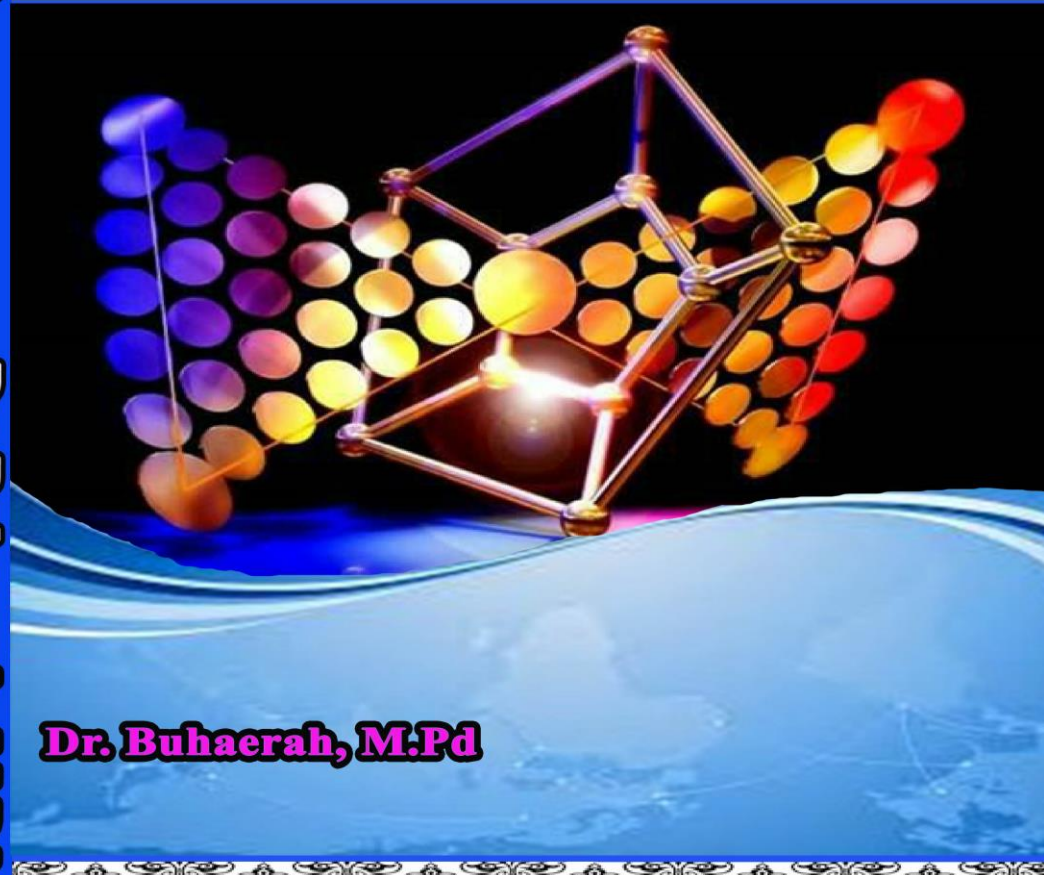
IAIN PAREPARE
NUSANTARA PRESS

Matematika Diskrit

Dr. Buhaerah, M.Pd

MATEMATIKA DISKRIT



Dr. Buhaerah, M.Pd

MATEMATIKA DISKRIT

Cetakan 1 : Nopember 2019
ISBN : 978-623-92161-5-3

vii, 156 hlm, 21 x 14 cm
Sulaesi Selatan : IAIN Parepare Nusantara Press, 2019

Tim Penyusun : Buhaerah

Penerbit, : IAIN Parepare Nusantara Press Parepare,
Jl. Amal Bakti, No. 8 Parepare, Sulawesi Selatan
Telp. (0421) 21307, Fax (0421) 24404
INDONESIA

KATA PENGANTAR

Buku Matematika Diskrit disusun untuk menjadi salah satu acuan bagi mahasiswa dalam mengembangkan kemampuan tentang hal-hal yang diskrit. Selain itu, buku ini dapat digunakan sebagai salah satu bahan ajar bagi mahasiswa untuk mencapai tujuan pembelajaran. Adapun bagin-bagian terpenting dari buku ini, antara lain: BAB I INDUKSI MATEMATIKA, meliputi: Prinsip Induksi Matematika, Prinsip Induksi Matematika Kuat. BAB II KOMBINATORIKA, meliputi: dua prinsip dasar perhitungan, permutasi, kombinasi,permutasi dan kombinasi multi-himpunan, koefisien binomial, prinsip inklusi dan eksklusi. BAB III FUNGSI PEMBANGKIT, meliputi; pungsi pembangkit biasa, menghitung koefisien pada fungsi pembangkit, fungsi pembangkit eksponen. BAB IV RELASI REKURSIF, meliputi; definisi, relasi rekursif linear dengan koefisien konstanta, relasi rekursif homogen dengan koefisien konstata, relasi rekursif tidak homogen koefisien konstanta, menyelesaikan relasi rekursif dengan fungsi pembangkit. BAB V TEORI GRAF, meliputi; sejarah singkat dan beberapa pengertian dasar, teori graf, graf sebagai model matematika dan aplikasinya, refresentasi graf dan graf khusus, dan graf Euler dan graf Hamilton. BAB VI POHON, meliputi; Definisi, Hutan, Algoritma Kruskal untuk Pohon Pembangun Mimimun, Graf Planar, Teorema Kuratowski, Fornmula Euler, Pewarnaan Graf, Algoritma Welsh dan Powell, dan Pewarnaan Sisi. Demikian pengantar yang saya buat, kritikan dan saran terhadap buku ini ini yang sifanya membangun kami ucapkan banyak terima kasih.

DAFTAR ISI

Halaman Judul i
PENDAHULUAN ii
DAFTAR ISI vii

BAB I Induksi Matematika 1
A. Prinsip Induksi Matematika 1
B. Prinsip Induksi Matematika Kuat 3
C. Uji KOmpetensi 6

BAB II KOMBINATORIKA 7
A. Dua Prinsip Dasar Perhitungan 7
B. Permutasi 9
C. Kombinasi 11
D. Permutasi dan Kombinasi Multi-himpunan 13
E. Koefisien Binomial 17
F. Prinsip Inklusi dan Eksklusi 27
G. Uji KOmpetensi 33

BAB III FUNGSI PEMBANGKIT 35
A. Pungsi Pembangkit Biasa 35
B. Menghitung Koefisien pada Fungsi Pembangkit 38
C. Fungsi Pembangkit Eksponen 41
D. Uji KOmpetensi 45

BAB IV RELASI REKURSIF 47
A. Definisi 47
B. Relasi Rekursif Linear dengan Koefisien Konstanta 48
C. Relasi Rekursif Homogen dengan Koefisien Konstata 49
D. Relasi Relkursif Tidak Homogen Koefisien Konstanta 55
E. Menyelesaikan Relasi Rekursif dengan Fungsi Pembangkit 59
F. Uji KOmpetensi 63

BAB V TEORI GRAF 65
A. Sejarah Singkat dan Beberapa Pengertian Dasar Teori Graf 65
B. Graf sebagai Model Matematika dan Aplikasinya 73
C. Refresentasi Graf dan Beberapa Graf Khusus 82
D. Graf Euler dan Graf Hamilton 98
E. Uji KOmpetensi 103

BAB VI POHON 111
A. Definisi 111
B. Hutan 114
C. Algoritma Kruskal untuk Pohon Pembangun Mimimun 117

D. Graf Planar 119
E. Teorema Kuratowski 121
F. Fornmula Euler 122
G. Pewarnaan Graf 128
H. Algoritma Welsh dan Powell 136
I. Pewarnaan Sisi 142
J. Uji KOmpetensi 146

DAFTAR RUJUKAN 155

BAB I
INDUKSI MATEMATIKA

A. Prinsip Induksi Matematika

Sebuah cara pembuktian yang sering dipakai, simpel dan sangat ampuh di dalam matematika kombinatorial dan ilmu komputer, dikenal dengan prinsip induksi matematika. Untuk suatu pernyataan tertentu yang melibatkan sebuah bilangan asli n, jika kita dapat menunjukkan bahwa:

(1) Pernyataan itu benar untuk $n = n_0$ dan

(2) Pernyataan itu benar untuk $n = k + 1$, dengan mengasumsikan bahwa pernyataan itu benar untuk $n = k, (k \geq n_0)$,

Maka kita dapat menyimpulkan bahwa pernyataan itu benar untuk semua bilangan asli $n \geq n_0$. Langkah (1) biasanya dinamakan basis induksi, sedangkan langkah (2) dinamakan langkah induksi. Di samping itu, asumsi bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = k$ di dalam (2) biasanya dinamakan hipotesis induksi.

Kita perhatikan bahwa prinsip induksi matematika merupakan akibat langsung dari definisi bilangan asli. Perhatikan suatu himpunan S yang mempunyai sifat

(1) Bilangan asli n_o ada di dalam S.

(2) Jika bilangan asli k ada di dalam S, maka bilangan asli k + 1 juga ada di dalam S, ($k > n_o$).

Berdasarkan definisi himpunan bilangan asli, kita dapat menyimpulkan bahwa S mengandung semua bilangan asli yang lebih besar atau sama dengan *no*. Akan tetapi, sesungguhnya inilah yang dinyatakan oleh prinsip induksi matematika ketika kita mengambil S sebagai himpunan bilangan asli yang membuat pernyataan yang diberikan tadi benar.

Contoh 1.1

Buktikan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

untuk semua $n \geq 1$.

Solusi

(1) *Basis induksi.* Untuk $n = 1$, kita peroleh $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

adalah suatu pernyataan yang benar.

(2) *Langkah induksi.* Misalkan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

adalah benar.

Sekarang kita peroleh

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}(k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

Bacalah dari pernyataan pertama hingga pernyataan terakhir, rangkaian kesamaan ini merupakan pernyataan untuk n = k + l. Jadi kebenaran pernyataan untuk n = *k* secara tidak langsung menyatakan kebenaran pernyataan untuk $n = k + l$. Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti benar untuk setiap bilangan bulat positif *n.*

Contoh 1.2

Buktikan bahwa

$2n > n + 20$

untuk setiap bilangan bulat $n \geq 5$.

Solusi

(1) Basis induksi. Untuk n = 5, kita peroleh $2^5 > 5 + 20$

adalah suatu pernyataan yang benar.

(2) *Langkah induksi.* Misalkan bahwa

$$2^k > k + 20$$

adalah benar.

Sekarang kita peroleh

$$2^{k+1} = 2\,2^k > 2(k + 20) = 2k + 40 > (k + 1) + 20.$$

Maka disimpulkan bahwa $2^n > n + 20$ adalah benar untuk $n \geq 5$.

B. Prinsip Induksi Matematika Kuat

Bentuk prinsip induksi matematika yang lebih nkuatn, yang sering disebut sebagai prinsip induksi matematika kuat, dapat dinyatakan sebagai berikut. Untuk suatu pernyataan tertentu yang melibatkan bilangan asli *n*, jika kita dapat menunjukkan bahwa:

(1') pernyataan itu benar untuk $n = n_0$ dan

(2') pernyataan itu benar untuk $n = k + 1$, dengan mengasumsikan bahwa pernyataan itu benar untuk $n_o \leq n \leq k$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa pernyataan itu benar untuk semua bilangan asli $n \geq n_0$.

Bentuk ini lebih kuat dari prinsip induksi matematika yang disajikan di atas. Tegasnya, di dalam langkah induksi, untuk membuktikan bahwa pernyataan yang bersangkutan benar untuk $n = k + 1$, kita dibolehkan membuat asumsi yang lebih kuat di dalam (2') daripada di dalam (*2*) di atas. Dengan kata lain, prinsip induksi matematika kuat memungkinkan kita mencapai kesimpulan yang sama meskipun memberlakukan asumsi yang lebih banyak.

Contoh 1.3

Kita akan memperlihatkan bahwa setiap bilangan bulat positif *n* yang lebih besar atau sama dengan *2* merupakan bilangan prima atau hasil kali beberapa bilangan prima.

(1') *Basis induksi.* Untuk $n = 2$, karena *2* adalah bilangan prima, pernyataan tersebut benar.

(2') *Langkah induksi.* Misalkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk

sembarang bilangan bulat $n,\ 2 \leq n \leq k.$ Untuk bilangan bulat k + *1*, jika k + *1* bilangan prima, maka pernyataan itu benar. Jika $k + 1$ bukan bilangan prima, maka $k + 1$ dapat dituliskan sebagai *pq*, dengan $p \leq k$ dan $q \leq k.$

Menurut hipotesis induksi, p merupakan bilangan prima atau hasil kali beberapa bilangan prima. Begitu juga, *q* adalah bilangan prima atau hasil kali beberapa bilangan prima. Ini berarti *pq* adalah hasil kali beberapa bilangan prima.

Contoh 1.4

Misalkan kita akan menelusuri silsilah keluarga kita untuk mengetahui nenek moyang kita. Kita akan memberlakukan asumsi yang memudahkan yaitu bahwa untuk setiap nenek moyang kita, kita dapat menelusuri kedua orang tuanya atau kita tidak dapat menelusuri keduanya. Di dalam suatu silsilah keluarga, seseorang dinamakan 'daun' jika kita tidak memiliki catatan untuk menelusuri orang tuanya dan seseorang dinamakan sebagai 'simpul internal' jika orang tuanya telah ditelusuri.

