c)}{d} = \frac{a}{d} \oplus \left(\frac{b}{d} \oplus \frac{c}{d} \right) \end{aligned}$$

3) Komutatif terhadap perkalian

$$\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{c \times a}{d \times b} = \frac{c}{d} \otimes \frac{a}{b}$$

4) Asosiatif terhadap perkalian

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d}\right) \otimes \frac{e}{f} &= \frac{a \times c}{b \times d} \otimes \frac{e}{f} = \frac{(a \times c) \times e}{(b \times d) \times f} \\ &= \frac{a \times (c \times e)}{b \times (d \times f)} = \frac{a}{b} \otimes \frac{c \times e}{d \times f} = \frac{a}{b} \otimes \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)\end{aligned}$$

5) Distributif perkalian terhadap penjumlahan

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} \otimes \left(\frac{a}{d} \oplus \frac{b}{d}\right) &= \frac{x}{y} \otimes \frac{(a+b)}{d} \\ &= \frac{x \times (a+b)}{y \times d} = \frac{x \times a + x \times b}{y \times d} \\ &= \frac{x \times a}{y \times d} \oplus \frac{x \times b}{y \times d} = \left(\frac{x}{y} \otimes \frac{a}{d}\right) \oplus \left(\frac{x}{y} \otimes \frac{b}{d}\right)\end{aligned}$$

RANGKUMAN

- ❖ Menurut catatan sejarah, perkembangan bilangan pecahan tertua mungkin dimulai di Mesir Kuno. Bangsa Mesir Kuno mengenal pecahan berupa pecahan satuan, yaitu pecahan dengan pembilang satu.
- ❖ Bilangan pecahan adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dimana: a dan b adalah bilangan asli, $b \neq 0$ dan b bukan faktor dari a.
- ❖ Pecahan ekuivalen dapat ditentukan dengan cara $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$, yaitu mengalikan atau membagi pembilang dan penyebut dengan bilangan asli yang sama.
- ❖ Penjumlahan bilangan pecahan adalah dilakukan dengan menggabungkan bagian objek yang penyebutnya sama, tetapi jika penyebutnya tidak sama, hal ini dibantu dengan kemampuan merubah ke dalam himpunan-himpunan ekuivalen.
- ❖ Dalam bilangan asli menghitung 4×3 berarti "menentukan banyaknya anggota himpunan hasil".
Dalam bilangan pecahan menghitung $\frac{2}{3} \otimes \frac{4}{5}$ dapat

diartikan menentukan berapa bagian pecahan dari objek yang merupakan bagian objek hasil.

- ❖ Bilangan pecahan mempunyai lima sifat dari suatu sistem bilangan, yaitu:
 1. Komutatif terhadap penjumlahan.
 2. Komutatif terhadap perkalian.
 3. Asosiatif terhadap penjumlahan.
 4. Asosiatif terhadap perkalian.
 5. Distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Latihan Soal 8.1

Pertemuan ke-11 (*untuk mengetahui kemampuan analisis mahasiswa dalam memahami materi tentang kebutuhan akan bilangan baru*)

1. Uraikan secara ringkas sejarah bilangan pecahan!
2. Jelaskan pengertian bilangan pecahan!
3. Jelaskan proses terbentuknya ide penjumlahan bilangan pecahan!
4. Jelaskan proses terbentuknya ide perkalian bilangan pecahan!
5. Uraikan dengan jelas lima sifat sistem bilangan pecahan!

QUIS !

TEKA-TEKI EINSTEIN

Ada lima rumah dengan lima warna yang berbeda. Setiap rumah dihuni satu orang dengan kenegaraan yang berbeda. Lima pemilik rumah tersebut menyukai minuman tertentu, merokok dengan merek rokok tertentu, dan memelihara peliharaan tertentu. Tak ada seorang pun yang punya peliharaan yang sama, merokok dengan merek rokok yang sama, serta minum minuman yang sama. Fakta lainnya:

1. Orang Inggris tinggal di rumah merah.
2. Orang Swedia punya anjing.
3. Orang Denmark suka minum teh.
4. Rumah hijau tepat berada di sebelah kiri rumah putih.
5. Pemilik rumah hijau suka minum kopi.
6. Orang yang suka rokok Pall Mall punya burung.
7. Pemilik rumah kuning suka rokok Dunhill.
8. Pemilik rumah yang berada di tengah-tengah suka minum susu.
9. Orang Norwegia tinggal di rumah pertama.
10. Orang penggemar rokok Blends tinggal di sebelah orang yang punya kucing.
11. Orang yang memelihara kuda tinggal di sebelah orang yang suka rokok Dunhill.
12. Orang yang suka rokok Bluemasters biasa minum bir.
13. Orang Jerman suka rokok merek Prince.
14. Orang Norwegia tinggal di sebelah rumah biru.
15. Orang yang suka rokok Blends tinggal di sebelah orang yang suka air putih.

Pertanyaannya: Siapakah orang yang memelihara ikan?

BAB 9

SISTEM BILANGAN

Sistem bilangan adalah himpunan konsep matematika (yang disebut bilangan) dengan dua operasi biner penjumlahan “+” dan perkalian “ \times ” dan bersifat tertutup pada himpunan, sedemikian hingga:

- 1) Penjumlahan bersifat komutatif dan asosiatif
- 2) Perkalian bersifat komutatif dan asosiatif
- 3) Perkalian bersifat distributif atas penjumlahan

Definisi di atas tidak spesifik dimana himpunan bilangan tersebut adalah finit atau infinit. Sebenarnya kita dapat menemukan sistem yang memenuhi definisi di atas yang memuat sedikitnya dua bilangan. Sistem bilangan dikenalkan dalam bab ini adalah infinit (seperti bilangan asli dan pecahan).

Suatu operasi biner adalah operasi yang mengkombinasikan dua ide matematika untuk memperoleh ide yang ketiga. Contoh: penjumlahan dan perkalian. “Pada himpunan” artinya operasi biner dapat digunakan pada dua

anggota himpunan, dan “tertutup” maksudnya bahwa ide ketiga yang diperoleh juga anggota himpunan tersebut. Persyaratan ini tidak berlaku pada pengurangan himpunan bilangan asli karena tidak tertutup, demikian juga dengan pembagian. Contoh: saya mempunyai Rp. 10.000.000,- uang di Bank dan menarik Rp. 15.000.000,- berapa uang yang tersisa? Contoh lain: Bagilah 10 apel untuk 3 orang. Meskipun dalam permasalahan di atas memiliki jawaban, tetapi akan membawa kita keluar dari konsep sistem bilangan (keluar dari sistem bilangan asli) (Skemp, 1971).

Mula-mula yang dikenal manusia adalah bilangan bulat positif, yaitu bilangan asli (*natural numbers*, N). Bilangan asli dibutuhkan manusia untuk membilang sesuatu yang utuh, seperti banyak orang, banyak hewan, dan sebagainya.

Selanjutnya manusia mengenal bilangan pecahan (*fractions*) dengan berbagai macam bentuk. Pada perkembangan selanjutnya, orang membutuhkan bilangan bertanda oleh karena kuantitas sesuatu dapat “berjalan” ke dua arah yang berlawanan. Misalnya untuk menjawab pertanyaan “berapa kambing yang dia punya?”. Padahal faktanya ia berutang 3 ekor kambing dan tidak memiliki kambing sama sekali. Daripada menjawab “tidak ada”, jawaban “negatif tiga” akan lebih masuk akal. Dipelopori

Brahmagupta (598-670) dan juga al-Biruni (973-1048), penggunaan bilangan bertanda menjadi luas diterima orang.

Dalam bab ini kita akan melihat bagaimana skema bilangan asli dapat diakomodasikan untuk memasukkan tiga sistem bilangan yang baru; bilangan bulat, bilangan rasional, dan bilangan *real*.

A. Bilangan dari Sistem yang Berbeda

Bilangan $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots$ dimana setiap bilangan mewakili sebuah kelas ekuivalen dari pecahan (yaitu $\frac{3}{1}$ mewakili $\left\{ \frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \dots \right\}$) hal ini akan jadi sulit untuk menetapkan kesamaannya dengan bilangan asli 1,2,3,...

Tetapi secara keseluruhan, ini sah untuk menyatakan korespondensi $\frac{1}{1} \leftrightarrow 1, \frac{2}{1} \leftrightarrow 2, \frac{3}{1} \leftrightarrow 3 \dots$ dan untuk menanyakan bagaimana korespondensi ini juga berlaku antara dua operasi dasar pada dua himpunan berikut:

Sistem bilangan asli

$$3+2=5$$

$$3 \times 2=6$$

Sistem bilangan pecahan

$$\frac{3}{1} \oplus \frac{2}{1} = \frac{5}{1}$$

$$\frac{3}{1} \otimes \frac{2}{1} = \frac{6}{1}$$

Dan secara umum

$$a \leftrightarrow \alpha$$

$$b \leftrightarrow \beta$$

$$a+b \leftrightarrow \alpha \oplus \beta$$

$$a \times b \leftrightarrow \alpha \otimes \beta$$

Korespondensi tingkat lanjut ini dinyatakan dengan mengatakan bahwa bilangan asli dengan operasi $+$, \times adalah isomorfis dengan subset dari sistem bilangan pecahan dengan operasi \oplus dan \otimes . Secara umum isomorpisme berarti bahwa jika kita mengkorespondensikan operasi-operasi pada elemen-elemen yang bersesuaian dari dua himpunan yang terkait, maka hasilnya juga berkorespondensi. Lebih jelas jika kita menggunakan metode ini untuk menambahkan dan mengalikan sesuai dengan sistemnya (Krutetskii, 1976).