Kita akan menunjukkan bahwa di dalam suatu silsilah keluarga, banyaknya daun selalu satu lebih banyak daripada banyaknya simpul internal.

(1') *Basis induksi.* Pernyataan ini benar bila $n = 1.$ Bila hanya ada satu orang di dalam silsilah keluarga, orang ini adalah daun dan di sini tidak ada simpul internal.

(2') *Langkah induksi.* Kita asumsikan bahwa pernyataan ini benar untuk semua silsilah dengan *n* orang, $1 \leq n \leq k.$ Kita ingin menunjukkan bahwa pernyataan ini benar untuk sembarang silsilah keluarga dengan $k + 1$ orang.

Perhatikan silsilah keluarga seorang laki-laki dengan $k + 1$ orang. Misalkan *p* menyatakan banyaknya daun dan *q* banyaknya simpul internal di dalam silsilah ini. Karena setidaknya ada tiga orang di dalam silsilah ini, kedua orang tua laki-1aki ini pasti ada di dalam silsilah. Misalkan *n1* menyatakan banyaknya orang di dalam keluarga ayah laki-1aki tadi, denganpI di antaranya menjadi daun dan $_{q1}$ menjadi simpul internal. Misalkan *n2* menyatakan banyaknya

orang di dalam keluarga ibu laki-1aki tadi, dengan P_2 di antaranya menjadi daun dan *q2* menjadi simpul internal. Karena $n1 \leq k$ dan $n2 \leq k$, maka menurut hipotesis induksi

$P_1 = qi + 1$

$P_2 = q_2 + 1$

Karena

$P = P_1 + P_2$

$q = q_1 + q_2 + 1$

maka kita memperoleh

$p = q_1 + q_2 + 2 = q + 1$.

C. Uji Kompetensi

A. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan pernyataan berikut adalah benar untuk setiap bilangan bulat n ≥ 1.

1. $1 + 2 + 3 + ,, + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
3. $1^4 + 2^4 + 3^4 + + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$

B. Untuk setiap bilangan bulat positif i, tersedia bola bertanda bilangan i yang tak terbatas jumlahnya. Awalnya kita diberi sekantung bola dan kita melemparkan bola-bola itu satu per satu. Kalau kita melemparkan bola yang bertanda i, kita mendapat ganti bola-bola yang bertanda *1, 2, ..., i – 1*. Permainan selesai bila kantung itu kosong. Kita ingin tahu apakah permainan ini selalu berakhir untuk berapapun jumlah bola yang diberikan pada awalnya.

C. Tentukanlah bilangan bulat pertama N sehingga pernyataan berikut benar untuk semua $n \geq N$ dan kemudian buktikanlah pernyataan tersebut.

1. $3n + 25 < 3^n$
2. $n - 100 > \log n$
3. $n^2 < 2^n$

D. Untuk semua n ≥ 1, tunjukkan bahwa n3 + 2n adalah kelipatan 3.

E. Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat yang terbentuk dari 3n angka yang sama selalu habis dibagi oleh 3^n (misalnya, 222 dan 777 habis dibagi 3; 222 222 222 dan 555 555 555 habis dibagi 9).

F. Untuk membayar biaya pos sebesar n rupiah (n ≥ 8) selalu dapat digunakan hanya perangko *3* rupiah dan perangko *5* rupiah sajan. Buktikan pernyataanitu benar.

BAB II
KOMBINATORIKA

A. Dua Prinsip Dasar Perhitungan

Pada bab ini kita akan mengungkapkan dua prinsip dasar perhitungan dan sejumlah konsekuensinya. Prinsip pertama sangat elementer, yaitu sebuah folunula berdasarkan prinsip bahwa keseluruhan sama dengan jumlah dari bagian-bagiannya.

Prinsip penjumlahan

Jika sebuah himpunan objek-objek S dipartisi menjadi himpunan bagian S_1, S_2, …, S_m. maka banyaknya objek di S akan sama dengan jumlah banyaknya objek di S_1, S_2, …, S_m.

Jika sebuah himpunan S dipartisi menjadi himpunan-himpunan bagian S_1, S_2, …, S_m. maka itu berarti tidak ada dua himpunan diantara S_1, S_2, …, S_m. yang beririsan. Dengan kata lain, setiap objek di S pasti merupakan anggota dari salah satu himpunan S_1, S_2, …, S_m. Dengan demikian maka himpunan S_1, S_2, …, S_m. merupakan partisi dari himpunan S.

Contoh 2.1

Siswa diminta mengambil salah satu kursus matematika atau biologi, tetapi tidak mengambil keduanya. Jika ada 4 macam kursus matematika dan 3 macam kursus biologi untuk dipilih siswa, maka siswa dapat memilih sebanyak 4 + 3 = 7 macam pilihan.

Prinsip perkalian

Jika himpunan A terdiri atas p objek dan himpunan B terdiri atas q objek, maka banyaknya pasangan terurut (*a, b*) *dengan a anggota himpunan A dan b anggota himpunan B adalah p x q buah.*

Formula kedua untuk prinsip perkalian adalah: jika objek pertama dapat dipilih dalam *p* cara dan objek kedua dapat dipilih dalam *q* cara, maka banyaknya pilihan satu objek pertama dan satu objek kedua ada sebanyak p *x* q cara.

Contoh 2.2

Siswa harus mengambil dua macam kursus. Yang pertama harus memilih salah satu diantara 3 jam di pagi hari dan yang kedua memilih diantara 4 jam di sore hari. Banyaknya jadwal yang dapat dipilih oleh siswa adalah 3 *x* 4 = 12 pilihan.

Jenis persoalan kombinatorik ada beberapa tipe, yaitu:

i) Menghitung atau menyeleksi objek-objek terurut
   - tanpa pengulangan,
   - dengan pengulangan.

ii) Menghitung atau menyeleksi objek-objek tak terurut
   - tanpa pengulangan,
   - dengan pengulangan.

Untuk membedakan antara bukan pengulangan dan pengulangan objek-objek, kita akan bedakan antara penyusunan atau pemilihan dari himpunan dan multihimpunan. Pada multi-himpunan, unsur dapat berulang, sedangkan pada himpunan, unsur tidak dapat berulang. Sebagai contoh, multi-himpunan $M = \{a, a, a, b, c, c, d, d, d, d\}$ mempunyai 10 unsur, yaitu 3 buah *a,* sebuah *b,* 2 buah c dan 4 buah d. Multihimpunan Mtersebut biasa juga ditulis $M = \{3.a, 1.b, 2.c, 4.d\}$. Bilangan 3, 1, 2 dan 4 merupakan bilangan pengulangan pada multi-himpunan M. Sebuah himpunan dapat dipandang sebagai multi-himpunan yang mempunyai bilangan pengulangan yang sama, yaitu 1. Sebuah multi-himpunan *N* yang terdiri atas tak hingga unsur *a* dan c, serta unsur *b* dan *d* dengan pengulangan berturut-turut 2 dan 4, dapat dinotasikan dengan $N = \{\infty . a, 2.b, \infty .c, 4.d\}$.

Penyusunan atau pemilihan tipe i) disebut permutasi, sedangkan penyusunan atau pemilihan tipe ii) disebut kombinasi.

Contoh 2.3

Misalkan diberikan 6 buah huruf yaitu *a, b, c, d,* e dan *f.* Kita akan mengurutkan 3 huruf diantaranya. Apabila ketiga huruf tersebut tanpa pengulangan, maka akan diperoleh sebanyak *6.5.4 = 120* buah urutan. Apabila boleh berulang (anggap multihimpunan dengan bilangan pengulangan ∞, maka akan diperoleh sebanyak 6.6.6 = 216 buah urutan.

Contoh 2.4

Misalkan kita akan menghitung banyaknya bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 yang semua angkanya berbeda. Bilangan antara 1000 dan 9999 merupakan susunan terurut dari 4 angka. Karena itu masalah kita adalah menghitung beberapa koleksi mengenai permutasi. Kita mempunyai *4* pilihan yaitu menentukan angka satuan, puluhan, ratusan dan ribuan. Karena bilangan yang kita hitung adalah bilangan ganjil, maka pilihan untuk angka satuan adalah 1, 3, 5, 7 dan 9. Angka puluhan dan ratusan dapat dipilih salah satu dari 0, 1, 2, …, 9, sedangkan angka ribuan salah satu dari 1, 2, …, 9. Diperoleh 5 pilihan untuk angka satuan. Karena semua angkanya berbeda, kita mempunyai 8 pilihan untuk angka ribuan, 8 pilihan untuk angka ratusan dan 7 pilihan untuk angka puluhan. Berdasarkan prinsip perkalian, diperoleh

$$5 \; x \; 8 \; x \; 8 \; x \; 7 = 2240.$$

Jadi, banyaknya bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 adalah 2240.

B. Permutasi

Marilah kita simak masalah sederhana berupa memasukkan r kelereng yang berbeda warna ke dalam n kantung yang dinomori berbeda pula dengan syarat bahwa setiap kantung hanya boleh diisi tidak lebih dari sate kelereng. Karena kelereng pertama dapat dimasukkan ke dalam salah satu dari n kantung tersebut, kelereng kedua ke dalam salah satu dari (n-i) kantung sisanya,… dan kelereng ke-r ke dalam salah satu dari $(n - r + 1)$ kantung sisanya, maka total banyaknya cara untuk memasukkan kelereng kelereng itu adalah

$$n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)$$

yang dapat pula dituliskan sebagai

$$\frac{n!}{(n - r)!}, \text{ dimana } n! = 1, 2, 3, \ldots, (n - 1).n.$$

Kita akan menggunakan notasi P(n,r) untuk besaran $n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)$, yaitu

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!} = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)$$

Misalkan *r* bilangan bulat positif. Permutasi-r dari himpunan *S* yang terdiri atas *n* unsur - *P*(*n,r*) - adalah susunan *r* dari *n* unsur tersebut dalam urutan atau aturan tertentu. Jika S = {*a, b,* c}, maka *ab, ac, ba, ca, bc dan cb* adalah enam buah permutasi-2 dalam *S.* Jika *r* > *n,* definisikan *P*(*n,r*) = *0.* Jika r = n, maka permutasi-n dari himpunan S yang terdiri atas n $_u$unsur disebut permutasi himpunan S atau permutasi n unsur. Permutasi dari himpunan *S* = {*a, b; c*} adalah *abc bca, cab dan cba.* Jadi, P(3,3) = 6. Jelas pula bahwa *P*(*n,1*) = *n,* untuk set bulat positif n.

Contoh 2.5

Banyaknya kata yang terdiri atas 4 huruf berbeda yang dibentuk oleh huruf*huruf a, b, c, d dan* e adalah $P(5,4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120.$

Contoh 2.6

Misalkan kita akan menghitung banyaknya bilangan empat angka yang tidak mengandung angka-angka yang berulang. Karena ini adalah masalah penyusunan 4 angka di antara 10 angka 0, 1, …, 9, maka jawabnya adalah P(10,4) = 5040. Diantara 5040 bilangan itu, 9 *x* 8 *x* 7 = 504 diantaranya mempunyai angka 0 di depan. Dengan demikian, 5040 - 504 = 4536 diantaranya tidak mempunyai angka 0 di posis paling depan. Hasil ini juga dapat dihitung sebagai

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536.$$

Permutasi yang telah kita pelajari itu tepatnya disebut permutasi Linier. Kita pikirkan objek-objek tersebut telah diatur pada sebuah garis lurus. Jika sebagai pengganti menyusun objek-objek pada garis lurus, kita menyusunnya dalam bentuk lingkaran, maka banyaknya permutasi akan berkurang. Pikirkan contoh berikut ini. Andaikan 10 orang anak berbaris melingkar. Dalam berapa banyak cara berbeda mereka dapat membentuk lingkaran tersebut? Ketika mereka berpindah tempat, persoalannya adalah posisi relatif mereka terhadap yang lainnya dan tidak merupakan persoalan terhadap lingkungannya. Dengan demikian, dua permutasi melingkar dikatakan sama jika yang satu dapat dirubah menjadi yang lainnya dengan rotasi. Karena setiap permutasi linier terhadap anak-

anak tersebut memberikan 9 permutasi lainnya dengan rotasi, maka untuk mendapatkan banyaknya permutasi melingkar kita harus membagi banyaknya permutasi linier dengan 10. Jadi, banyaknya permutasi melingkar yang terdiri atas 10 anak adalahl $\frac{10!}{10} = 9!$.

Teorema 2.1

Banyaknya permutasi melingkar r unsur dari sebuah himpunan dengan n unsur berbeda adalah

$$\frac{P(n, r)}{r} = \frac{n!}{r(n - r)!}$$

Khususnya, permutasi melingkar dari n unsur adalah (*n -1*)*!*

Silahkan buktikan sebagai latihan!

Contoh 2.7

Sebanyaknya 12 tanda-tanda khusus berbeda akan ditempatkan pada drum berputar. Masalah ini merupakan masalah permutasi melingkar dengan n = r = 12. Dengan demikian banyaknya cara ada sebanyak $\frac{P(12,12)}{12} = 11!$.

C. Kombinasi

Misalkan *r* bilangan bulat tidak negatif. Kombinasi *r* unsur dari sebuah himpunan S dengan *n unsur kita* memahaminya sebagai seleksi tak terurut *r* dari *n* unsur di S. Dengan kata lain, kombinasi *r* unsur dari sebuah himpunan *S* dengan *n* unsur adalah himpunan bagian *S* dengan *r* unsur. Jika S = {*a, b, c, d*}, maka {a, b, c}, {*a, b, d*}, {*a, c, d*}, {*b, c, d*} merupakan empat buah kombinasi dengan 3 unsur di *S.* Banyaknya kombinasi r unsur dari himpunan dengan *n* unsur dinotasikan dengan *C*(*n,r*) atau $\binom{n}{r}$. Perhatikan bahwa jika *r* > *n,* definisikan *C*(*n, r*) = *0.* Jika *n = 0* dan *r* bilangan bulat positif, maka *C*(*0, r*) = 0. Hal tersebut akan berakibat bahwa C(0, 0) = $\binom{0}{0}$ = 1. Fakta berikutnya adalah untuk bilangan bulat tidak negatif n berlaku *C*(*n, 0*) = *1*, *C*(*n, 1*) = *n dan C*(*n, n*) = *1*.

Teorema 2.2

untuk $r \leq n$, $P(n,r) = r!C(n,r)$. Akibatnya,C(n, r) = $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Bukti:

Misalkan *S* adalah himpunan dengan ; n `unsur. Kombinasi *r* pada *S* dapat diurutkan dalam $P(r, r) = r!$ cara. Karena setiap permutasi r pada *S* dapat menghasilkan secara unik urutan kombinasi *r* pada S, hal tersebut mengakibatkan $P(n, r)$ $r!$ $C(n, r)$. Sekarang formula $C(n,r)$ dapat diperoleh dari formula $P(n,r)$ yang diberikan sebelumnya.

Contoh 2.8

Banyaknya barisan biner yang panjangnya 32 dan di dalam setiap barisan itu ada tepat tujuh angka 1 adalah C(32,7). Ini dapat dipandang sebagai masalah menempatkan tujuh angka 1 di dalam 32 kotak yang dinomori (dan kemudian mengisi kotak-kotak kosong sisanya dengan angka 0).

Contoh 2.9

Misalkan diberikan 25 titik yang terletak pada sebuah bidang datar dan tidak ada 3 titik yang kolinier. Berapa banyak garis.lurus berbeda yang dapat dibuat melalui titiktitik tersebut? Berapa banyak segitiga berbeda yang dapat dibuat melalui titik-titik tersebut?

Karena tidak ada 3 titik yang terletak pada sebuah garis lurus, maka setiap pasang titik membentuk sebuah garis lurus. Dengan demikian banyaknya garis lurus berbeda yang dapat dibentuk sama dengan banyaknya himpunan bagian yang terdiri atas 2 unsur dari sebuah himpunan yang terdiri atas 25 unsur, yang ditunjukkan oleh

$$C(25,2) = \frac{25!}{2!23!} = 300$$

Dengan cara yang sama, setiap 3 titik membentuk sebuah segitiga, sehingga banyaknya segitiga berbeda diberikan oleh

$$C(25,3) = \frac{25!}{3!22!} = 2300.$$

Dari Teorema 2.2 diperoleh teorema akibat berikut ini.

Teorema Akibat (*Corollary*) *2.1*

Untuk r < n, C(*n*,*r*) = *C*(*n*,*n*-*r*).

Teorema 2.3

Banyaknya himpunan bagian dari himpunan yang terdiri atas n unsur adalah 2n = C(*n, 0*) + *C*(*n*,*1*) + ... + *C*(*n, n*).

Bukti:

Kita buktikan teorema ini dengan memperlihatkan bahwa kedua ruas persamaan di atas adalah menghitung banyaknya himpunan bagian dari himpunan S yang terdiri atas *n* unsur. Pertama kita mengamati bahwa setiap himpunan bagian dari *S* adalah himpunan bagian dengan *r* unsur di S untuk *r = 0,* 1, 2, …, n. Karena *C*(*n*,*r*) *sama* dengan banyaknya himpunan bagian dengan *r* unsur di S, hal itu mengikuti prinsip penjumlahan bahwa *C*(*n*,*0*) + *C*(*n*,*1*) + ... + *C*(*n*,*n*) sama dengan banyaknya himpunan bagian di S.

Misalkan H suatu himpunan bagian dari *S.* Maka unsur ke-1 dari *S* dapat termasuk atau tidak termasuk dalam H. Demikian juga unsur ke-2, ke-3, … dan ke-n dari S dapat termasuk atau tidak termasuk dalam H. Jadi, dengan prinsip perkalian terdapat 2.2.2 …2 = 2^n himpunan bagian S.

D. Permutasi dan Kombinasi Multi-himpunan

Misal *S* sebuah multi-himpunan. Sebuah permutasi *r* di *S* adalah susunan terurut *r* unsur (yang tidak harus beda) di *S.* Jika banyaknya unsur *S* adalah *n*, maka sebuah permutasi *n* di *S* merupakan suatu permutasi di *S.* Sebagai contoh, jika *S* = {*2.a, l.b, 3.c*}, maka *acbc* dan *cbcc* adalah permutasi-4 di S, sedangkan *abccca* adalah permutasi-6 di S. Multi-himpunan S tidak mempunyai permutasi-7, karena 7 > 2 + 1 + 3 = 6, yaitu banyaknya unsur di S.

Dapat dibuktikan bahwa jika *S* multi-himpunan dengan *k* jenis objek berbeda, masing-masing jenis objek memiliki bilangan pengulangan tak hingga, maka banyaknya permutasi-r di *S* adalah k^r .

Contoh 2.10

Misalkan diberikan multi-himpunan S = {∞.0, ∞.1, ∞2}. Banyaknya permutasi-4 dari multi-himpunan tersebut adalah $3^4 = 81$.

Teorema 2.4

Misalkan S multi-himpunan dengan k jenis objek berbeda. Jika masing-masing jenis objek memiliki bilangan pengulangan $n_1, n_2, \ldots, n_k$ dengar $n = n_l + n_2 + \ldots + n_k$, maka banyaknya permutasi di S adalah

$$P(n; n_1,n_2, \ldots,n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\ldots n_k!}$$

Bukti:

Misalkan kita mempunyai multi-himpunan *S* dengan *k* jenis objek berbeda misalnya $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dengan bilangan pengulangan berturut-turut adalah $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sehingga *S* mempunyai $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ unsur. Kita perlu untuk membedakar banyaknya permutasi dari n unsur.

Terdapat *n* tempat dan kita ingin menempatkan secara tepat satu unsur di S dalam tempat yang berbeda. Pertama kita menentukan tempat-tempat mana yang ditempati oleh al. Karena terdapat *ni* objek al dalam S, kita harus memilih himpunan bagian ni tempat dari himpunan *n* tempat. Kita dapat mengerjakannya dalam $C(n,n_1)$ cara. Berikutnya kita menentukan tempat-tempat mana yang ditempati oleh a_2. Terdapat $n - n_i$ tempat yang belum terisi dan kita pilih n_2 diantaranya. Hal ini dapat dikerjakan dengan $C(n-n_1,n_2)$ cara. Berikutnya kita mendapatkan $C(n-n_1-n_2, n_3)$ cara untuk memilih tempat untuk a3. Jika kita teruskan tentunya melibatkan prinsip perkalian. Kita peroleh banyaknya permutasi di S adalah

$$C(n,n_1).\ C(n-n_1,n_2).\ C(n-n_1-n_2, n_3)\ \ldots\ C(n-n_1-n_2-\ \ldots\ n_{k-1},n_k)\ .$$

Dengan menggunakan Teorema 2.1, diperoleh

$$\frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\ \frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\ \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!\,(n-n_1-n_2-n_3)}\ \ldots\ \frac{(n-n_1\ldots-n_{k-1})!}{n_k!\,(n-n_1-n_2\ldots n_k)!}$$

Setelah disederhanakan diperoleh

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!0!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Contoh 2.11

Permutasi huruf-huruf dalam kata MISSISSIPPI merupakan permutasi multi-himpunan. Banyaknya permutasi adalah

$$\frac{11!}{1!4!4!2!}$$

Jika *S* sebuah multi-himpunan, maka sebuah kombinasi-r di *S* adalah memilih r unsur di *S* tanpa memperhatikan urutan . Jika *S* mempunyai *n* unsur, maka hanya ada satu kombinasi-n di *S,* yaitu Situ sendiri. Jika *S* mempunyai *k* objek berbeda, maka di *S* ada *k* kombinasi-1.

Contoh 2.12

Jika $S = \{2.a, l.b, 3.c\}$, maka kombinasi-2 di *S* adalah {a,a}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {c,c}.

Teorema 2.5

Misalkan S adalah multi-himpunan dengan k jenis objek berbeda, masing-masing bilangan pengulangannya tak hingga. Banyaknya kombinasi-r di S adalah C(k – 1 + r,r).

Bukti:

Misalkan *k* jenis objek berbeda itu adalah $a_l, a_2, \ldots, a_k$ sehingga $S = \{\infty.a_i, \infty.a_2, \ldots, \infty.a_k\}$. Sebuah kombinasi-r di *S* adalah berbentuk $\{x_1.a_1, x_2.a_2, \ldots, x_k.a_k)$ dimana $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bilangan bulat tak negatif dengan $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$. Sebaliknya, setiap barisan $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bilangan bulat tak negatif dengan $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$ berkorespondensi dengan kombinasi-r di S. Dengan demikian banyaknya kombinasi-r di S sama dengan banyaknya solusi persamaan $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$ dalam bilangan bulat tak negatif. Kita tunjukkan bahwa banyaknya solusi itu sama dengan banyaknya permutasi dari multi-himpunan T = {(k-1).0, r.1}. Berikan sebuah permutasi di *T,* unsur 0 sebanyak (k-1) dibagi *r* unsur 1 ke dalam *k* grup. Misalkan sebanyak x_1 unsur 1 di sebelah kiri unsur 0 pertama, sebanyak x_2 unsur 1 antara unsur 0 pertama dan kedua, … dan sebanyak x_k unsur 1

di sebelah kanan unsur 0 terakhir. Maka ada $x_1, x_{2,} \ldots, x_k$ bilangan bulat tak negatif dengan $x_I + x_2 + \ldots + x_k = r$. Sebaliknya, diberikan $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bilangan bulat tak negatif dengan $x_t + x_2 + \ldots + x_k = r$, kita dapat membalikkan tahapan di atas dan mengkonstruksi sebuah permutasi di S. Dengan demikian banyaknya kombinasi-r dari multi-himpunan S sama dengan banyaknya permutasi mufti-himpunan T = {(k – 1).0, r.1}. Menurut Teorema 2.4 bilangan terakhir sama dengan

$$\frac{(k-1+r)!}{(k-1)!\,r!} = C(k-1+r,r).$$

Contoh 2.13

Jika k = 4 dan r = 5, maka permutasi dari T = {3.0, 5.1} yang diberikan oleh barisan 0302 berkorespondensi dengan solusi dari $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$, yaitu $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$. Banyaknya *kombinasi-r* dari multi-himpunan *S* dengan *k* jenis objek berbeda, masing-masing bilangan pengulangannya tak hingga, adalah sama dengan banyaknya permutasi dari T yaitu C(4 – 1 + 5,5) = C(8,5).

Contoh 2.14

Banyaknya cara memilih tiga dari tujuh hari yang disediakan (pengulangan dibolehkan) adalah

$$C(7 + 3\text{-}1,3) = C(9,3) = 84.$$

Contoh 2.15

Jika tiga dadu digulirkan, banyaknya jumlah mata berbeda yang mungkin adalah

$$C(6 + 3 - 1, 3) = C(8, 3) = 56$$

sebab pengguliran tiga dadu setara dengan pengambilan tiga bilangan dari enam bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, dengan pengulangan dibolehkan.

Teorema berikut ini dapat dibuktikan sebagai latihan.

Teorema 2.6

Misalkan S adalah multi-himpunan dengan k jenis objek berbeda, masing-

masing bilangan pengulangannya tak hingga. Banyaknya kombinasi-r di S jika masingmasing jenis harus diambil minimal 1 adalah

$$C(r - 1, k - 1).$$

Contoh 2.16

Sebuah toko roti menjual 8 jenis roti. Bila kita membeli 12 buah roti dengan setiap jenisnya minimal 1 buah, kemungkinannya adalah C(12 – 1, 8 – 1) = C(11, 7) = 330.

E. Koefisien Binomial

Bilangan $C(n, k)$ atau $\binom{n}{k}$ yang merepresentasikan bilangan kombinasi-k dari himpunan dengan n unsur melahirkan beberapa teori yang menarik dan membicarakan variasi identitas. Bilangan-bilangan $\binom{n}{k}$ sangat sering muncul dalam masalah kombinatorial. Sifat-sifat dasarnya sangat penting untuk memudahkan manipulasi.