Kita tidak dapat menghitung $2 + \frac{1}{2}$, karena kita tidak memiliki cara penambahan bilangan asli dan pecahan,

tetapi jika kita mengganti dengan $\frac{4}{2} \oplus \frac{1}{2}$ hasilnya adalah $\frac{5}{2}$

Sebaliknya jika kita tulis $\frac{10}{3}$ sebagai $\frac{9}{3} \oplus \frac{1}{3}$ dan menggantinya dengan $3 + \frac{1}{3}$.

Berdasarkan permasalahan di atas, pengambilan 10 apel dan membaginya dalam 3 bagian dapat dikerjakan dengan memberikan masing-masing 3 apel dan $\frac{1}{3}$ bagian apel.

Kita dapat tambahkan $2 + \frac{1}{2}$ dan $3 + \frac{1}{3}$ dengan bekerja dalam sistem bilangan pecahan;

$$\frac{12}{6} \oplus \frac{3}{6} \oplus \frac{18}{6} \oplus \frac{2}{6}$$

Atau dengan mengumpulkan bilangan-bilangan dari sistem yang sama

$$2 + 3 + \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = 5 + \frac{5}{6}$$

Pembaca mungkin peduli untuk menguji bahwa bilangan campuran $5 + \frac{5}{6}$ berkaitan dengan bilangan pecahan $\frac{35}{6}$, ini adalah isomorpisme antara sistem bilangan

asli dan subset dari sistem bilangan pecahan. Sehingga ketika kita mengeksplorasi lebih jauh sistem bilangan,

isomorpisme adalah sifat lain yang perlu jika kita ingin untuk mencampur sistem bilangan.

B. Lawan yang menghapus

Bandungkanlah hasil kombinasi dari dua jenis yang berlawanan berikut:

- Jenis pertama : kombinasikan
Dua apel besar dan dua apel kecil
Tiga laki-laki gemuk dan tiga laki-laki kurus
Lima domba hitam dan lima domba putih
- Jenis kedua : kombinasikan
Berjalan ke atas dua langkah dan berjalan ke bawah dua langkah.
Temperatur turun 3 C° dan temperatur naik 3 derajat C° .
Membayar Rp 5.000.000,- ke Bank dan menarik uang Rp. 5.000.000,- dari Bank.

Tiga hasil pertama adalah: empat apel, enam laki-laki, dan sepuluh domba, tiga hasil kedua adalah: masih tetap, tidak ada perubahan suhu, tidak ada perubahan uang di Bank. Model matematika untuk tiga yang pertama adalah sistem bilangan asli, $2+2=4$, $3+3=6$, $5+5=10$, tetapi jika kita melakukan penjumlahan untuk kombinasi model matematika jenis kedua, kita memerlukan himpunan

bilangan berbeda. Semua kombinasi ini bukan himpunan objek nyata, tetapi dikarenakan kejadian yang dapat dibalik, sedemikian sehingga suatu kombinasi dari dua kesamaan dan berlawanan memiliki hasil akhir yang sama sebagaimana tanpa kejadian. Sehingga kombinasi yang kedua memiliki makna berbeda.

C. Bilangan Bulat

Dalam model matematika, penambahan dua dan pengurangan dua adalah operasi yang berlawanan yang menghilangkan. Sehingga marilah menyatakan operasi ini dengan $(+2)$ dan (-2) , menggunakan tanda kurung disini untuk menunjukkan bahwa $+$ dan $-$ memadukan 2 tanda untuk menunjukkan jenis bilangan baru. Operasi biner \oplus disini menetapkan hasil $(+2) \oplus (-2) = 0$

Hal ini memberikan model untuk contoh pertama dari jenis kedua, yaitu:

$$(+3) \oplus (-3) = 0$$

$$(+5) \oplus (-5) = 0$$

Memberikan hasil yang sama untuk kedua dan ketiga. Bilangan baru ini disebut bilangan bulat. Penggunaan tanda \oplus untuk penjumlahannya berarti bahwa hal itu menyerupai dan berbeda dari penjumlahan bilangan asli. Tetapi hal itu tidak mengidentifikasi

penjumlahan bilangan bulat dengan bilangan pecahan: tanda baru mungkin bermanfaat, tetapi tidak cocok tanpa memberikan tanda khusus.

Sebagai permulaan, marilah mencoba mengembangkan sistem bilangan baru berdasarkan ide awal pada kejadian nyata pertama dan mengecek bahwa sistem bilangan ini memenuhi persyaratan matematis yang sudah ditetapkan. Kita memerlukan contoh khusus; pertama dari jenis kedua

Kenyataan fisik	Model matematika
Naik 2 langkah dan naik 3 langkah	$(+2) \oplus (+3) = +5$
Turun 2 langkah dan turun 3 langkah	$(-2) \oplus (-3) = -5$
Naik 2 langkah dan turun 3 langkah	$(+2) \oplus (-3) = -1$
Turun 2 langkah dan naik 3 langkah	$(-2) \oplus (+3) = +1$

Metode penjumlahan bilangan bulat didasarkan secara langsung pada hal ini atau perwujudan fisik yang lain. Operasi perkalian memunculkan suatu masalah ketika sulit untuk mermikirkan suatu makna yang dilakukan. Sehingga kita dapat mengambil petunjuk pada pemikiran kita tentang operasi perkalian.

Dalam kenyataan fisik kita dapat mengerjakan dan kadang-kadang kita tidak dapat mengerjakannya,

Kerjakan sekali	dengan (+1)
Kerjakan dua kali	dengan (+2)

Dikerjakan balik sekali dengan (-1)

Dikerjakan balik dua kali dengan (-2)

Hal ini konsisten dengan pekerjaan pada operasi penjumlahan, yaitu

Kerjakan dua kali dan

Dikerjakan balik tiga kali

Memiliki hasil yang sama dengan $(+2) \oplus (-3) = (-1)$

Dikerjakan balik sekali

Hal ini kita dapat digunakan dalam konteks menyatakan operasi perkalian, yaitu

Kerjakan dua kali (turun 3 *step*)

Memiliki hasil sama dengan

(turun 6 *step*) $(+2) \otimes (-3) = (-6)$

Untuk mengerjakan balik kita mengerjakan suatu pekerjaan yang sama dan berlawanan

Dikerjakan balik sekali (turun 3 *step*)

Berarti sama dengan

(naik 3 *step*) $(-1) \otimes (-3) = (+3)$

Dikerjakan berlawanan dua kali (turun 3 *step*)

Memiliki hasil yang sama dengan $(-2) \otimes (-3) = (+6)$

(naik 6 *step*)

Dikerjakan dua kali (turun 3 *step*) $(2) \otimes (-3) = (-6)$

(turun 6 *step*).

Secara umum hal ini memberikan hasil matematis yang sama dengan kenyataan fisik. Untuk bilangan bulat, yang diabstraksi dari kejadian timbal balik yang dapat dihitung, dengan operasi \oplus dan \otimes , adalah sebuah sistem bilangan (Skemp, 1971).

Penjumlahan bilangan bulat bersifat asosiatif dan komutatif dapat terlihat secara langsung dari kejadian fisik metode yang diturunkan. Perkalian bersifat asosiatif dan komutatif.

Metode umum untuk perkalian bilangan bulat diberikan oleh empat pernyataan berikut, dimana a, b, adalah bilangan bulat karena (+a), (-a), (+b), (-b) adalah bilangan bulat. Lebih mudah digunakan singkatan ab untuk $a \otimes b$, untuk menghindari tanda kurung dalam tanda kurung.

$$(+a) \otimes (+b) = (+ab)$$

$$(+a) \otimes (-b) = (-ab)$$

$$(-a) \otimes (+b) = (-ab)$$

$$(-a) \otimes (-b) = (+ab)$$

Perkalian bilangan bulat adalah komutatif. Ada empat alasan untuk dipertimbangkan, salah satunya:

$$(+a) \otimes (-b) = (-ab)$$

$$(-b) \otimes (+a) = (-ba) = (-ab)$$

$$(+a) \otimes (-b) = (-b) \otimes (+a)$$

Seperti pecahan, sifat bilangan bulat mengikuti secara langsung dari bilangan asli jika kita mendefinisikan operasi perkalian \otimes pada bilangan bulat seperti di atas. Dengan cara yang sama kita dapat menunjukkan untuk sifat asosiatif dari perkalian.