Rumus Pascal

Koefisien binomial $\binom{n}{k}$ didefinisikan untuk semua bilangan bulat tak negatif k dan *n.* Jika $k > n$, maka $\binom{n}{k} = 0$. Juga, untuk semua $n, = 1$. *Jika n* positif dan $1 \leq k \leq n$, maka

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots!}$$

Teorema 2.7 (Rumus Pascal)

Untuk bilangan bulat n dan k dengan $1 \leq k \leq n - 1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Bukti:

Misalkan S himpunan dengan *n objek. Ambil 1* objek, katakan *x* di *S.* Kombinasi-k di S *dapat* dibagi ke dalam *dua kelas A dan B. Dalam A kita simpan semua kombinasi-k di* S yang tidak *memuat x. Dalam B* kita *simpan* yang lainnya, yaitu kombinasi-k di S yang memuat *x*. Bilangan *kombinasi-k* di S dalam A sama dengan bilangan *kombinasi-k* dari (n-1) *unsur* himpunan S-{*x*} dan ini sama dengan $\binom{n-1}{k}$. Bilangan *kombinasi-k* di S *dalam B* sama dengan bilangan *dari kombinasi-*(*k-1*) *dari* (*n-1*) *unsur* himpunan S-{*x*} dan ini *sama* dengan $\binom{n-1}{k-1}$.

Dengan prinsip penjumlahan diperoleh

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Contoh 2.17

Misalkan *n = 5, k = 3 dan S =* {*x, y, z, u,* v} . Kombinasi-3 di *S* dalam A adalah {*y, z, u*}, {*y, z, v*}, {*y, u, v*}, {*z, u, v*}. Hasil tersebut merupakan kombinasi-3 dari himpunan {*y, z, u, v*}. Kombinasi-3 di *S* dalam B adalah {*x, y, z*}, {*x, y, u*}, {*x, y, v*}, {*x, z, u*}, {*x, z, v*}, {*x, u, v*}. Penghapusan *unsur x* dalam kombinasi-3 *tersebut* menghasilkan {*y, z*}, {*y, u*}, {*y, v*}, {*z, u*}, {*z, v*}, {*u,* v}, kombinasi-2 dari {*y, z, u, v*}. Jadi,

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$$

Teorema 2.8 (Teorema Binomial)

Misalkan n bilangan bulat positif. Untuk semua x dan y berlaku

$$(x+y)^n = y^n + \binom{n}{1} xy^{n-1} + \binom{n}{2} x^2y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} x^{n-1}y + x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Bukti (secara kombinatorial):

Tulis $(x + y)^n$ sebagai hasil kali n faktor yang masing-masingnya sama dengan $x + y$. Untuk setiap faktor $(x + y)$ kita dapat memilih x atau y *dan* terdapat 2^n bentuk hasil dan masing-masing dapat dinyatakan dalam bentuk $x^k y^{n-k}$ untuk beberapa $k = 0, 1, 2, ..., n$. Kita mendapatkan bentuk $x^k y^{n-k}$ dengan memilih x pada k faktor dan y pada $n-k$ faktor. Dengan demikian bilangan dari bentuk perkalian $x^k y^{n-k}$ yang terjadi pada hasil ekspansi sama dengan bilangan kombinasi-k dari dengan n faktor, yaitu $\binom{n}{k}$ Jadi,

$$(x + y)^n = \mathrm{E}^{\,n} x^k y^{n-k}. U$$

Teorema ini dapat dibuktikan juga dengan induksi matematika.

Teorema binomial dapat ditulis dengan beberapa bentuk ekivalen berikut.

(a) $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$

(b) $(x + y)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

(c) $(x + y)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$

Teorema Akibat 2.2

Misalkan n bilangan bulat positif. Untuk semua x berlaku n n n (*n* \

$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k$.

Coba buktikan sebagai latihan.

Dari koefisien binomial untuk n dan k bilangan bulat positif diperoleh identitas-identitas berikut.

(1) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

(2) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$

(3) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^2\binom{n}{n} = 0$

(4) $1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n.2^{n-1}$

(5) $n(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$

(6) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 - \binom{2n}{n}$

Perluasan notasi bilangan untuk $\binom{n}{k}$ sembarang bilangan real dan sembarang bilangan bulat positif, dikerjakan dengan definisi berikut

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k(k-1)\ldots!}$$

untuk bilangan real r.

Contoh 2.18

$$\binom{7/2}{5} = \frac{(7/2)(5/2)(1/2)(-1/2)}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

Juga, rumus Pascal

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$$

tetap berlaku untuk semua bilangan real *r* dan bilangan bulat *k.* Dengan memperi koefisien binomial, kita akan memperoleh rumus berikutnya yaitu

$$\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \binom{r+2}{2} + \ldots + \binom{r+k}{k} = \binom{r+k+1}{k}$$

untuk semua bilangan real r dan bilangan bulat tak negatif *k.*

Untuk bilangan bulat tak negatif *n* dan *k,* kita dapat membuktikan den induksi matematika bahwa

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \binom{2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Sifat Unimodal dari Koefisien Binomial

Jika memeriksa barisan koefisien binomial dalam suatu baris segitiga Pascal, kita perhatikan bahwa bilangan menaik untuk sementara waktu dan kemudian menurun kembali. Barisan bilangan seperti ini disebut sifat unimodal. Dengan demikian barisan S_0, S_1, S_2, …, S_n bersifat unimodal apabila terdapat bilangan bulat t dengan $0 <- t <- n$, sedemikian sehingga

$$S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_t,\ S_t \geq S_{t+i} \geq S_{t+2} \geq \ldots \geq S_n.$$

Bilangan S_t merupakan bilangan terbesar dalam barisan itu. Bilangan bulat t tidak perlu tunggal. Sebagai contoh, jika $S_0 = 1$, $S_1 = 3$, $S_2 = 3$, $S_3 = 2$, maka $S_0 \leq S_1 \leq S_2$, $S_2 \geq S_3$, tetapi juga $S_0 \leq S_1$, $S_1 \geq S_2 \geq S_3$.

Teorema 2.9

Misalkan n bilangan bulat positif. Barisan koefisien binomial

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

adalah sebuah barisan unimodaL Jika n genap, maka

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{n/2}, \binom{n}{n/2} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

Jika n ganjil, maka

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{(n-1)/2}, \binom{n}{(n+1)/2} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} \text{ dan}$$

$$\binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$$

Silahkan buktikan sendiri.

Bilangan Multinomial

Teorema binomial menyediakan rumus untuk $(x + y)^n$ dimana n bilangan bulat positif. Hal itu akan diperluas untuk memperoleh rumus $(x + y + z)^n$ atau lebih umum lagi untuk pangkat-n dari suatu penjumlahan untuk bilangan real t, $(x_1 + x_2 + \ldots + x_t)^n$.

Dalam rumus umum peranan dari koefisien binomial dinyatakan oleh bilangan

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!...n_t!}$$

dimana $n_1, n_2, \ldots, n_t$ bilangan bulat tak negatif dengan $n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n$. Kita sebut bilangan multinomial dan bilangan tersebut dinotasikan dengan $\binom{n}{n_1 n_2 ... n_t}$

Teorema 2.10 (Teorema Multinomial)

Misalkan n bilangan bulat positif. Untuk semua $x_1, x_2, \ldots, x_t$,

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_2 ... n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_t^{n_t}$$

dimana bentuk terakhir diperluas untuk semua barisan bilangan bulat tak negatif $n_1, n_2, \ldots, n_t$ dengan $n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n$.

Bukti:

Untuk membuktikan teorema ini kita generalisasikan bukti teorema binomial. Tulislah $(x_1 + x_{2+}, .. + x_t)^n$ sebagai hasilkali dari *n* faktor yang masing-masing faktornya adalah $(x_1 + x_2 + \ldots + x_t)$. Andaikan untuk masing-masing faktor kita pilih salah satu dari $x_1, x_2, \ldots, x_t$, hasilnya berbentuk t^n dan masing-masing dapat disusun dalam bentuk $x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_t^{n_t}$, dimana $n_1, n_2, \ldots, n_t$ bilangan bulat tak negatif dengan $n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n$. *Suku* $x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_t^{n_t}$ didapat dengan memilih *x*i pada n_1 dari *n* faktor, x_2 pada n_2 dari $n - n_1$ faktor, …, x_t pada n_t dari $n - n_1 - \ldots - n_{t-i}$ faktor. Dengan demikian bilangan dari hasilkali bentuk $x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_t^{n_t}$ menjadi sama, oleh prinsip multiplikasi dinyatakan dengan

$$\binom{n}{n_1}\binom{n - n_1}{n_2}...\binom{n - n_1 - ... - n_{t-1}}{n_t}$$

Menurut Teorema 2.4 bilangan ini sama dengan $\frac{n!}{n_1!\, n_2!...n_t!}$

Contoh 2.19

Koefisien $x_1^3 x_2 x_3^2$ pada bentuk $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ adalah

$$\binom{6}{312} (2^3)(-3)(5^2) = -36000.$$

Binomial Newton

Tahun 1676 Newton menggeneralisasikan teorema binomial untuk mengekspansi bentuk $(x + y)^r$, dimana r suatu bilangan real. Untuk pangkat yang umum, tentu saja, ekspansi menjadi barisan tak hingga dan pertanyaan membutuhkan pertimbangan jawaban yang konvergen. Teorema berikut ini buktinya dapat dilihat pada kalkulus lanjut.

Teorema 2.11 (Teorema Binomial Newton)

Misalkan r bilangan real. Untuk semua x dan y dengan $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$,

$$(x + y)^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

dimana $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}$

Jika r sebuah bilangan bulat positif n, maka untuk $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$ dan ekspansi di atas menjadi

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} x^k y^{n-k}$$

Jika kita misalkan z = $\frac{x}{y}$, maka $(x + y)^r = y^r(z + 1)^r$. Dengan demikian Teorema 2.11 dapat dinyatakan dalam bentuk ekivalen untuk suatu z dengan $|z| < 1$,

$$(z + 1)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} z^k$$

Jika n bilangan bulat positif dan r = -n, dengan demikian r bilangan bulat negatif, maka

$$\binom{r}{k} = \binom{-n}{k}$$

$$= \frac{-n(-n-)\ldots(-n-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

Jadi, untuk |z| < *1*,

$$(z+1)^{-n} = \frac{1}{(z+1)^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

Tahun 1676 Newton menggeneralisasikan teorema binomial untuk mengekspansi bentuk $(x + y)^r$, dimana *r* suatu bilangan real. Untuk pangkat yang umum, tentu saja, ekspansi menjadi barisan tak hingga dan pertanyaan membutuhkan pertimbangan jawaban yang konvergen. Teorema berikut ini buktinya dapat dilihat pada kalkulus lanjut.

Teorema 2.11 (Teorema Binomial Newton)

Misalkan r bilangan real. Untuk semua x dan y dengan $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$,

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

dimana $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}$

Jika r sebuah bilangan bulat positif *n*, maka untuk $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$ dan ekspan di atas menjadi

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Jika kita misalkan z = x , maka $(x + y)^r = y^r(z + 1)^r$. Dengan demikian Teorema 2.11 dapat dinyatakan dalam bentuk ekivalen: Untuk suatu z dengan |z| < 1

$$(z + 1)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} z^k$$

Jika n bilangan bulat positif dan $r = -n$, dengan demikian r bilangan bulat negatif, maka

$$\begin{aligned}\binom{r}{k} &= \binom{-n}{k} \\ &= \frac{-n(n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}\end{aligned}$$

Jadi, untuk $|z| < 1$,

$$\begin{aligned}(z+1)^{-n} &= \frac{1}{(z+1)^n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k\end{aligned}$$

Untuk $n = 1$,

$$\begin{aligned}\binom{n+k-1}{k} &= \binom{k}{k} \\ &= 1\end{aligned}$$

sehingga kita peroleh

$$\begin{aligned}(z+1)^{-1} &= \frac{1}{(z+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k, |z| < 1\end{aligned}$$

Jika kita ganti z dengan -z, kita peroleh deret geometri tak hingga

$$\frac{1}{(z+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k,$$

$$= 1 + z + z^2 + ..., |z| < 1$$

Teorema binomial dapat dipakai untuk menghitung aproksimasi akar kuadrat sehingga didapatkan hasil yang akurat. Jika kita ambil $r = ½$, maka $\binom{r}{0} =$ *1*, sehingga untuk $k > 0$

$$\binom{r}{k} = \binom{1/2}{k}$$

$$= \frac{(1/2)(1/2-1)...(1/2-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{2k} \cdot \frac{1 \times 3 \times ... \times (2k-3)(2k-2)}{2 \times 4 \times ... \times (2k-2)(k!)}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k \times 2^{2k-1}} \cdot \frac{(2k-2)!}{(k-1)!^2}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k \times 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}$$

Jadi, untuk |z| < *1*,

$$\sqrt{1+z} = (1+z)^{1/2}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k \times 2^{k-1}} \binom{2k-2}{k-1} z^k$$

$$= 1\frac{1}{2} z - \frac{1}{2 \times 2^3} \binom{2}{1} z^2 + \frac{1}{3 \times 2^5} \binom{4}{2} z^3 - ...$$

Contoh 2.20

$$\sqrt{20} = \sqrt{16+4}$$

$$= 4\sqrt{1+0{,}25}$$

$$= 4\left[1 + 1/2\,(0{,}25) - 1/8\,.(0{,}25)^2 + 1/16\,.(0{,}25)^3 - ...\right]$$

$$= 4{,}472...$$

F. Prinsip Inklusi dan Eksklusi.

Sering terjadi dalam masalah penghitungan suatu objek bahwa, penghitungan secara tidak langsung bisa lebih mudah apabila dibandingkan dengan penghitungan langsung. Sebagai contoh, andaikan kita ingin menghitung banyaknya permutasi $i_1 i_2 \ldots i_n$ dari $\{1, 2, \ldots, n\}$ dimana 1 tidak pemah pada posisi pertama ($i1 \neq 1$). Kita dapat mengerjakannya dengan penghitungan langsung dengan mengobservasi bahwa permutasi dengan 1 tidak pada posisi pertama dapat dibagi ke dalam *n-1* grup menurut bilangan bulat *k* dari {*2, 3, ..., n*} pada posisi pertama. Permutasi dengan *k* pada posisi pertama terdiri atas k diikuti oleh permutasi dari (n – 1) unsur himpunan $\{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$. Terdapat (n – 1)! permutasi dari {1, *2, ..., n*} dengan *k* pada posisi pertama. Dengan prinsip penjumlahan terdapat (n – 1)!(n – 1) permutasi dari $\{1, 2, \ldots, n\}$ dengan 1 tidak pada posisi pertama. Altematif lainnya, kita dapat memakai penghitungan tak langsung dengan mengobservasi bahwa banyaknya permutasi dari $\{1, 2, \ldots, n\}$ dengan 1 pada posisi pertama adalah sama dengan banyaknya (n – 1)! dari permutasi di {2, *3, ..., n*}. Jadi, total banyaknya permutasi di {1, 2, 3, ,, *n*} adalah *n!*, banyaknya permutasi di {*1, 2, ..., n*} dengan 1 tidak pada posisi pertama adalah $n! - (n-1)! = (n-1)!(n-1)$.

Teorema 2.12

Jumlah objek-objek di S yang unsur-unsurnya bisa memiliki sifat-1, ..., sifat-m, diberikan oleh

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap \ldots \cap A_m|$$

dimana penjumlahan pertama adalah semua bilangan bulat i dalam (*1, 2, ..., m*), *penjumlahan kedua adalah semua kombinasi-2* {*i, j*} *dari* (*1, 2, ..., m*}, *penjumlahan ketiga adalah kombinasi-3* {*i, j, k*} *dari* (*1, 2, ..., m*} *dan seterusnya.* A_i *adalah himpunan bagian S dengan sifat-i dan* $\overline{A_i}$ *adalah himpunan bagian S yang tidak punya sifat - i.*

Bukti:

Ruas kiri dari Teorema 2.12 menghitung jumlah dari objek di S yang tidak memenuhi semua sifat. Kita dapat membuat validitas persarnaan dengan menunjukkan bahwa sebuah objek dengan tanpa memenuhi sifat-sifat P1, P2, …, Pm membuat kontribusi dari 1 di ruas kanan dan sebuah objek dengan paling sedikit memenuhi satu sifat membuat kontribusi dari 0. Pertama anggaplah sebuah objek *x* dengan tanpa memenuhi sifat-sifat tersebut. Kontribusinya kepada ruas kanan Teorema 2.12 adalah

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m \, x \, 0 = 1$$

karena itu pada S tetapi tidak ada pada himpunan lainnya. Sekarang anggaplah sebuah objek y memenuhi n ≥ 1 sifat. Kontribusinya pada |S| adalah 1 = $\binom{n}{0}$.

Kontribusinya pada $\sum |A_i|$ adalah n = $\binom{n}{1}$. Kontribusinya pada

$\sum |A_i \cap A_j|$ adalah $\binom{n}{2}$. Kontribusinya pada $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$ adalah $\binom{n}{3}$

dan seterusnya. Jadi, kontribusi dari y di ruas kanan adalah

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{m} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

dengan n ≤ m dan $\binom{n}{k}$ = 0 jika k > n. Pernyataan terakhir sama dengan 0 dan kontribusi y di ruas kanan adalah 0 jika y memenuhi paling sedikit satu sifat.

Berdasarkan teorema itu dapat dibuktikan teorema akibat berikut ini.

Teorema Akibat 2.3

Jumlah objek di S yang memenuhi paling sedikit satu sifat diantara sifat-1, sifat-2, …, sifat-m adalah

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

Misalkan kita akan mencari banyaknya bilangan bulat antara I dan 1000, yang tidak dapat dibagi 5, 6, atau 8. Misalkan A5 himpunan bilangan yang dapat dibagi 5. A_6 himpunan bilangan yang dapat dibagi 6 dan A_8 himpunan bilangan yang dapat dibagi 8.

Diperoleh:

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200, |A_6| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166, |A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125,$$

$$|A_5 \cap A_6| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33, |A_5 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25, |A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41$$

$$|A_5 \cap A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$$

Jadi, banyaknya bilangan antara 1 dan 1000 yang tidak dapat dibagi 5, 6, atau 8 adalah $|\overline{A_5} \cap \overline{A_6} \cap \overline{A_8}|$ = 1000 – (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) – 8 = 600.

Prinsip inklusi-eksklusi dapat digunakan untuk menghitung kombinasi multihimpunan, dimana tiap jenis memiliki batas maksimum.

Contoh 2.22

Misalkan kita akan menentukan banyaknya kombinasi 10 dari multi-himpunan *B* = {*3.a,* 4.b, 5.c}. Kita aplikasikan prinsip inklusi-eksklusi pada himpunan *S* dengan semua kombinasi-10 dari multi-himpunan C = {∞.a, ∞.b, ∞.c}. Misalkan P_1 bersifat bahwa sebuah kombinasi-10 di C mempunyai lebih dari 3 buah a. Misalkan P_2 bersifat bahwa sebuah kombinasi-10 di C mempunyai lebih dari 4 buah b. Terakhir, misalkan P_3 bersifat bahwa sebuah kombinasi-10 di C mempunyai lebih dari 5 buah c. Jumlah kombinasi-10 di *B* adalah jumlah kombinasi-10 di C yang tidak bersifat P_1, P_2 *dan* P_3. Untuk i = 1, 2, 3 misalkan A, terdiri atas kombinasi-10 di C yang bersifat P_i. Jadi, A_2 terdiri atas kombinasi-10 di C dimana b terdapat lebih dari 4 kali. Jumlah kombinasi-10 di *B* sama dengan jumlah obyek di $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$. Dengan prinsip inklusi-eksklusi

diperoleh

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = |S| - \left(|A_1| + |A_2| + |A_3|\right)\left(|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3|\right)$$
$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Hasilnya adalah

$$|S| = \binom{3 + 10 + -1}{10} = 66$$

$$|A_1| = \binom{3 + 6 - 1}{6} = 28, |A_1| = \binom{3 + 5 - 1}{5} = 21, |A_1| = \binom{3 + 4 - 1}{4} = 15,$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{3 + 1 - 1}{1} = 3, |A_1 \cap A_3| = \binom{3 + 0 - 1}{0} = 1, |A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = 66 - (28 + 21 + 15) + (3 + 1 + 0) - 0 = 6.$$

Jadi, banyaknya kombinasi- 10 pada B adalah 6.

Derangements

Derangement dari {*1, 2, ..., n*} adalah permutasi $i_1i2 \ldots i_n$. pada {1, 2, …, *n*} sehingga $i_1 \neq 1$, $i_2 \neq 2$, ..., $i_n \neq n$. Jadi *derangement* dari {1, 2, …, n} adalah permutasi dari {1, 2, …, *n*} sehingga tidak ada bilangan bulat yang terletak pada posisi sebenamya. Kita notasikan D_n adalah jumlah *derangement* dari {1, 2, …, n}.

Contoh 2.23

Untuk $n = 1$, maka $D_1 = 0$.

Untuk $n = 2$, maka $D_2 = 1$

Untuk $n = 3$, maka $D_3 = 2$, yaitu *231* dan 312.

Teorema 2.13

Untuk $n \geq 1$,

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Bukti:

Misalkan S himpunan dengan anggotanya semua *n!* permutasi dari {1, 2, …, *n*}. Untuk $j = 1, 2, \ldots, n$, misalkan P_J sifat dalam sebuah permutasi, j adalah

posisi sebenamya. Jadi, permutasi $i_1\ i_2\ \ldots\ i_n$ *dari* {*1, 2, ...,* n} mempunyai sifat P_j menetapkan $i_j = j$. Sebuah permutasi di {*1, 2, ..., n*} adalah *derangement* jika dan hanya jika dia tidak mempunyai sifat $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Jika untuk j = 1, 2, …, *n*, A_j menotasikan himpunan dari permutasi di {1, 2, …, *n*} dengan sifat P_j , maka *derangement* di {*1, 2, ..., n*} tepat sekali menunjukkan permutasi di $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$.

Jadi, $D_n = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right|$ dan kita menggunakan prinsip inklusi-eksklusi untuk menghitung D_n. Permutasi di A_1 mempunyai bentuk $1i_2 \ldots i_n$, dimana $i_2 \ldots i_n$ adalah permutasi di {*2, ..., n*}. Jadi, $|A_1| = (n-1)!$. Dengan cara yang sama diperoleh

$$|A_j| = (n-1)! \text{ untuk } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Permutasi dalam *A, n* A_2 mempunyai bentuk $12i_3 \ldots i_n$, dimana $i_3 \ldots i_n$ adalah permutasi *di* {*3, ..., n*}. Jadi, $|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$ *dan* dengan cara yang sama diperoleh

$$|A_1 \cap A_j| = (n-2)!$$

untuk {*i, j*} sebuah kombinasi-2 di {1, 2, …, *n*}. Untuk setiap bilangan bulat *k* dengan $1 \le k \le n$, permutasi dalam $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$ mempunyai bentuk 12 … $ki_{k+1} \ldots i_n$, dimana $i_{k+1} \ldots i_n$ adalah sebuah permutasi di $\{k+l, \ldots, n\}$. Jadi, $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| = (n-k)!$ *dan* bentuk umumnya,

$$|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik} = (n-k)!$$

untuk $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ sebuah kombinasi-k di {1, 2, …, n}.

Karena terdapat $\binom{n}{k}$ kombinasi-k di {1, 2, …, *n*}, dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi eksklusi kita simpulkan bahwa

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}0!$$

$$= \text{n!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$= \text{n!} - \frac{1!}{1!} + \frac{1!}{2!} - \frac{1!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1!}{n!}$$

Perhatikan bahwa deret untuk e^{-I} adalah

$$e^{-1} = 1 - \frac{1!}{1!} + \frac{1!}{2!} - \frac{1!}{3!} + \frac{1!}{4!} - \ldots$$

kita boleh menuliskannya dengan

$$e^{-1} = \frac{D_n}{n!} + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!} + (-1)^{n+2}\frac{1}{(n+2)!} + \ldots$$

Dari pernyataan terakhir, kita dapat menyimpulkan bahwa antara e^{-1} dan $\frac{D_n}{n!}$ berbeda kurang dari $\frac{1}{(n+1)!}$ Bilangan $\frac{D_n}{n!}$ adalah rasio (perbandingan) bilangan dari *derangement* di {1, 2, …, *n*} terhadap jumlah keseluruhan permutasi di {1, 2, …, n}. Jadi, $\frac{D_n}{n!}$ Di merupakan probabilitas *derangement*, yaitu jika kita memilih sebuah permutasi di {1, 2, …, *n*) secara random, maka permutasi itu merupakan *derangement.*

Sifat-sifat *Derangement*

(1) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ untuk $n = 3, 4, 5, \ldots$

(2) $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ untuk $n = 2, 3, 4, \ldots$

Sifat-sifat ini silakan buktikan sebagai latihan.

Contoh 2.24

Misalkan diberikan $D_1 = 0$ dan $D_2 = 1$. Kita dapat menghitung D_n untuk beberapa bilangan bulat posotif *n.* Misalnya:

$D_3 = 2(D_1 + D_2) = 2(0 + 1) = 2,$

$D_4 = 3(D_2 + D_3) = 3(1 + 2) = 9,$

$D_5 = 4(D_3 + D_4) = 4(2 + 9) = 44.$

Pada bab berikutnya kita akan menunjukkan bagaimana mengerjakan relasi rekursif dengan koefisien konstan, dengan menggunakan sifat-sifat ini.

G. Uji Kompetensi

1. Terdapat *5* buku berbahasa Indonesia, 6 buku berbahasa Inggris dan 7 buku berbahasa Arab. Bila dipilih 2 buku dari 2 bahasa yang berbeda, hitunglah banyaknya kemungkinan yang terjadi.
2. Misalkan diberikan 6 buah huruf yaitu *a, b, c, d,* e dan *f.* Kita akan mengurutkan 3 huruf diantaranya. Apabila ketiga huruf tersebut tanpa pengulangan, tetapi huruf *e* harus ada, hitunglah banyak kemungkinannya.
3. Terdapat 6 buah jambu yang sama dan 8 buah jeruk yang sama. Berapa macam himpunan tidak kosong yang dapat dibentuk oleh kedua macam buah tersebut?
4. Bilangan terdiri atas 7 digit dengan ketentuan masing-masing digit $\in$ {1, 2, …, 9}, semua digitnya berbeda dan 4 dan 5 tidak boleh berdekatan. Ada berapa banyak semua kemungkinan yang terjadi?
5. Terdapat 15 macam permata dengan 10 macam diantaranya akan disusui menjadi kalung. Berapa macam kemungkinan kalung yang terjadi?
6. Setumpuk kartu bridge yang terdiri atas 52 buah kartu, diambil 5 bua diantaranya secara sembarang. Berapa nilai peluang kartu yang terambil it semuanya dari suit yang sama?
7. Dengan berapa banyak cara 6 pria dan 6 wanita duduk pada meja bundar, jik pria dan wanita itu duduk selang satu?
8. Hitunglah banyaknya cara mengecat 12 ruangan kantor sehingga 3 diantaran} berwarna hijau, 2 berwarna merah muda, 2 berwarna kuning dan sisan) berwarna putih.
9. a) Hitunglah banyaknya cara mendudukkan lima anak laki-1aki pada 12 kum yang disusun sebaris.
   b) Seperti a) sehingga tidak ada dua anak duduk berdampingan tanpa diselin kursi kosong.
10. Buktikan secara kombinatorial bahwa

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

11. Buktikan (k!)! habis dibagi $(k!)^{(k-1)!}$.

12. Gunakan teorema binomial untuk membuktikan

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

13. Buktikan bahwa untuk bilangan bulat positif n berlaku

$$1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \frac{1}{4}\binom{n}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

14. Carilah koefisien $x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^2$ dalam ekspansi $(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^8$.