Berikut ditunjukkan bukti umum bahwa perkalian adalah distributif terhadap penjumlahan:

$$(+a) \oplus (-b) = [-(a+b)]$$

Dimana

$$\begin{aligned} (-n) \otimes [(-a) \oplus (-b)] &= [-n] \otimes [-(a+b)] \\ &= \{+ [n \times (a+b)]\} \\ &= [+ (na + nb)] \end{aligned}$$

Juga

$$\begin{aligned} (-n) \otimes (-a) \oplus (-n) \otimes (-b) &= (+na) \oplus (+nb) \\ &= [+ (na + nb)] \end{aligned}$$

Sehingga

$$(-n) \otimes [(-a) \oplus (-b)] = (-n) \otimes (-a) \oplus (-n) \otimes (-b)$$

D. Bilangan Rasional

Sebelum mempelajari bilangan rasional, telah dikenalkan dengan beberapa jenis bilangan, antara lain:

bilangan asli, bilangan pecahan atau pecahan, bilangan bulat, bilangan positif, dan bilangan negatif.

Mula-mula dikenal bilangan asli. Apakah setiap bilangan asli dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan lain?

Untuk $2 + \dots = 6$ maka dapat ditemukan bilangan asli 4 untuk mengisi titik-titik, tetapi bagaimana bila $2 + \dots = 2$. Daripada menyebut bahwa *tidak ada* bilangan asli yang mengisi titik-titik, lebih baik kita memperluas jenis bilangan yang kita kenal. Muncullah bilangan nol. Semua bilangan asli dan nol, kita golongkan sebagai himpunan bilangan cacah (*whole numbers*).

Untuk mengisi titik-titik pada $3 + \dots = 2$ kita memerlukan bilangan dengan “arah” yang berlawanan dari biasanya. Muncullah bilangan negatif. Semua bilangan cacah dan bilangan negatifnya, kita golongkan sebagai himpunan bilangan bulat (*integers*) (Skemp, 1971).

Selanjutnya, untuk menjawab $2 \times \dots = 3$ maka kita memerlukan jenis bilangan baru yang kita sebut pecahan. Dalam kasus ini, kita dapatkan pecahan dalam bentuk a/b dengan a dan b bilangan-bilangan bulat. Satu-satunya kasus di mana kita tidak menemukan adanya pecahan yang sesuai adalah kasus $0 \times \dots = a$ dengan a sebarang bilangan bulat kecuali nol. Seperti bilangan bulat,

pecahanpun terdiri atas pecahan positif dan pecahan negatif.

Semua bilangan yang telah kita kenal hingga di sini, digolongkan menjadi satu jenis bilangan yang disebut bilangan rasional.

Apa sesungguhnya bilangan rasional itu? Dapatkah kita menyatakan pengertian bilangan rasional secara sederhana? Pengertian bilangan rasional dapat dikaitkan dengan kata “rasio” (*ratio*) yang menjadi kata dasar dari “rasional”. Dalam matematika, rasio berarti perbandingan. Umumnya sebuah perbandingan dinyatakan dengan bilangan bulat.

Perhatikan yang berikut ini merupakan perbandingan.

$$2 : 5 \quad 3 : 10$$

Tetapi tidaklah lazim dalam matematika menulis perbandingan seperti.

$$2,4 : 1,7$$

Suatu perbandingan terkait dengan notasi pembagian.

Untuk contoh pertama di atas $2 : 5$ menyatakan perbandingan a terhadap b , maka kita tulis $a = 2/5b$ atau $a/b = 2/5$.

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan-bilangan bulat dan $b \neq 0$

1. Penjumlahan Bilangan Rasional

Penjumlahan anggap seorang berjalan menaiki eskalator pada laju yang diberikan dalam tabel

Langkah	5	10	15	20	...
Detik	2	4	6	8	...

Pada waktu yang sama eskalator bergerak ke atas pada laju ini

Langkah	3	6	9	12	...
Detik	1	2	3	4	...

Total laju menaik diberikan oleh tabel berikut. Kita dapat hanya menambahkan jumlah langkah yang berkaitan dengan waktu yang sama.

Langkah	5+6	10+12	...
Detik	2	4	

Kesan bahwa penjumlahan bilangan rasional mungkin bermanfaat didefinisikan sebagai jumlahan dua rasio sehingga:

$$5:2 \oplus 6:2 = (5+6):2$$

$$10:4 \oplus 12:4 = (10+12):4, \text{ dan sebagainya}$$

$$\text{Dan secara umum } a:b \oplus a':b = (a+a'):b$$

Jika rasio tidak sama bentuk kedua, kita harus menggantinya dengan rasio yang ekuivalen

$$a : b \oplus a' : b' = ab':bb' \oplus a'b':bb' = (ab'+a'b):bb'$$

Pikirkan sekarang dua tabel yang menunjukkan keterkaitan antara kilometer perjalanan dan liter bahan bakar yang dikonsumsi mobil dan antara bahan bakar yang dikonsumsi dan waktu (Skemp, 1971).

Jarak (km)	9	18	36	54	...
Bahan bakar (liter)	1	2	4	6	...
Bahan bakar (liter)	3	6	9	12	...
Waktu (jam)	1	2	3	4	...

2. Perkalian Bilangan Rasional

Kita dapat mengkombinasikan tabel ini untuk memberikan korespondensi antara jarak perjalanan dan waktu. Dalam kasus ini, kita telah mendapatkan pasangan untuk gambar bahan bakar adalah sama.

Jarak (km)	54	108	...
Waktu (jam)	2	4	...

Ini mengesankan bahwa perkalian bilangan rasional mungkin masuk akal dibuat berkaitan dengan produk dari dua laju, dalam kasus ini

$$54 : 6 \otimes 6 : 2 = 54 : 2$$

$$108 : 12 \otimes 12 : 4 = 10 : 2$$

$$a : b \otimes b : c = a : c$$

Jika bagian kedua dari rasio pertama dan pertama dari rasio kedua tidak sama, kita harus mengganti rasio dengan yang ekuivalen sehingga

$$\begin{aligned} a : b \otimes a : b &= aa : ba \otimes ba : bb \\ &= aa : bb \end{aligned}$$

Pada tahap ini, hal itu akan menjadi latihan yang bermanfaat bagi pembaca untuk memverifikasi bahwa perubahan prinsip teraplikasi, menggunakan beberapa latihan numerik di atas, bahwa hasil dari

$$5 : 2 \oplus 6 : 2 \text{ dan } 15 : 6 \oplus 18 : 6$$

Adalah rasio ekuivalen (bilangan rasional yang sama).

3. Bilangan-Bilangan Rasional Merupakan Suatu Sistem Bilangan

Untuk menunjukkan bilangan rasional adalah sebuah sistem bilangan, maka dengan dua operasi biner penjumlahan “+” dan perkalian “×” dan bersifat tertutup pada himpunan, sedemikian hingga:

- 1) Penjumlahan bersifat komutatif dan asosiatif
- 2) Perkalian bersifat komutatif dan asosiatif
- 3) Perkalian bersifat distributif atas penjumlahan

Harus terpenuhi. Misal a, b, c, d, m, n adalah sebarang bilangan bulat.

Penjumlahan bersifat komutatif

$$a:d \oplus b:d = (a+b):d = (b+a):d = b:d \oplus a:d$$

Penjumlahan bersifat assosiatif

$$(a:d \oplus b:d) \oplus c:d = (a+b):d \oplus c:d = [(a+b)+c]:d = [a+(b+c)]:d = a:d \oplus (b+c):d = a:d \oplus (b:d \oplus c:d)$$

Pembuktian bahwa \otimes bersifat komutatif dan asosiatif adalah sama dengan pembuktian pada $;$, pembaca dapat membuktikannya sendiri sebagai latihan.

Perkalian bersifat distributif terhadap penjumlahan

$$\begin{aligned} m:n \otimes [a:d \oplus b:d] &= m:n \otimes (a+b):d \\ &= m(a+b):nd \\ &= (ma+mb):nd \\ &= ma:nd \oplus mb:nd \\ &= m:n \otimes a:d \oplus m:n \otimes b:d \end{aligned}$$

Seperti bilangan pecahan dan bilangan asli demikian juga dengan bilangan rasional. Sistem baru ini memiliki lima sifat.

4. Bilangan Rasional dalam Notasi Pecahan

Asal muasal kedua bilangan tersebut sangatlah berbeda, bilangan rasional yang diturunkan dari bilangan bulat positif adalah isomorfisme dengan bilangan pecahan. Bandingkanlah (untuk contoh)

$$(+5):(+2) \oplus (+16):(+2) = (+11):(+2) \text{ dan } \frac{5}{2} \oplus \frac{6}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\text{Dan kasus umum : } a:d \oplus b:d = (a+b):d \text{ dan } \frac{a}{d} \oplus \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$$

Isomorfisme yang serupa juga berlaku untuk \otimes . Selanjutnya syarat untuk ekuivalensi dari rasio dan ekuivalensi dari pecahan korespondensi juga hampir sama.

$$\left. \begin{array}{l} a : b \equiv a' : b' \\ \frac{a}{b} \equiv \frac{a'}{b'} \end{array} \right\} \text{jika dan hanya jika } ab' = a'b$$

Perbedaannya hanyalah terletak pada bahwa dalam rasio a, b, a', b' menyatakan bilangan bulat positif, sementara dalam pecahan mereka menyatakan bilangan asli. Sehingga dalam perhitungan kita dapat mengambil keuntungan dengan notasi pecahan yang lebih sederhana.