15. Gunakan teorema binomial Newton untuk mengaproksimasi $\sqrt{30}$.

16. Carilah jumlah bilangan bulat antara 1 dan 10000 yang tidak habis dibagi 4 atau 6.

17. Hitunglah jumlah kombinasi-12 dari multi-himpunan $S = \{4.a, 3.b, 4.c, 5.d\}$.

18. Hitunglah jumlah Solusi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ dalam bilangan bulat negatif yang tidak melebihi 8.

19. Ujilah rumus faktorial $n! = (n-1)[(n-2)! + (n-1)!]$ untuk $n = 2, 3, 4, \ldots$

20. Buktikan bahwa D_n adalah bilangan genap jika dan hanya jika n adalah bilangan ganjil.

BAB III
FUNGSI PEMBANGKIT

A. Fungsi Pembangkit Biasa (*Ordinary Generating Function*)

Fungsi pembangkit merupakan alat untuk menangani masalah-masalah pemilihan dan penyusunan dengan pengulangan. Fungsi seperti ini diperlukan untuk menyelesaikan masalah yang tidak memperhatikan urutan.

Ide deret kuasa akan banyak digunakan untuk memahami konsep dasar fungsi pembangkit.

Definisi 3.1

Deret Kuasa didefinisikan sebagai deret tak terhingga yang berbentuk

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Deret tak terhingga ini selalu konvergen untuk |x| < R, untuk suatu bilangan positif R. R dalam hal ini disebut radius konvergensi dari deret kuasa di atas.

Teorema 3.1

Jika f mempunyai perluasan deret kuasa di titik c, yaitu jika

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k, |x-c| < R, \ \ldots\ldots (1)$$

maka koefisiennya dapat dinyatakan dalam rumus $a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$

Dengan mensubstitusikan kembali a_n pada rumus deret di atas, jika f mempunyai perluasan deret kuasa di titik c, maka $f(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \ldots \ \ldots\ldots (2)$$

Deret ini dikenal dengan sebutan deret Taylor dari fungsi f di titik c. Khusus untuk nilai c = 0, kita memperoleh deret Maclaurin:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \ldots\ldots(3)$$

Definisi 3.2

Misalkan (*ak*) = a_0, a_1, a_2, ..., a_n,, ... *adalah sebuah barisan bilangan. Fungsi Pembangkit Biasa* (*ordinary generating function*) *dari barisan* $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ *adalah deret kuasa 00*

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ ..... (*4*)

Contoh 3.1

Misalkan $a_k = i$ untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$, maka $G(x) = i + x + x^2 + \ldots$ dan $G(x) = \frac{1}{1 - x}$, dengan syarat $|x| < 1$.

Contoh 3.2

Misalkan diketahui $ak = C(n,k) = \binom{n}{k} = 0, 1, 2, \ldots, n.$

Fungsi pembangkit biasa bagi barisan (*ak*) adalah

$$G(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

Dengan bantuan perluasan Binomium Newton, kita peroleh G(*x*) - (1 + *x*)'.

Contoh 3.3

Misalkan kita ingin menghitung koefisien x^r pada $(1 + x)^n$.

Mencari koefisien x^r artinya menghitung koefisien pada perkalian *x* sebanyak *r* kali dan 1 sebanyak *n* – *r* kali. Dengan demikian koefisien x^r pada $(1 + x)^n$ adalah C(n, r).

Contoh 3.4

Misalkan kita ingin menghitung koefisien x^4 pada $(1 + x)^3(1 + x + x^2)^2$. Mencari koefisien x^4 berarti menentukan koefisien jumlah perkalian formal yang

jumlah pangkat x nya adalah 4. Menentukan koefisien ini lama raja dengan menghitung banyaknya solusi bilangan bulat bagi persamaan berikut ini.

Koefisien x^4 pada $(1 + x)^3(1 + x + x)^2$ adalah banyaknya solusi bilangan bulat

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 4$$

dengan $0 \le e_1, e_2, e_3 \le 1$ dan $0 \le e_4, e_5 \le 2$. Peubah e_i merupakan pangkat suku ke-i dalam perkalian formalnya.

Masalah ini ekivalen dengan masalah memilih 4 objek dari satu himpunan yang terdiri atas 5 tipe objek, dimana tipe 1, 2 dan 3 masing-masing 1 objek dan tipe 4 dan 5 masing-masing 2 objek. Masalah ini ekivalen juga dengan masalah distribusi 4 objek yang sama ke dalam 5 kotak berbeda, dimana kotak 1, 2 dan 3 paling banyak 1, kotak 4 dan 5 paling banyak 2.

Secara umum, koefisien x^r pada $(1 + x)^3(1 + x + x^2)^2$ adalah menghitung banyaknya solusi bilangan bulat bagi persamaan

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = r$$

dengan $0 \le e_1, e_2, e_3 \le 1$ dan $0 \le e_4, e_5 \le 2$.

Contoh 3.5

Misalkan kita ingin menentukan fungsi pembangkit untuk a,, yaitu banyaknya cara memilih r bola dari setumpuk bola yang terdiri atas tiga bola hijau, tiga bola putih, tiga bola biru dan tiga bola emas.

Masalah ini dapat dimodelkan sebagai banyaknya solusi bilangan bulat

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r,\ 0 \le e_i \le 3.$$

Disini e_1 merepresentasikan jumlah bola hijau yang dipilih, e_2 jumlah bola putih yang dipilih, $e3$ jumlah bola biru yang dipilih dan e_4 jumlah bola emas yang dipilih. Pada faktor perkalian formal, x berpangkat dari 0 sampai 3.

Jadi, fungsi pembangkitnya $(x^0 + x^1 + x^2 + x^3)^4 = (1 + x^1 + x^2 + x^3)^4$.

Fungsi pembangkit dapat pula digunakan untuk memanipulasi bentuk-bentuk fungsi aljabar tanpa harus menggunakan konsep yang biasa digunakan dalam aljabar. Misalnya sebuah fungsi yang mempunyai invers, dapat ditentukan invers perkaliannya dengan pendekatan fungsi pembangkit.

Sebuah fungsi $A(x)$ yang dinyatakan dalam deret kuasa $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mempunyai sebuah invers perkalian jika terdapat sebuah deret kuasa B(x) demikian sehingga A(x).B(x) = *1*.

Contoh 3.6

Misalkan kita akan mencari invers dari A(x) = 1 – x. Kita misalkan bahwa $B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ adalah invers bagi A(x).

Perkalian antara $A(x)$ dan B(x) menghasilkan

$$A(x).B(x) = (1-x) \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = 1,$$

yang memberikan persamaan

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{i+1} = 1$$

Sekarang bandingkan koefisien dari x` pada kedua ruas persamaan tersebut.

Dapat dilihat dengan mudah bahwa

$b_0 = 1, b_1 - b_0 = 0,$

$b_2 - b_1 = 0,$

...

$b_n - b_{n-1} = 0.$

Dengan demikian kita peroleh $b_i = 1$ untuk setiap i.

Hasil-hasil ini memperlihatkan bahwa rovers dari $A(x) = 1 - x$ adalah $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

Dalam proses penentuan rovers dari $A(x)$ di atas, kita pun memperoleh rumus $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$

B. Menghitung Koefisien pada Fungsi Pembangkit

Kita akan mengembangkan teknik-teknik aljabar untuk menghitung koefisien fungsi pembangkit. Teknik-teknik tersebut adalah dengan mereduksi fungsi pembangkit yang diberikan menjadi fungsi perbangkit dengan tipe

binomial atau hasilkali dari fungsi pembangkit dengan tipe binomial.

Berikut ini adalah semua identitas polinom dan ekspansi polinom yang dipergunakan.

(1) $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

(2) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

(3) $(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{r} x^r + \dots + \binom{n}{n} x^n$

(4) $(1 - x^m)^n = \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^{2m} + \dots + (-1)^r \binom{n}{r} x^{rm} + \dots + \binom{n}{n} x^{nm}$

(5) $\frac{1}{(1-x)^n} = \left(\sum_{0}^{\infty} x_i\right)^n = \sum_{0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$

(6) Jika $h(x) = f(x)g(x)$, dimana $f(x) = a + a_1x + a_2x^2 + \dots$ dan

$g(x) = b_0 + b_lx + b_2x^2 + \dots$

maka $h(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \dots$

$+ (a_rb_0 + a_{r-1}b_1 + a_{r-2}b_2 + \dots + a_0b_r)x^r + \dots$

(7) Koefisien xr pada $(1 + x + x^2 + \dots)^n$ adalah $C'(r + n - 1, r) = \binom{r+n-1}{r}$

Nomor (2) telah diuraikan pada contoh 3.6 di atas. Untuk menunjukkan nomor (5) perhatikan uraian berikut ini. Yang lainnya Anda coba sebagai latihan.

Dari nomor (2), jika$x$ kita ganti dengan ax, maka diperoleh

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i \text{ ....} (5)$$

Substitusi $a = -1$ pada persamaan (5) akan memberikan

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i \text{ ....} (6)$$

I + x Jika pada persamaan (6) kita substitusikan ax pada x, akan diperoleh

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a^i x^i \text{ ....} (7)$$

Sekarang kita pangkatkan ruas kiri persamaan (2) . Kita peroleh

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \left(\sum_0^\infty x^i\right) = \sum_0^\infty \binom{n+i-1}{i} x^i \quad \text{.....(8)}$$

Contoh 3.7

Misalkan kita akan mencari koefisien x^{16} pada $(x^2 + x^3 + x^{4\,+} \ldots)^5$

Langkah pertama bentuk tersebut diubah dahulu sebagai berikut:

$$(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^5 = [x^2 (1 + x + x^2 + \ldots)]^5$$
$$= x^{10}(1 + x + x^2 + \ldots)^5$$
$$= x^{10} \left(\frac{1}{1-x}\right)$$
$$= x^{10} \frac{1}{(1-x)^5}$$

Karena $x^{16} = x^{10}x^6$ berarti mencari koefisien x^{16} pada $(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^5$ sama dengan mencari koefisien x^6 pada $\frac{1}{(1-x)^5}$ yaitu $\binom{5+6-1}{6} = \binom{10}{6} = 210$.

Jadi, koefisien x^{16} pada $(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^5$ adalah 210.

Contoh 3.8

Banyaknya cara untuk memilih 25 mainan dari 7 tipe mainan dimana tiap tipe antara 2 dan 6, sama dengan mencari koefisien x^{25} dari fungsi pembangkit:

$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7$.

Fungsi pembangkit tersebut diubah sebagai 'berikut:

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7 = [\, x^2 (1 + x + x^{2\,+} x^3 + x^4)]^7$$
$$= x^{14} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7$$

Sekarang tinggal mencari koefisien x^{11} pada $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7$. Dengan menggunakan identitas (1) diperoleh

$$(1 + x + \ldots + x^4)^7 = \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^7 = (1-x)^{-7}.(1-x^5)^7$$

Misalkan $f(x) = (1-x)^{-7}$ dan $g(x) = (1-x^5)^7$. Dengan menggunakan ekspansi (5) dan (4), kita peroleh

$$f(x) = (1-x)^{-7} = 1 + \binom{1+7-1}{1} x + \binom{2+7-1}{2} x^2 + \ldots + \binom{r+7-1}{r} x^r + \ldots$$

$$g(x) = (1-x^5)^7 = 1 - \binom{7}{1} x^5 + \binom{7}{2} x^{10} - \ldots - (-1) \binom{7}{r} x^{5r} - \ldots - \binom{7}{7} x^{35}$$

Untuk mencari koefisien x^{11} pada $h(x) = f(x)g(x)$ kita hanya membutuhkan bentuk $a_{11-i}\, b_i$ dalam ekspansi (6), yaitu

$$a_{11}b_0 + a_6 b_5 + a_1 b_{10} = \binom{11+7-1}{11} + \binom{6+7-1}{6} - \left(-\binom{7}{1}\right) + \binom{1+7-1}{1}\binom{7}{2}$$

Hasil terakhir ini merupakan koefisien x^{11}.

C. Fungsi Pembangkit Eksponen

Dalam hal penyusunan objek-objek seringkali urutan menjadi sangat penting, sehingga diperlukan fungsi pembangkit lain yang bisa membantu penyelesaiannya. Fungsi pembangkit ini disebut fungsi pembangkit eksponen (*exponential generating function*). Untuk mengembangkan fungsi pembangkit eksponen ini akan banyak memakai teorema binomium Newton.

Fungsi pembangkit eksponen digunakan untuk model-model menyelesaikan masalah menyusun dan distribusi objek-objek berbeda. Karena urutan menjadi hal yang diperhatikan, maka perhatian kita pada masalah permutasi. Kita notasikan banyaknya permutasi *k* unsur dari *n* unsur dengan *P*(*n*, *k*).