Keuntungan ini dapat diperluas pada rasio yang melibatkan bilangan bulat negatif, yang memfasilitasi operasi yang cocok yang sekarang kita gunakan

$$\text{Seperti } (+5):(+2) \oplus (-6):(+2) = (-1):(+2)$$

Dapat kita tulis $\frac{(+5)}{(+2)} \oplus \frac{(-6)}{(+2)} = \frac{(-1)}{(+2)}$

Catat bahwa (-1) pada ruas kanan didapatkan melalui operasi penjumlahan bilangan bulat

Hal tersebut di atas biasa dituliskan:

$$\frac{5}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{1}{2}$$

Disini, $-\frac{6}{2}$ dapat diartikan $\frac{(-6)}{(+2)}$ atau $\frac{(+6)}{(-2)}$.

Bagaimanapun juga, ketika menggunakan notasi pecahan untuk bilangan rasional adalah hal yang biasa untuk tetap menjaga penyebutnya positif, misal: menggantikan $\frac{(+5)}{(-2)}$ dengan pecahan yang ekuivalen $\frac{(-5)}{(+2)}$

yang kemudian ditulis $\frac{-5}{2}$ atau $-\frac{5}{2}$.

5. Rasio yang dituliskan sebagai pecahan desimal.

Jika kita menulis sebuah rasio, misal: $(+5):(+2)$

dalam notasi pecahan $\frac{(+5)}{(+2)}$ dan kemudian menggantinya

dalam bilangan pecahan $\frac{5}{2}$, kita dapat menambah bentuk

keempat pada rantai korespondensi yang disebut 2.5 bilangan yang sama (pecahan) dituliskan dalam bentuk

notasi desimal. Dapatkah kita menggunakan 2.5 sebagai notasi alternatif untuk bilangan rasional asli $(+5):(+2)$? Secara umum, apakah notasi desimal merupakan suatu kemungkinan untuk bilangan rasional-termasuk dalam perhitungannya?

Pecahan desimal 2.5 sama dengan pecahan biasa $\frac{25}{10}$. Marilah kita sepakati bahwa $(+2.5)$ berarti sama

dengan $\frac{(+25)}{(+10)}$, sebuah rasio yang ditulis dalam notasi

pecahan. Mari kita sepakati juga bahwa (-2.5) berarti sama

dengan $\frac{(-25)}{(+10)}$ dan $\frac{(+25)}{(-10)}$, rasio-rasio ini ekuivalen. Karena

perhitungan dengan bilangan pecahan dapat dilakukan baik dalam pecahan atau notasi desimal, sekarang kita dapat mengatakan bahwa kesamaan pada bilangan rasional menunjang bahwa kapanpun jika diperlukan kita mengganti operasi untuk bilangan asli dengan bilangan bulat. Sebagai contoh:

$$(-2.5) \oplus (+1.2) = (-1.3)$$

$$(-2.5) \otimes (+1.2) = (-3.00)$$

Untuk mengecek, marilah kita kerjakan soal kedua dari hasil kali bilangan-bilangan rasional dalam notasi pecahan biasa.

$$\frac{(-25)}{(+10)} \otimes \frac{(+12)}{(+10)} = \frac{(-25) \otimes (+12)}{(+10) \otimes (+10)} = \frac{(-300)}{(+100)}$$

Catat bahwa \otimes pada ruas kiri menyatakan perkalian bilangan rasional, sementara yang di tengah menyatakan perkalian pada bilangan bulat. Kita seharusnya benar-benar menggunakan tanda yang berbeda, tetapi satu yang bersesuaian tidak didapat dalam ketikan *printer*. Catat juga bahwa bilangan yang terakhir ekuivalen dengan $\frac{(-3)}{(+1)}$ dan sama dengan (-3).

Jadi mulai sekarang kita mempunyai tak kurang dari tiga cara untuk menyatakan perbandingan yang sama, misal:

$$(-3) : (+4) = \frac{(-3)}{(+4)} = -0.75$$

E. Bilangan Irasional

1. Definisi Bilangan Irasional

Bilangan irasional adalah bilangan yang bukan rasional. Bilangan irasional ini bukan hasil bagi bilangan bulat dan bilangan asli, sehingga tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dan juga tidak mempunyai bentuk desimal berulang. Sebagai contoh bilangan irasional.

$$\sqrt{2} = 1,414213562 \dots \text{ (tidak berakhir dan tidak berulang)}$$

$$\sqrt{3} = 1,732050807 \dots \text{ (tidak berakhir dan tidak berulang)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071086 \dots \text{ (tidak berakhir dan tidak berulang)}$$

$$\pi = 3,1415926535 \dots \text{ (tidak berakhir dan tidak berulang)}$$

$$e = 2,7182818284 \dots \text{ (tidak berakhir dan tidak berulang)}$$

Telah dibicarakan, bahwa setiap bilangan rasional dapat dinyatakan sebagai pecahan desimal. Berakhir atau pecahan desimal berulang teratur. Sebaliknya setiap pecahan desimal berakhir atau pecahan desimal, yang angka-angkanya berulang teratur adalah bilangan rasional. Selanjutnya bilangan yang jika dinyatakan dalam bentuk pecahan desimal tidak akan berakhir dan tidak berulang maka bilangan itu merupakan bilangan irasional. Misalkan, 0,3733733373333733337... adalah bilangan irasional, sebab angka-angkanya tidak berakhir dan tidak berulang teratur (Kenneth, 2000).

Bilangan π merupakan contoh bilangan irasional.

π bukan $3\frac{1}{7}$ atau 3,1416, tetapi π adalah bilangan yang

lambang desimalnya tidak berakhir dan tidak berulang.

Pendekatan untuk π sampai 20 angka desimal adalah:
3,14159265358979323846.

Pada mulanya orang Yunani kuno menghabiskan waktu lama untuk membahas apakah ada bilangan selain bilangan rasional. Kenyataannya, dalam beberapa tahun, kelompok matematikawan dan Pythagoras menyatakan dengan tegas bahwa tidak ada bilangan yang tidak rasional. Tetapi pada suatu hari mereka mulai bertanya: Berapakah panjang sisi sebuah bujur sangkar yang luasnya 2? Tentu saja, jika panjang sisinya x , maka $x \cdot x = 2$. Bilangan apakah yang dikalikan diri sendiri sama dengan 2? (atau berapakah akar pangkat dua dari 2, dinyatakan $\sqrt{2}$ Akhirnya dibuktikan bahwa $\sqrt{2}$ tidak rasional.

Buktikan $\sqrt{2}$ bilangan irasional.

Jawab : Diasumsikan $\sqrt{2}$ rasional dan kemudian ditunjukkan bahwa akan terjadi kontradiksi. Sehingga $\sqrt{2}$ irasional.
Andaikan $\sqrt{2}$ rasional.
Maka $\sqrt{2}$ dapat ditulis sebagai hasil bagi dua bilangan bulat $\frac{a}{b}$ sedemikian hingga a dan b relatif prima.

Jika $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ maka $(\frac{a}{b})^2 = 2$ dan $a^2 = 2b^2$

Karena $2b^2$ bilangan bulat genap, maka a^2 adalah genap, demikian pula a . Mengapa?

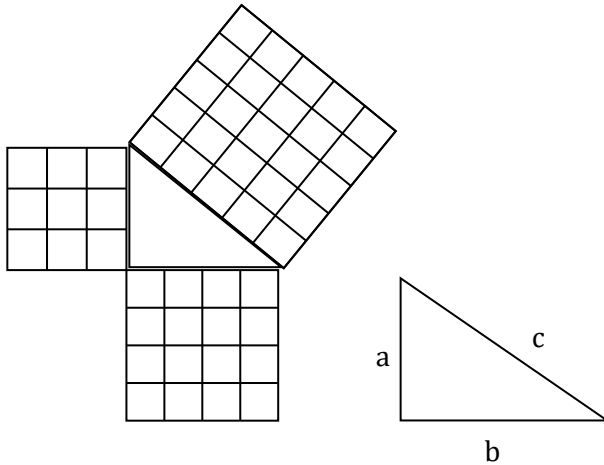
Karena a genap, maka a dapat ditulis sebagai $a = 2c$, c bilangan bulat.

Didapat $a^2 = 4c^2$. Padahal $a^2 = 2b^2$, maka $b^2 = 2c^2$, sehingga b^2 genap, akibatnya b genap.

Karena a dan b keduanya genap, tentu mempunyai faktor persekutuan 2. Maka didapat keadaan yang kontradiksi dengan pengandaian. Sehingga pengandaian $\sqrt{2}$ bilangan rasional tidak benar. Jadi $\sqrt{2}$ irasional.