Sebagai ilustrasi perhatikan masalah untuk menentukan berapa banyak cara menyusun kata-kata berbeda dari empat huruf, apabila huruf-huruf dipilih dari supplier tak hingga *a, b dan* c dan kata harus mempunyai paling sedikit dua simbol *a.* Diperoleh himpunan empat huruf yang mungkin membentuk kata yaitu {*a, a, a, a*}, {*a, a, a, b*}, {*a,a,a,c*}, {*a, a, b, b*), {*a, a, b,c*} *dan* {*a,a,c,c*}.

Dari himpunan {*a, a, a, a*} diperoleh $\frac{4!}{4!0!0!}$ = 1 kata yaitu *aaaa;* dari himpunan {*a, a, a, b*} diperoleh $\frac{4!}{3!1!0!}$ = 4 kata yaitu *aaab, aaba, abaa dan baaa dan* seterusnya. Jadi, banyaknya kata yang mungkin terjadi adalah

$$\frac{4!}{4!0!0!} + \frac{4!}{3!1!0!} + \frac{4!}{3!0!1!} + \frac{4!}{2!2!0!} + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!0!2!}$$

Model jumlah penyelesaian bilangan bulatnya dinyatakan dalam persamaan

$e_1 + e_2 + e_3 = 4$, $e_1 \geq 2$, $e_2, e_3 \geq 0$.

Dalam bentuk fungsi pembangkit, koefisien x^4 tidak akan dihitung semuanya dari produk formal $x^{e1}x^{e2}x^{e3}$ ($e_1 > 2$) dengan jumlah pangkatnya 4, tetapi akan dihitung semuanya dari produk formal

$$\frac{(e_1 + e_2 + e_3)!}{e_1!\, e_2!\, e_3!}\, x^{e_1} x^{e_2} x^{e_3},\ e_1 \geq 2$$

dengan jumlah pangkatnya 4.

Fungsi pembangkit eksponen dinyatakan dalam bentuk produk formal berikut.

Definisi 3.3

Untuk barisan bilangan real $a_0, a_1, a_2, \ldots,$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^2}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x_i}{i!}$$

disebut fungsi pembangkit eksponensial bagi barisan tersebut.

Contoh 3.9

Misalkan kita akan menentukan fungsi pembangkit eksponen untuk a_n banyaknya cara menyusun *r* objek tanpa pengulangan dari *n* objek yang diberikan.

Model jumlah penyelesaian bilangan bulatnya dinyatakan dalam persamaan

$e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n = r$, dengan $e_i = 0,1$.

Fungsi pembangkit eksponennya adalah $g(x) = (1 + x)^n$.

Berdasarkan identitas (3) diperoleh suku ke-r yaitu

$$\binom{n}{r} x^r = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}\, x^r$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{x^r}{r!}$$

Jadi, $ar = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n, r)$

Contoh 3.10

Misalkan kita akan menentukan f mgsi pembangkit eksponen untuk a,., banyaknya susunan berbeda dari r objek yang dipilih dari empat tipe objek berbeda, dengan setiap tipe objek muncul paling sedikit dua dan paling banyak lima.

Disini kita ingin mencari koefisien $\frac{x^r}{r!}$ dari fungsi pembangkit eksponen.

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)$$

Perluasan deret MacLaurin untuk e^x adalah

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x_i}{i!}$$

Dalam hal ini e^x termasuk fungsi pembangkit eksponen yang berkorespondensi dengan barisan 1, 1, 1, … Perluasan deret MacLaurin untuk e^x ini merupakan ekspansi dasar untuk fungsi pembangkit eksponen. Dengan beberapa substitusi tambahan akhirnya diperoleh bentuk-bentuk ekspansi lainnya.

Beberapa identitas ekspansi untuk fungsi pembangkit eksponen selengkapnya adalah sebagai berikut ini.

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x_i}{i!}$

(2) $e' = 1 + nx + n^2\frac{x^2}{2!} + n^3\frac{x^3}{3!} + \ldots + n^r\frac{x^r}{r!} + \ldots$

(3) $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

(4) $\frac{1}{2}(e^x + e^{-}x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$

(5) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$

Berikut ini contoh-contoh pemakaian identitas tersebut.

Contoh 3.11

Misalkan kita akan menentukan banyaknya susunan berbeda dari r objek yang dipilih dari tak hingga supplier n tipe objek dengan menggunakan fungsi pembangkit eksponen.

Fungsi pembangkit eksponen untuk masalah ini adalah

$$(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^n = (e^x)^n = e^{nx}.$$

Dengan menggunakan identitas (2), diperoleh koefisien $\frac{x^r}{r!}$ yaitu n^r.

Contoh 3.12

Misalkan kita akan menentukan berapa banyak cara menempatkan 25 orang dalam tiga ruangan dengan paling sedikit 1 orang tiap ruangan.

Fungsi pembangkit eksponen untuk masalah ini adalah

$$(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^3 = (e^x - 1)^3$$

$$= e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1$$

Dengan menggunakan identitas (2), diperoleh

$$e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 = \sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{x^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{x^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} - 1$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left(3^r - 3.2^r + 3\right) \frac{x^r}{r!} - 1$$

Jadi, koefisien dari $\frac{x^{25}}{25!}$ adalah $3^{25} - 3.2^{25} + 3$.

D. Uji Kompetensi

1. Tentukan fungsi pembangkit dari persamaan di bawah ini dan tuliskan koefisien fungsi yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut.
   a. $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 20$, $0 \le e_i \le 5$ untuk i = 1, 2, 3, 4.
   b. $e_1 + e2 + e_3 = 20$, $0 \le ei \le 8$ untuk i = 1, 2, 3.
2. Bentuk fungsi pembangkit untuk a_n yaitu banyaknya penyelesaian bilangan bulat pada persamaan:

a. $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = r, 0 < e_1 \leq 4.$

b. $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r,\ 0 \leq e_i.$

3. Carilah koefisien x^5 dalam fungsi-fungsi berikut:

   a. $f(x) = (1 - 2x)^{-8}$.

   b. $g(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^4$.

4. Berapa banyak cara untuk mendistribusikan 25 bola identik ke dalam 7 kotak berbeda, jika kotak pertama dapat diisi paling banyak 10 bola dan bola-bola yang lain dapat dimasukkan pada setiap 6 kotak lainnya.

5. a). Tentukan jumlah

$$\binom{2}{1} + 2\binom{2}{2} + \ldots + i\binom{2}{i} + \ldots + n\binom{2}{n}$$

   b). Jika kita tuliskan semua kombinasi n lambang $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dengan kata lain semua kombinasi-1, semua kombinasi-2, berapa kali setiap lambang akan muncul?

6. Tentukan jumlah

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

7. Tentukan fungsi pembangkit eksponen bagi tiap barisan berikut:

   a. $1, a, a^2, a^3, \ldots$

   b. $1, b^2, b^4, b^6, \ldots$

8. Tuliskan barisan yang dibentuk oleh fungsi pembangkit eksponen berikut:

   a. $f(x) = 4\, e^{2r}$

   b. $g(x) = \dfrac{2}{1 - 3x} + e^{2x}$

9. Carilah fungsi pembangkit eksponen untuk menghitung banyaknya cara mendistribusikan r orang ke dalam 6 ruangan berbeda sehingga terdapat antara 2 dan 4 orang dalam tiap ruangan.

10. Perlihatkan dengan menggunakan fungsi pembangkit bahwa setiap biiangan bulat dapat ditulis sebagai jumlah bilangan bulat dalam pangkat dua berbeda secara tunggal.

11. Fariz ingin membeli 15 buah kelereng yang terdiri atas 3 warna, yaitu biru,

merah dan kuning. Dia ingin membeli paling sedikit 3 kelereng, tapi tak lebih dari 5 kelereng warna biru, paling sedikit 5 kelereng warna merah dan tak kurang dari 4 kelereng warna kuning. Ada berapa cara dia membeli 15 kelereng itu? Gunakan konsep fungsi pembangkit.

12. Misalkan a_r menyatakan banyaknya cara mengambil r kelereng dari sejumlah takhingga kelereng merah, bins dan putih, dengan kendala bahwa banyaknya kelereng merah yang terambil selalu genap. Tentukan fungsi pembangkit bagi fungsi numerik a_r.

BAB IV
RELASI REKURSIF

A. Definisi

Relasi rekursif adalah suatu topik penting dan menarik dalam kombinatorik. Banyak permasalahan dalam matematika, khususnya kombinatorik dapat dimodelkan ke dalam bentuk relasi rekursif. Sebagai ilustrasi, ikuti uraian berikut. Misal P, menyatakan banyaknya permutasi dari n obyek berbeda. Jelas P_1 = 1, karena hanya ada satu permutasi dari 1 objek. Untuk $n \geq 2$, P, diperoleh dengan cara berikut. Terdapat n kemungkinan posisi dari satu objek tertentu dan setiap kemungkinan posisi dari objek ini akan diikuti oleh permutasi dari n-1 objek. Karena banyaknya permutasi dari $n-1$ obj ek ini adalah P,-, maka terdapat hubungan $P,, = nP,,-1$, dengan demikian

$$P_1 = 1;\ P_n = nP_{n-1},\ n \geq 2.$$

Bentuk ini disebut relasi rekursif untuk P_n, banyaknya permutasi dari n objek. $P_1 = 1$ disebut kondisi awal, sedangkan $P_n = nP_{n-1}$ disebut bagian rekursif dari relasi rekursif tersebut.

Sekarang perhatikan barisan bilangan Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …). Misal F,, menyatakan suku ke-n dari barisan tersebut. Perhatikan bahwa untuk n ≥ 3, suku ke-n dari barisan adalah jumlah dua suku berurutan persis didepannya. Sehingga relasi rekursif untuk F,, dapat ditulis sebagai berikut

$$F_1 = F_2 = 1\ ;\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3.$$

Dalam relasi ini terdapat dua kondisi awal yaitu Fl = 1 dan F2 = 1. Kalau kondisi awal ini kita ubah nilainya, maka barisan Fibonacci yang kita peroleh tentu akan berbeda dari barisan Fibonacci di atas.

Misalnya n objek yang berbeda ndijajarkann dalam satu baris. Kemudian kita permutasikan objek-objek tersebut dalam baris yang sama sedemikian hingga tidak ada objek yang menempati tempatnya semula. Pertanyaannya adalah: ada berapa permutasi yang mungkin? Jika kita misalkan banyaknya permutasi yang dimaksud adalah D, maka permasalahan ini dapat dimodelkan (akan ditunjukkan kemudian) kedalam bentuk relasi rekursif seperti berikut ini:

$$D_0 = 1\ ;\ D_n = nD_{n-1} + (-1)^n\ ,\ n \geq 1.$$

Dalam hal ini Do = 1 adalah syarat awal, sedangkan $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

Bagi suatu fungsi numerik (a_0, a_1, a_2, ..., a_r, ...) dan sembarang r, suatu persamaan yang mengaitkan a, dengan satu atau lebih $a1$, $i < r$, dinamakan relasi *rekursif* (*recurrence relation*). Relasi rekursif juga dinamakan persamaan beda (*difference equation*). Kiranya jelas bahwa menurut relasi rekursif itu, kita dapat mengerjakan perhitungan setahap demi setahap untuk menentukan a_r dari a_{r-1}, a_{r-2}, ..., untuk menentukan a_{r+1} dari a_r, a_{r-1}, ... *dan* begitu seterusnya, asalkan nilai fungsi di satu lebih titik diketahui sehingga komputasi bisa dimulai. Nilai-nilai awal yang diketahui itu dinamakan syarat batas (*boundary condition*).

Setelah memodelkan suatu masalah kedalam bentuk relasi rekursif, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan relasi rekursif tersebut. Dalam bab ini akan dibahas beberapa teknik untuk menyelesaikan relasi rekursif. Kita juga akan bicarakan bagaimana menyelesaikan suatu sistem relasi rekursif.

B. Relasi Rekursif Linear dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum bagian rekursif dari suatu relasi rekursif linear berderajat k adalah sebagai berikut:

$$c_0a_n + c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} = f(n) \quad \ldots\ldots(4.1)$$

dimana

c_1 sebagai konstanta dan $f(n)$ adalah fungsi dalam n dan $c_0 \neq 0$. Jika $f(n)$ 0 maka relasi rekursifnya disebut *homogen;* jika tidak demikian, *nonhomogen.* Selanjutnya, jika untuk setiap $i \in \{1, 2, 3, \ldots k\}$, c_i sebagai konstanta, maka relasi rekursifnya disebut relasi rekursif dengan koefisien konstanta, Misalnya:

(i) $2a_r + 3a_{r-1} = 2^r$ adalah sebuah relasi rekursif linear berderajat satu dengan koefisien konstanta.

(ii) $a_1 = a_2 = 0$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$, $n \geq 3$ adalah relasi rekursif linear nonhomogen berderajat dua dengan koefisien konstanta.

(iii) $a_1 = a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$, $n \geq 3$ adalah relasi rekursif linear nonhomogen berderajat dua dengan koefisien konstanta.

(iv) $a_0 = a_1 = 1$; $a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots a_{n-1}a_0$, $n \geq 1$ adalah relasi rekursif nonlinear.