Lukisan dinding rang mesir tiga ribu tahun yang lalu menunjukkan para peneliti yang membawa seutas tali dengan kedalaman 12 knot. Ketika tali dikumpulkan dalam sebuah segitiga dengan panjang sisi 3, 4 dan 5 satuan, segitiga yang diperoleh adalah segitiga siku-siku. Hasil ini menggunakan teorema yang sangat terkenal yaitu teorema pythagoras: bahwa dalam sebarang segitiga siku-siku, jika kita menggambar persegi pada ketiga sisinya, luasan persegi pada *hipotenusa* (sisi dihadapan sudut siku-siku) adalah sama dengan jumlah luasan persegi dari dua sisi yang lain. Pada kasus yang ditunjukkan diatas, luasan dapat ditemukan dengan menghitung persegi satuan. Kita juga

dapat menemukannya melalui perhitungan. Daerah yang bersesuaian 3×3 , 4×4 , dan 5×5 , persegi satuan adalah 9, 16, 25 persegi satuan



Dalam kasus umum, jika panjang sisi-sisi segitiga adalah a , b , c satuan, teorema tersebut menyatakan bahwa:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

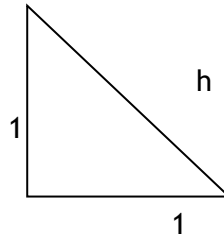
Dimana $a^2 = a \times a$ demikian halnya dengan b dan c (jika sebuah persegi mempunyai panjang sisi a satuan maka luasnya adalah $a \times a$ atau a^2 , yang biasa dibaca dengan a kuadrat) (Skemp, 1971).

Ini menarik tetapi cukup membingungkan dan mempunyai konsekuensi yang sangat mengejutkan. Andaikan kita mempunyai segitiga siku-siku dengan panjang dua sisi yang lebih pendek adalah 1 meter.

Kemudian kita diharuskan untuk dapat menghitung panjang *hipotenusa* dengan menemukan sebuah bilangan h sedemikian hingga:

$$h^2 = 1^2 + 1^2$$

$$h^2 = 2 \text{ karena } 1^2 = 1$$



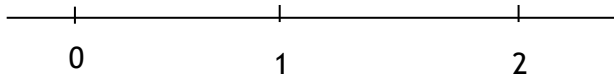
Dalam sistem bilangan rasional, kita tidak dapat menemukan sebuah bilangan yang jika dikuadratkan (dikalikan dengan dirinya sendiri) sama dengan 2. Tetapi kemudian tidaklah sulit untuk membuktikan bahwa tidak ada bilangan rasional yang memberikan jawaban tersebut. Pythagorean, salah seorang siswa Pythagoras tahu tentang bukti ini, dan keberadaan bilangan non-rasional yang didapatkan lewat cara berpikir mereka yang mereka sebut “bilangan yang tak terucapkan”. Dan bersumpah dengan sesama anggotanya untuk merahasiakannya.

Bilangan irasional ini (begitulah kita menyebutnya sekarang) telah diletakkan pada suatu dasar matematika oleh Dedekind (1831-1916) dan oleh Cantor (1845-1918). Sistem yang dihasilkan disebut sebagai sistem bilangan *real*. Ini memuat sebuah sub bagian yang isomorfis ke sistem

bilangan rasional, sehingga bilangan rasional dan irasional secara bebas tercampur sebagai sistem bilangan *real*.

2. Sarang Interval

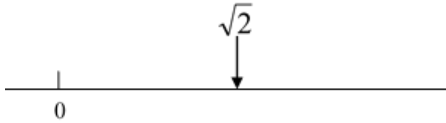
Kita akan mengasumsikan sebuah pengetahuan tentang perkalian bilangan rasional dalam notasi desimal dan mengilustrasikan metodenya dengan mencoba menemukan bilangan yang kuadratnya adalah 2, (Bilangan ini disebut sebagai akar kuadrat dari dua atau ditulis $\sqrt{2}$). Jika kita tandai sebuah garis dalam satuan-satuan panjang, maka setiap bilangan rasional disini berkorespondensi dengan sebuah panjang pada garis. Jika semua panjang diukur dari titik yang sama, maka masing-masing bilangan rasional disini adalah sebuah titik pada garis.



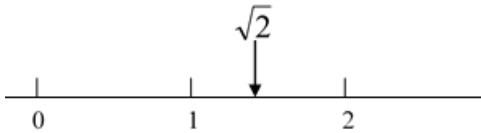
Berikut ini adalah titik-titik yang berkorespondensi dengan 0.7, 1.0, 1.5, 2.16. (Dalam bab ini kita akan menyederhanakan hanya pada rasional positif).

Kita telah menemukan bahwa disana ada sebuah panjang dan ada sebuah titik yang tidak berkorespondensi dengan bilangan rasional, dan masalahnya adalah untuk menemukan sebuah bilangan yang berkorespondensi dengan titik ini. Sebutlah sebuah bilangan pada tahap ini adalah penyederhanaan hipotesis dan menuliskannya

sebagai $\sqrt{2}$ adalah penyederhanaan sebuah cara pendek untuk menempatkan syarat yang memenuhi bahwa $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.



Jelaslah bahwa 1 terlalu kecil karena $1 \times 1 = 1$ dan 2 terlalu besar karena $2 \times 2 = 4$. Sehingga kita tahu bahwa titik yang berkorespondensi dengan $\sqrt{2}$ ada diantara 1 dan 2 pada garis.



Marilah kita temukan interval yang lebih kecil dimana $\sqrt{2}$ berada

$$1.1 \times 1.1 = 1.21 \text{ terlalu kecil}$$

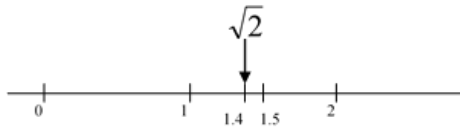
$$1.2 \times 1.2 = 1.44 \text{ terlalu kecil}$$

$$1.3 \times 1.3 = 1.69 \text{ terlalu kecil}$$

$$1.4 \times 1.4 = 1.96 \text{ terlalu kecil}$$

$$1.5 \times 1.5 = 2.25 \text{ terlalu besar}$$

Jadi titik yang berkorespondensi dengan $\sqrt{2}$ berada diantara 1.4 dan 1.5

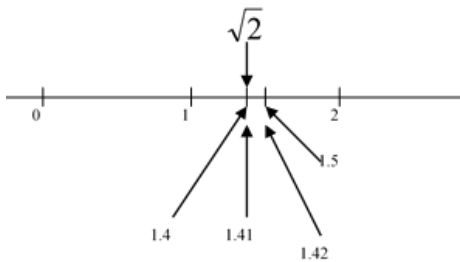


Sekarang masih untuk menemukan interval yang lebih kecil lagi.

$$1.41 \times 1.41 = 1.9881 \quad \text{terlalu kecil}$$

$$1.42 \times 1.42 = 2.0164 \quad \text{terlalu besar}$$

Jadi titik yang berkorespondensi dengan $\sqrt{2}$ berada di antara 1.41 dan 1.42



Sekarang ini menjadi semakin kecil untuk digambar. Meskipun demikian kita dapat menghitung lebih banyak lagi pasangan-pasangan bilangan rasional yang berkorespondensi dengan $\sqrt{2}$.

$$1.414 \quad \text{dan} \quad 1.415$$

$$1.4142 \quad \text{dan} \quad 1.4143$$

$$1.41421 \quad \text{dan} \quad 1.41422$$

Memerlukan waktu, kesabaran, dan fasilitas untuk menghitung yang cukup sehingga kita dapat melanjutkan perhitungan yang terdekat sepanjang yang kita suka.

Barisan interval ini pada garis mempunyai dua sifat yang menarik, yaitu:

1. Setiap interval berada pada interval sebelumnya
2. Seberapapun kecilnya bilangan yang ingin kita sebutkan, kita dapat menemukan sebuah interval sedemikian hingga ukuran dari interval ini dan semua penggantinya lebih kecil daripada bilangan ini.

Sebarang barisan interval ini disebut sebagai sarang interval, dan mudah untuk membuktikan bahwa hanya ada satu titik yang ada dalam setiap interval dari sarang. Oleh karena itu jika ada dua titik, mereka akan memiliki jarak meskipun sangat kecil dan kita kemudian dapat menemukan sebuah interval yang ukurannya lebih kecil daripada jarak ini. Ini akan meletakkan satu titik diluar interval.

Ini mengikuti bahwa (pada contoh ini) barisan infinit dari pasangan-pasangan:

- 1 dan 2
- 1.4 dan 1.5
- 1.41 dan 1.42

1.414 dan 1.415
1.4142 dan 1.4143
dst dst

Mendefinisikan secara tunggal titik yang berkorespondensi dengan $\sqrt{2}$. Inilah yang kita cari. Apa yang telah kita lakukan adalah untuk menunjukkan bahwa bilangan yang diasumsikan ada dan kita sebut $\sqrt{2}$ dapat dinyatakan dalam bentuk bilangan rasional, seperti yang telah kita tunjukkan di awal bahwa bilangan rasional dapat dinyatakan dalam bentuk bilangan bulat dan bilangan bulat dalam bentuk bilangan asli. Untuk menentukan bahwa ini disebut sebagai bilangan, cara penambahan dan perkaliannya dengan bilangan lain yang didefinisikan dengan cara serupa, yang hasilnya ada dalam sistem bilangan.

3. Penjumlahan dan Perkalian Bilangan- Bilangan Irasional

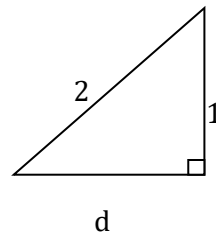
Untuk mendapatkan beberapa usulan mengenai metode yang sesuai untuk Penjumlahan dan Perkalian bilangan-bilangan irasional, kita boleh mengingat lagi bahwa bilangan- bilangan itu berasal dari sebuah keadaan dimana ukuran panjang sebuah garis ternyata tidak dapat dinyatakan sebagai sebuah satuan dengan bilangan rasional. Urutan seperti apa yang akan ada dalam interval-interval mengenai ukuran panjang garis antara 1.4 satuan

dan 1.5 satuan dan antara 1.41 satuan dan 1.42 satuan (misal, panjang = $\sqrt{2}$ satuan).

Jika kita menggambar salah satu kaki segitiga siku-siku, ketika *hipotenusanya* mempunyai panjang 2 satuan dan panjang sisi terpendeknya 1 satuan, Teorema Pythagoras mengatakan bahwa $2^2=1^2+d^2$, dari bentuk itu didapat $d^2=3$ atau $d=\sqrt{3}$.

Dalam urutan bilangan, $\sqrt{3}$ terletak:

- antara 1 dan 2
- antara 1.7 dan 1.8
- antara 1.73 dan 1.74
- antara 1.72 dan 1.733, dan seterusnya

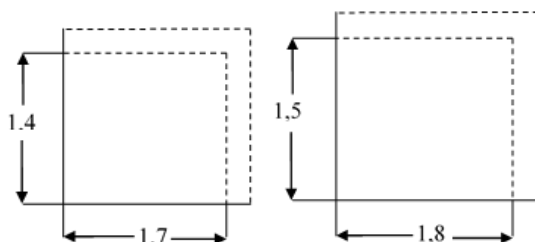


Penjumlahan bilangan $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$ dapat digambarkan dengan meletakkan dua buah ruas garis dari ujung ke ujung seperti sebuah garis lurus dan temukan panjangnya.

$\sqrt{2}$ antara	$\sqrt{3}$ antara	$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ antara
○ 1 dan 2	○ 1 dan 2	○ 2 dan 4
○ 1.4 dan 1.5	○ 1.7 dan 1.8	○ 3.1 dan 3.3
○ 1.41 dan 1.42	○ 1.73 dan 1.74	○ 3.14 dan 3.16
○ 1.414 dan 1.415	○ 1.72 dan 1.733	○ 3.146 dan 3.148

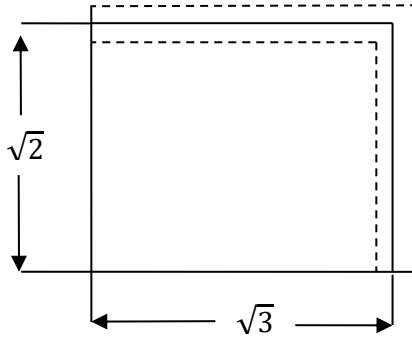
Tanpa harus memberikan bukti, dengan mudah kita melihat cara lain penjumlahan ini dengan jaring interval, dengan cara demikian kita bisa menggambarkan bilangan – bilangan irasional tertentu. Penjumlahan ini bersifat komutatif dan asosiatif untuk interval-interval yang didefinisikan dari hasil penjumlahan $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Jika kita gambarkan persegi panjang dengan panjang sisi 1.4 satuan dan 1.7 satuan, luasnya menjadi $1.4 \times 1.7 = 2.38$ persegi satuan.



Dengan cara yang sama kita gambarkan sebuah persegi panjang dengan panjang sisi 1.5 satuan dan 1.8 satuan, dan luasnya adalah $1.5 \times 1.8 = 2.70$ persegi satuan.

Sekarang jika kita menggambar persegi panjang yang lain dengan sisi $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$ maka luasnya adalah $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$. Luasannya akan berada diantara dua luasan yang lalu. Bilangan rasional untuk luasan ini harus berada antara 2.38 dan 2.70.



$\sqrt{2}$ antara	$\sqrt{3}$ antara	$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ antara
<input type="radio"/> 1 dan 2	<input type="radio"/> 1 dan 2	<input type="radio"/> 1 dan 4
<input type="radio"/> 1.4 dan 1.5	<input type="radio"/> 1.7 dan 1.8	<input type="radio"/> 2.38 dan 2.70
<input type="radio"/> 1.41 dan 1.42	<input type="radio"/> 1.73 dan 1.74	<input type="radio"/> 2.4393 dan 2.4708
<input type="radio"/> 1.414 dan 1.415	<input type="radio"/> 1.72 dan 1.733	<input type="radio"/> 2.439348 dan 2.452195

Tampak jelas bahwa kita memiliki jaring interval lain pada kolom kanan, daripada harus mendefinisikan bilangan real tertentu yang lain. Juga, bahwa perkalian bersifat komutatif, asosiatif dan distributif perkalian terhadap penjumlahan.

4. Campuran Bilangan Irasional dan Bilangan Rasional

Jaring interval adalah cara yang rumit untuk menyatakan sebuah bilangan yang belum dihitung. Kita bisa

menyederhanakannya dengan notasi desimal tak hingga sebagai berikut :

- | | |
|----------|--------------------------------|
| 1.4 ... | Artinya antara 1.4 dan 1.5 |
| 1.41... | Artinya antara 1.4 dan 1.42 |
| 1.414... | Artinya antara 1.414 dan 1.415 |

Ini berarti bahwa bilangan irasional dan bilangan rasional dapat dicampur, untuk tujuan perhitungan, mengganti bilangan irasional dengan pendekatan rasional, yaitu mengganti $\sqrt{2}$ (1.414...) dengan 1.414 tanpa titik-titik. Tetapi kita harus hati-hati dengan menempatkan derajat akurasi dari jawaban kita.

Sehingga dapat ditulis:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}x\sqrt{3} &= (1.414\dots)x(1.732\dots) \\ &= 2.449048\dots\end{aligned}$$

Hal ini akan bermakna bahwa hasil yang didapat antara 2.449048 dan 2.449049 yang tidak kita ketahui. Lihat kembali jaring interval untuk $\sqrt{2}x\sqrt{3}$, dapat kita katakan dengan jelas bahwa hasilnya berada diantara 2.439348 dan 2.452195. Untuk alasan yang sama, kita tidak menulis secara lengkap seperti ini : $\sqrt{2}x\sqrt{3} = 2.449\dots$ Pembaca dapat memahami bahwa sebenarnya semua yang kita katakan kedalam notasi desimal tak hingga yaitu $\sqrt{2}x\sqrt{3} = 2.4\dots$

Dapat juga dijelaskan bahwa :

$$(1.414) \times (1.732) = 2.449048 \text{ (rasional)}$$

$$(1.414\dots) \times (1.732\dots) = 2.4\dots \text{ (irasional)}$$

RANGKUMAN

- ❖ Sistem bilangan adalah himpunan konsep matematika (yang disebut bilangan) dengan dua operasi biner penjumlahan “+” dan perkalian “×” dan bersifat tertutup pada himpunan, sedemikian hingga:
 1. Penjumlahan bersifat komutatif dan asosiatif
 2. Perkalian bersifat komutatif dan asosiatif
 3. Perkalian bersifat distributif atas penjumlahan
- ❖ Bilangan asli adalah himpunan bagian dari bilangan bulat yang merupakan bilangan bulat positif yang dimulai dari angka 1, yaitu $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- ❖ Bilangan bulat adalah bilangan yang terdiri dari bilangan asli $\{1, 2, 3, \dots\}$ negatifnya $\{-1, -2, -3, \dots\}$ dan 0. Himpunan semua bilangan bulat dalam matematika dilambangkan dengan Z .
- ❖ Bilangan Rasional adalah sistem bilangan yang merupakan himpunan dari semua bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan a/b dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$. Bilangan rasional berasal dari bahasa inggris yaitu "*rational*" karena bilangan ini dapat dinyatakan dalam bentuk perbandingan (rasio).

- ❖ Bilangan Irasional adalah bilangan yang bukan hasil bagi bilangan bulat dan bilangan asli, sehingga tidak dapat dinyatakan dalam bentuk a/b dan juga tidak mempunyai bentuk desimal berulang.
- ❖ Bilangan *Real* adalah bilangan yang memuat bilangan rasional dan irasional.

Latihan Soal 9.1

Pertemuan ke-12 (*untuk mengetahui kemampuan analisis mahasiswa dalam memahami materi tentang sistem bilangan*)

1. Jelaskan pengertian sistem bilangan!
2. Apa yang dimaksud dengan lawan yang menghapus?
3. Uraikan pengembangan bilangan bulat dan bilangan rasional berdasarkan ide awal pada kejadian nyata dan tunjukkan bahwa bilangan bulat dan bilangan rasional memenuhi persyaratan matematis (sistem bilangan)!

DAFTAR PUSTAKA

- Abdurrahman & Mulyono. (2003). *Pendidikan bagi Anak yang Berkesulitan Belajar*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Angleis, Paul J. dan Martin, Clessen J.I. (1980). *Psycholinguistic: Two Views, E. Helmut Esan (ed.) Language and Communication*, Columbia, SC: Hornbeam Press, Incorporated.
- Bandura, Albert. (1997). *Self-Efficacy: The Exercise of Control*. New York: W.H. Freeman and Company.
- Bell, F.H. (1981). *Teaching and Learning Mathematics (In Secondary School)*. United States of America: Wm. C. Brown Company Publishers.
- Brown, H. Douglas, (1987). *Principles of Language Learning and Teaching: 2 nd Edition*. Englewood Cliffs: Prentice Hall Regents.
- Bruning, R. H., Schraw, G. J., Norby, M. M., Ronning, R. R. (2004). *Cognitive psychology and instruction fourth edition*. Ohio: Pearson Education Ltd.

- Cai, Lane, Jacobcsin. (1996). *Assesing Students' mathematical communication*. Official Journal of Science and Mathematics. 96(5).
- Cassirer, Ernst. (1990). *Manusia dan Kebudayaan: Sebuah Esei Tentang Manusia*. penerjemah. Alois A. Nugorocho, Jakarta: Gramedia.
- Clark, Eve V, (1982). *The Young World Maker. A Case Study of Innovations in the Child's Lexicon*. (eds) E. Wanner dan L.R. Gleitman, Language Acquisition: The State of The Art, Cambridge: CUP.
- Dahar, W & Ratna. (2006). *Teori-Teori Belajar dan Pembelajaran*. Bandung: Erlangga.
- Degeng,I Nyoman. (1989). *Ilmu Pengajaran Taksonomi Variabel*. Jakarta: Dirjen Dikti.
- Dillistone, F. W. (2002). *The Power of Symbols*. Yogyakarta: Penerbit Kansius.
- Duane, S P. & Sydney Ellen Schultz, E S. (2013). *Sejarah Psikologi Modern*. Bandung: Nusa Media.
- Elliot, Alison J. (1987). *Child Language*. Cambridge: CUP.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

- Hallahan, D.P., & Kauffman, J.M., & Lloyd, J. W. (1985). *Introduction to Learning Disability (2nd ed)*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Hamdi S. (2012). *MEMAHAMI KARAKTERISTIK PSIKOLOGIS SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERDASARKAN KECERDASAN INTUITIF DAN REFLEKTIF*. Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema "Kontribusi Pendidikan Matematika dan Matematika dalam Membangun Karakter Guru dan Siswa" pada tanggal 10 November 2012 di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.
- Hamid, Zulkifley. (1989). *Hipotesis Nurani dan Pemerolehan Bahasa Pertama*. dalam *Jurnal Bahasa*, Oktober 1989, pp. 770-777.
- Hiebert, J. & Carpenter P. T. (1992). *Learning and Teaching with Understanding*. Dalam D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (h. 65 -100). New York: Macmillan Publishing Company.
- Hill, J. M. (2012). *An Analysis of Schema-Based Instruction as an Effective Math Intervention for Middle School*

Students Diagnosed with Emotional Behavioral Disorder or Identified as At-Risk in Texas. Texas: Texas Tech University.

Hudoyo, H (2002). *Representasi Belajar Berbasis Masalah.* Jurnal Matematika dan Pembelajarannya. ISSN: 085-7792. Volume viii, edisi khusus.

Isnawan, M G. (2013). *EKSISTENSI SKEMA SEBAGAI INDUK PEMBELAJARAN MATEMATIKA YANG LEBIH BAIK.* Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 18 Mei 2013.

Jerome S Bruner. (1960). *The Process of Education.* Harvard University Press Cambridge.

Jitendra, A. K. & Star, J. R. (2011). *Meeting the Needs of Students with Learning Disabilities in Inclusive Mathematics Classrooms: The Role of Schema-Based Instruction on Mathematical Problem-Solving.* Theory into Practice, Vol. 50, No. 1, 12-19.

Krulik, Stephen dan Rudnick, Jesse A. (1995). *The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Elementary School.* Boston : Temple University.

- Krutetskii. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.
- McNeill, David, (1970). *The Acquisition of Language: The Study of Developmental Psycholinguistics*. New York: Happer & Row Publishers.
- Mulyana, T. (2014). *Kajian Pembelajaran Matematika Berdasarkan Pada Beberapa Teori Belajar*". <http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA.html>.
- Nasution. (2007). *Berbagai Pendekatan dalam Proses Belajar dan Mengajar*. Jakarta: PT. Bumi Aksara.
- Padesky, C. A. (1994). *Schema Change Processes in Cognitive Therapy*. *Clinical Psychology and Psychotherapy*, Vol. 1 (5), 267-278.
- Pajares, F. (2002). *Self-Efficacy Beliefs and Mathematical Problem-Solving of Gifted Students (Online)*. <http://www.des.emory.edu/mfp/Pajares1996cel.pdf>.
- Pratama & Dalyono, M. (1997). *Psikologi Pendidikan*. Jakarta: Rineka Cipta.

- Polya, G. (1985). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Risnawati. (2013). *Keterampilan Belajar Matematika*. Yogyakarta: Aswajapressindo.
- Rosen, Kenneth H., (2000). *Elementary Number Theory and Its Applications. Fourth Edition*. Addison Wesley Longman. Inc. Massachusetts.
- Ruseffendi, H.E.T. (1990). *Pengajaran Matematika Modern dan Masa Kini untuk Guru dan PGSD*. Seri 1-6. Bandung: Tarsito.
- _____. (2006). *Pengantar kepada membantu Guru mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Transito.
- _____. (2008). *Pendidikan Matematika Realistik Indonesia dan Model-model Lain*. Bandung: Tarsito.
- Sabirin M. (2014). *Representasi dalam Pembelajaran Matematika*. JPM IAIN Antasari Vol. 01 No. 2. H. 33-44.
- Sardiman A. M. (2006). *Interaksi Motivasi Belajar Mengajar*. Jakarta: Rineka Cipta.

- Schunk, D.H. (No.73, 1981). *Modeling and Attributional Effects on Children's Achievement: A Self-efficacy Analysis*. Journal of Educational Psychology.
- _____. (1995). *Self-efficacy and Education and Instruction*. In J.E. Maddux (Ed.), *Self-Efficacy, Adaptation, and Adjustment: Theory, Research, and Application* (pp. 281-303). New York: Plenum.
- Schwartz, R & Perkins, D. (1989). *Teaching Thinking-Issues and Approaches*. Midwest Publication: Pasific Grove.
- Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Great Britain: Richard Clay (The Chaucer Press) Ltd, Bungay, Suffolk.
- Springer, G. T. (2011). *Visualizing Mathematical Concepts*. MEI CPD Conference, 1-4.
- Stoltz, Paul G. (2004). *Adversity quotient mengubah hambatan menjadi peluang*. Alih bahasa T. Hermaya. Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia.
- Surya, M. (2013). *Psikologi Guru Konsep dan Aplikasinya*. Bandung: Alfabeta.
- Van De Walle, John. A. (2008). *Matematika Sekolah Dasar Dan Menengah*. Jakarta : Erlangga.

- Wade, C & Travis, C. (2011). *Psychology, 9th Edition*. Jakarta: PT Gelora Aksara.
- Walid, A. (2012). *MEMAHAMI GAGASAN DARI SKEMA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA*. Edu-Math; Vol 3.
- Woolfolk, A.E. (1998) . *Educational Psychology, 7th ed*. United States of America: Ally & Baycon.
- Zimmerman,B.J. (1986). *Becoming a self regulated learner*. Which are the key sub processes? Contemporary Educational Psychology,11,307-313.
- _____. (1990). *Self regulated learning and academic achievement: Anoverview*. Educational Psychologist, 25(1),3-17.
- _____. (2002). *Becoming a self regulated learner: Anoverview*. Theory into Practice, 41,64-70.
- Zimmerman,B.J.,&Martinez-Pons,M. (2001). *Students differences in self regulated learning: Relatinggrade ,sex ,and gift ednesstoselfefficacyandstrategyuse*. Journal of Educational Psychology,82(1),51-59.
- Zubaidah A, & Risnawati. (2015). *Psikologi Pembelajaran Matematika*. Yogyakarta: Aswaja Pressindo.

GLOSARIUM

❖ *Abnormalitas Persepsi Visual*

Anak berkesulitan belajar matematika yang mengalami kesulitan untuk melihat berbagai objek dalam hubungannya dengan kelompok atau set.

❖ *Abstraksi*

Sebuah aktifitas berfikir secara sadar akan kesamaan-kesamaan diantara pengalaman-pengalaman kita.

❖ *Adversity Quotient*

Kecerdasan individu dalam berfikir, mengontrol, mengelola, dan mengambil tindakan dalam meghadapi kesulitan, hambatan atau tantangan hidup, serta mengubah kesulitan maupun hambatan tersebut menjadi peluang untuk meraih kesuksesan.

❖ *Akomodasi*

Proses mengubah cara yang ada dalam memandang sesuatu atau gagasan yang berlawanan atau tidak sesuai dengan skema yang ada.

❖ **Angka**

Simbol ataupun lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan.

❖ **Asimilasi**

Proses kognitif yang dengannya siswa mengintegrasikan persepsi, konsep, ataupun pengalaman baru ke dalam skema atau pola yang sudah ada di dalam pikirannya. Asimilasi tidak menyebabkan perubahan melainkan memperkembangkan skemata.

❖ **Bahasa Pertama**

Anak yang sejak semula tanpa bahasa, kini ia dapat berbahasa. (bahasa yang pertama kali dikuasai seseorang).

❖ **Bilangan**

Suatu konsep matematika yang bersifat abstrak yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran atau suatu ide yang digunakan untuk mengabstraksikan banyaknya anggota suatu himpunan.

❖ **Bilangan Asli**

Himpunan bagian dari bilangan bulat yang merupakan bilangan bulat positif yang dimulai dari angka 1, yaitu $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

❖ Bilangan bulat

Bilangan yang terdiri dari bilangan asli $\{1, 2, 3, \dots\}$ negatifnya $\{-1, -2, -3, \dots\}$ dan 0. Himpunan semua bilangan bulat dalam matematika dilambangkan dengan Z.

❖ Bilangan Irasional

Bilangan yang bukan rasional. Bilangan irrasional ini bukan hasil bagi bilangan bulat dan bilangan asli, sehingga tidak dapat dinyatakan dalam bentuk a/b dan juga tidak mempunyai bentuk desimal berulang.

❖ Bilangan Pecahan

Bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dimana: a dan b adalah bilangan asli, $b \neq 0$ dan b bukan faktor dari a.

❖ Bilangan Rasional

Sistem bilangan yang merupakan himpunan dari semua bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan a/b dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$. Bilangan rasional berasal dari bahasa Inggris yaitu "*rational*" karena bilangan ini dapat dinyatakan dalam bentuk perbandingan (rasio).

❖ *Classical Conditioning*

Segala hal yang bertalian dengan belajar yang dapat menjelaskan bagaimana manusia belajar makna kata.

❖ *Conditioned Stimulus*

Stimulus yang dapat menimbulkan respons (R) setelah latihan berulang kali, dan dengan memasangkannya bersamaan dengan *unconditioned stimulus*.

❖ **Elemen**

Anggota atau objek-objeknya dari suatu himpunan.

❖ **Himpunan**

Kumpulan objek-objek yang didefinisikan dengan baik dan jelas.

❖ **Hirarki Belajar**

Urut-urutan pengetahuan dari yang paling sederhana sampai yang paling kompleks.

❖ *Imitation*

Peniruan dalam proses pemerolehan bahasa pertama

❖ *Innateness Hypothesis* (Hipotesis Bawaan)

Pandangan yang beranggapan bahwa kemampuan berbahasa merupakan pemberian biologis.

❖ **Isomorfis**

Berada dalam hubungan yang sepadan.

❖ **Kecerdasan Intuitif**

Kemampuan untuk memunculkan dan menyeleksi ide/konsep/ skema yang sudah kita ketahui untuk merespons stimulus secara otomatis dan spontan dengan tingkat akurasi yang tinggi.

❖ Kecerdasan Reflektif

Kemampuan untuk menyadari kebiasaan mentalnya dan kemampuan untuk mentransendenksikan pola-pola yang terbatas, dengan kata lain kemampuan untuk memikirkan cara berpikir.

❖ Kelas Ekuivalen

Pembagian (*partisi*) dalam suatu himpunan yang dilakukan berdasarkan suatu relasi ekuivalen.

❖ Klasifikasi

Pengelompokan pengalaman-pengalaman yang mempunyai kesamaan-kesamaan dari hasil abstraksi.

❖ Kognisi

Berpikir dan mengamati, tingkah laku yang mengakibatkan orang memperoleh pengertian atau yang dibutuhkan untuk menggunakan pengertian.

❖ Konsep

Ide abstrak yang memungkinkan kita mengelompokkan benda-benda kedalam contoh dan noncontoh.

❖ *Language Acquisition Device (LAD)*

Suatu bagian fisiologi dari otak yang dikhususkan untuk memproses bahasa, dan hanya manusia yang memiliki alat ini, sehingga hanya manusia yang mampu berbahasa.

❖ Mengabstraksi

Merubah sikap yang terdahulu sehingga menghasilkan pengalaman baru dalam mengelompokkan suatu objek berdasarkan kemiripan sifat dari suatu kelompok yang telah terbentuk.

❖ **Mengklasifikasi**

Mengumpulkan secara bersama pengalaman kita dengan dasar dari kesamaan.

❖ ***Operant Conditioning***

Merujuk pada pengkondisian atau pembiasaan di mana manusia memberikan respons atau *operant* (kalimat atau ujaran) tanpa stimulus yang tampak; *operant* ini dipelajari dengan pembiasaan (*conditioning*).

❖ **Operasi**

Suatu aturan dalam mengkombinasikan dua ide matematika untuk memperoleh ide yang ketiga.

❖ **Penguatan (*reinforcement*)**

Peristiwa atau sesuatu yang dianggap sebagai hadiah atau hukuman yang menyebabkan makin besarnya kemungkinan stimulus (S) tertentu menghasilkan respons (R) tertentu.

❖ **Penjumlahan**

Suatu cara/aturan dalam mengkombinasikan/menambah dua bilangan atau lebih untuk memperoleh suatu nilai yang tunggal.

❖ **Perkalian**

Suatu cara/aturan dalam mengkombinasikan/penjumlahan berulang dua bilangan untuk memperoleh suatu nilai yang tunggal.

❖ **Perseverasi**

Anak yang perhatiannya melekat pada suatu objek saja dalam jangka waktu yang relatif lama.

❖ ***Prosedur Conditioning***

Program pengajaran bahasa kepada tuna rungu dan tuna grahita.

❖ ***Reinforce***

Prilaku atau respons yang diikuti oleh penguatan.

❖ **Relasi Ekuivalensi**

Eelasi biner yang bersifat reflektif, simetris dan transitif. Relasi "sama dengan" merupakan contoh dasar dari relasi ekuivalensi.

❖ **Representasi**

Bentuk interpretasi pemikiran siswa terhadap suatu masalah, yang digunakan sebagai alat bantu untuk menemukan solusi dari masalah tersebut.

❖ **Respons**

Mengacu pada perubahan perilaku yang melibatkan adanya aktivitas yang disebabkan oleh otot dan kelenjar.

❖ *Self-Efficacy*

Penilaian seseorang terhadap kemampuannya untuk mengorganisasikan dan melaksanakan sejumlah tingkah laku yang sesuai dengan unjuk kerja (*performance*) yang dirancangnya.

❖ *Self-Regulated Learning*

Proses aktif dan konstruktif siswa dalam menetapkan tujuan untuk proses belajarnya dengan melibatkan metakognisi, motivasi, dan perilaku dalam proses belajar dan berusaha untuk memonitor, meregulasi, dan mengontrol kognisi, motivasi, dan perilaku, yang kemudian semuanya diarahkan dan didorong oleh tujuan dan mengutamakan konteks lingkungan.

❖ **Simbol**

Suara atau sesuatu yang dapat dilihat, yang secara mental berhubungan dengan suatu ide.

❖ **Skema**

Perangkat mental/struktur-struktur konsep untuk mengintegrasikan pengetahuan yang ada dalam memperoleh pengetahuan baru.

❖ **Stimulus**

Mengacu pada semua hal atau perubahan yang ada dalam lingkungan.

BIOGRAFI PENULIS



Lahir di kota Sengkang, pada tanggal 06 Juli 1990, **Andi Aras** adalah anak kedua dari pasangan A. Makkarodda dan A. Manawara. Penulis menyelesaikan studi SD – SMA di kota kelahirannya, Sengkang. Setelah lulus SMA, beliau melanjutkan studi S-1 Pendidikan Matematika di UNISMUH Makassar selama 4 tahun (2009-2013). Setelah mendapatkan gelar serjana pendidikan, di tahun 2014 penulis menjadi guru pendidikan matematika di SMA N 7 Wajo dan MT's No. 2 Bontouse. Pada tahun 2015 penulis melanjutkan Pendidikan Megister (S-2) di PPs Universitas Negeri Makassar jurusan pendidikan matematika selama 1 tahun 6 bulan. Pada tahun 2017 penulis diterima menjadi Dosen Tetap di IAIN Parepare sampai sekarang. Selain itu penulis juga aktif melakukan penelitian dibidang pendidikan matematika.

Hasil publikasi penulis dapat dilihat <https://scholar.google.co.id/citations?hl=id&user=uKmoD0AAAAJ>.



Buhaerah, lahir di wajo 5 November 1980. Penulis menyelesaikan studi SD – SMA di kota kelahirannya, Wajo. Setelah lulus SMA, beliau melanjutkan studi S-1 Pendidikan Matematika di Universitas Muhammadiyah Parepare selama 4 tahun (1999-2003). Setelah mendapatkan gelar S-1 pendidikan matematika pada tahun 2003, penulis diterima menjadi dosen di IAIN Parepare sampai sekarang. Pada tahun 2007 penulis melanjutkan Pendidikan S-2 di Universitas Negeri Makassar selama 2 tahun (2007 – 2009). Pada tahun 2010 penulis melanjutkan Pendidikan Doktorat pada bidang pendidikan matematika di Universitas Negeri Malang (2010–2015). Setelah menyelesaikan studi Doktoralnya, penulis aktif memberikan kuliah umum, narasumber seminar nasional pendidikan matematika, pelatihan penulisan artikel ilmiah dan aktif melakukan penelitian dibidang Pendidikan matematika.

Hasil publikasi penulis dapat dilihat <https://sinta.ristekbrin.go.id/authors/detail?id=5974663&view=overview>.