(v) $D_0 = 1$; $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, $n \geq 1$ adalah relasi rekursif linear nonhomogen dengan koefisien nonkonstanta.

Perlu dicatat bahwa suatu relasi rekursif berderajat k terdiri atas sebuah bagian rekursif dan k kondisi awal berurutan. Relasi rekursif demikian mendefinisikan tepat satu fungsi.

Untuk suatu relasi rekursif linear berderajat k dengan koefsien-koefisien konstanta sebagaimana ditunjukkan dalam (4.1), jika k nilai berturut-turut dari fungsi numerik a, a_{m-k}, a_{m-k+1}, …, a_{m-1} diketahui untuk suatu m tertentu, maka nilai am dapat dihitung berdasarkan (4.1), yaitu

$$a_m = -\frac{1}{c_0}[c_1 a_{m-1} + c_1 a_{m-2} + \ldots + c_k a_{m-k} - f(m)]$$

Selanjutnya, nilai am + 1 dapat dihitung sebagai berikut:

$$a_{m+1} = -\frac{1}{c_0}[c_1 a_m + c_2 a_{m-1} + \ldots + c_k a_{m-k} + 1 - f(m+1)]$$

dan nilai-nilai a_{m+2}, a_{m+3}, … dapat dihitung dengan cara serupa. Di samping itu, nilai a_{m-k-1} dapat dihitung sebagai berikut:

$$a_{m-k-1} = -\frac{1}{c_k}[c_0 a_{m-1} + c_1 a_{m-2-} + \ldots + c_{k-1} a_{m-k} - f(m-1)]$$

dan nilai a_{m-k-2} dapat dihitung sebagai berikut:

$$a_{m-k-2} = -\frac{1}{c_k}[c_0 a_{m-2} + c_1 a_{m-3} + \ldots + C_{k-1} a_{m-k-1} - f(m-2)]$$

Nilai-nilai a_{m-k-3} dan a_{m-k-4}, … dapat dihitung dengan cara serupa. Untuk suatu relasi rekursif linear berderajat k, nilai k buah a_1 yang berturutan selalu dapat digunakan untuk menentukan fungsi numerik a secara tunggal. Dengan kata lain, nilai k buah a_1 yang berturutan membentuk suatu syarat batas yang layak.

Akan tetapi, untuk suatu relasi rekursif linear berderajat *k*, kurang dari *k* nilai fungsi tidak akan cukup untuk menentukan fungsi numerik tersebut secara tunggal.

C. Relasi Rekursif Homogen dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum dari relasi rekursif linear homogen dengan koefisien

konstanta adalah sebagai berikut:

$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k} = 0 \; ; \; C_k \neq 0,$

dengan k kondisi awal (syarat batas) dan untuk $1 \leq i \leq k$, c_i = konstanta.

Solusi homogen bagi suatu relasi rekursif linear dengan koefisienkoefisien konstanta mempunyai bentuk Aa_1^r; dalam hal ini α_l dinamakan akar karakteristik dan A adalah suatu konstanta yang ditentukan oleh syarat batasnya. Dengan mengganti a_n dengan $A\alpha^n$ di dalam relasi rekursif dan ruas kanannya disamakan dengan 0, kita peroleh

$c_0 A\alpha^n + c_1 A\alpha^{n-1} + C_2 A\alpha^{n-2} + \ldots + ckA\alpha^{n-k} = 0$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$c_0\alpha^K + c_1\alpha^{k-1} + c_2\alpha^{k-2} + \ldots + c_k = 0$

yang dinamakan persamaan karakteristik bagi relasi rekursif bersangkutan. Dengan demikian, jika al adalah salah satu dari akar-akar relasi rekursif tersebut, maka Aa_1^n merupakan suatu solusi homogen bagi relasi rekursif tersebut.

Relasi rekursif yang berderajat k mempunyai k akar karakteristik. Jika akar-akar persamaan karakteristik itu berbeda semuanya, tidak sukar untuk mernverifikasi bahwa

$a_r^{(h)} = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \ldots + A_k\alpha_k^n$

juga merupakan solusi homogen (umum) bagi relasi rekursif tersebut; dalam hal ini $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ adalah akar-akar karakteristik yang berbeda itu dan $A_1, A_2, \ldots, A_k$ adalah konstanta-konstanta yang harus ditentukan oleh syarat-syarat batasnya. Akhirnya diperoleh solusi homogen (khusus).

Pada bagian ini akan dikembangkan suatu teknik untuk menyelesaikan relasi rekursif homogen dengan koefisien konstanta. Untuk maksud tersebut diperlukan teorema berikut:

Teorema 4.1 (*Prinsip Superposisi*)

Jika $g_1(n)$ *dan* $g_2(n)$ *berturut-turut adalah solusi dari*

$a_n + c_1 a_{n-1} + c_1 a_{n-2} \ldots + c_k a_{n-k} = f_l(n)$ ..... (*4.2*)

dan

$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \ldots + c_k a_{n-k} = f_2(n)$ ..... (*4.3*)

maka untuk sebarang konstanta. $\hat{C}_1$ *dan* $\hat{C}_2$, $\hat{C}_1 g_1(n) + \hat{C}_2 g_2(n)$ *adalah sebuah*

solusi dari

$$a_n + c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} \ldots + c_ka_{n-k} = \hat{C}_1f_1(n) + \hat{C}_2f_2(n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.4)$$

Bukti:

Karena $g_1(n)$ dan $g_2(n)$ berturut-turut adalah solusi dari (4.2) dan (4.3) maka

$$g_1(n) + c_1g_1(n-1) + c_2g_1(n-2) \ldots + c_kg_1(n-k) = f_1(n)$$

$$g_2(n) + c_1g_2(n-1) + c_2g_2(n-2) \ldots + c_kg_2(n-k) = f_2(n)$$

Misal $a,, = C_1g_1(n) + e_2g_2(n)$ maka

$a_n + c_1a_{n-1} + \ldots + C_ka_{n-k}$

$$= \hat{C}_1g_1(n) + \hat{C}_2g_2(n) + c_1 (e_ig_1(n-1)) + c_1(\hat{C}_2g_2(n-1)) + \ldots$$
$$+ c_k (\hat{C}_1g_1(n-k) + \hat{C}_2g_2(n-k))$$
$$= \hat{C}_1(g_1(n) + \hat{C}_1g|(n-1) + C_2g_1(n-2) + \ldots + c_kg_1(n-k)\}$$
$$+ \hat{C}_2 \{g_2(n) + c_1g_2(n-1) + c_2g_2(n-2) + \ldots + c_kg_2(n-k)\}$$
$$= \hat{C}\text{-}i\ f,\ (n) + e2\ f2(n).$$

Ini berarti $\hat{C}_1 G_1 (n) + \hat{C}_2\ g_2(n)$ solusi dari (4.4) terbukti.

Sebagai akibat dari Teorema Prinsip Superposisi diperoleh teorema berikut.

Teorema 4.2

Jika $g_1(n), g_2(n), \ldots, g_k(n)$ berturut-turut adalah solusi dari

$$a_n + c_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} \ldots + c_ka_{n-k} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.5)$$

maka $\hat{C}_1g_1(n) + \hat{C}_29_2(n) + \ldots + \hat{C}_kg_k(n)$ juga solusi dari (4.5) untuk sebarang konstanta $\hat{C}_1\ \hat{C}_2, \ldots, \hat{C}_k$.

Untuk menyelesaikan relasi homogen dengan koefisien konstanta, pertama-tama kita misalkan $a_n = x^n$, $x \neq 0$. Untuk menentukan *x,* kita substitusi *a;* dengan *x* dengan $i \in \{n, n-1, n-2, \ldots, n-k\};$ diperoleh:

$$x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_kx^{n-k} = 0.$$

Bagi kedua ruas persamaan terakhir ini dengan *xn-k* diperoleh

$$x^k + c_1x^{k-1} + c_2\,x^{k-2} + \ldots + C_k = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.6)$$

Persamaan (4.6) disebut persamaan karakteristik dari relasi rekursif homogen dengan koefiesien konstanta. Pada umumnya persamaan (4.6) mempunyai k akar, beberapa diantaranya mungkin bilangan kompleks.

Jika $x_1, x_{2i} \ldots, x_k$ adalah k akar-akar (yang berbeda) dari persamaan (4.6),

maka $a_n = x_i^n$; $1 \leq i \leq k$ adalah solusi dari $a_n + c_1a_{r-1} + \ldots + c_ka_{n-k} = 0$; $ck \neq 0$.

Berdasar Teorema *4.2* jika $g_1(n)$, $g_2(n)$, ..., $g_k(n)$ berturut-turut adalah solusi dari

$$a_n + c_1a_{n-i} + c_1a_{n-2} \ldots + c_ka_{n-k} = 0 \ldots\ldots(4.7)$$

maka $\hat{C}_1g_1(n) + \hat{C}_2g_2(n) + \ldots + \hat{C}_kg_k(n)$ juga solusi dari (4.7) untuk sebarang konstanta $\hat{C}_l$, $\hat{C}_2$, ..., $\hat{C}_k$. Dengan demikian solusi umum dari relasi rekursif homogen koefisien konstanta adalah:

$$a_n^{(h)} = \hat{C}_1 x^n_1 + \hat{C}_2 x^n_2 + \ldots + \hat{C}_k x_k^n \ldots\ldots(4.8)$$

Dari persamaan (4.8) dan k kondisi awal (syarat batas) akan terbentuk suatu sistem persamaan yang terdiri dari *k* persamaan dengan *k* variabel $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$, …, $\hat{C}_k$. Jika solusi dari sistem persamaan ini kita substitusikan ke persamaan (4.8), diperoleh solusi homogen (khusus) dari relasi rekursif $a_n + c_la_{i-1} + \ldots + c_ka_{n-k} = 0$; $ck \neq 0$.

Contoh 4.1

Misalkan kita akan menyelesaikan relasi rekursif

$a_1 = a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$.

Misalkan $a_{,,} = x^n$; $x \geq 0$. Maka bentuk rekursif $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ menjadi

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} ,$$

ekuivalen dengan

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0.$$

Bagi kedua ruas persamaan terakhir ini dengan x^{n-2} diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$x^2 - x - 1 = 0$$

yang akar-akar karakteristiknya

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ dan } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Sehingga solusi homogen (umum) dari relasi rekursif adalah

$$a_n^{(h)} = C_1x_1^n + c_2x_2^n$$

$$a_n^{(h)} = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \ldots\ldots(4.9)$$

Karena kondisi awal a, = 1 dan a_2 = 1, maka dari (4.9) diperoleh sistem persamaan berikut:

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \quad \text{.....(4.10)}$$

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad \text{.....(4.11)}$$

selanjutnya dari persamaan (4.10) dan (4.11) didapat

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ dan } c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Substitusikan nilai c dan c_2 ini ke persamaan (4.9), diperoleh solusi homogen (khusus) dari relasi rekursif sebagai berikut:

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{5}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{5}\right)^n$$

Catatan: Walau formula a_n melibatkan bilangan rasional, dapat dicek bahwa untuk setiap $n \geq 1$, a_n adalah bilangan bulat non negatif.

Akar Rangkap

Misal persamaan karakteristik (4.6) mempunyai sebuah akar rangkap, katakan *x,* akar rangkap *m* (artinya dari ke *k* akar-akar dari (4.6) terdapat *m* akar yang masing-masing nilainya *x*). Maka dapat ditunjukkan bahwa masing-masing dari:

x_1^n, nx_1^n, $n^z x_1^n$, ..., $n^{m-1}x_1^n$ adalah solusi dari relasi (4.6). Ini bersama dengan Teorema 4.1, menghasilkan teorema berikut:

Teorema 4.3

Jika persamaan karakteristik (*4.6*) *dari relasi rekursif* $a_n + c_1a_{n-1} + \ldots + c_ka_{n-k} = 0$; $c_k \neq 0$, *mempunyai sebuah akar,* x_1 *katakan, rangkap* $m \leq k$, *maka solusi umum dari* $a_n + c_1a_{n-1} + \ldots + c_ka_{n-k} = 0$; c_{k-1}; $c_k \neq 0$, *yang melibatkan x, mempunyai bentuk*

$$c_0x_1^n + c_1nx_1^n + c_2n^2x_1^n + \ldots + c^{m-1}n^{m-1}\,x_1^n$$

Contoh 4.2

Misalkan kita akan mencari formula solusi homogen (umum) dan solusi homogen (khusus) untuk a_n yang memenuhi relasi berikut

$$a_n = 3\, a_{n-1} + 6\, a_{n-2} - 28\, a_{n-3} + 24\, a_{n-4}$$

dengan

$$a_n = 1;\ a_1 = 2;\ a_2 = 3 \text{ dan } a_3 = 4.$$

Misalkan $a_n = x_n\ ;\ x \neq 0$. Maka bagian rekursif dari relasi rekursif diperoleh:

$$x^n = 3x^{n-1} + 6x^{n-2} - 28x^{n-3} + 24x^{n-4}\ ,$$

ekuivalen dengan

$$x^n - 3x^{n-1} - 6x^{n-2} + 28x^{n-3} - 24^{x-4} = 0.$$

Bagi kedua ruas *dari* persamaan terakhir ini dengan x^{n-4}, diperoleh persamaan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24 = 0$$

ekuivalen dengan

$$(x - 2)^3 (x + 3) = 0.$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik ini adalah

$$x = 2 \text{ (rangkap } 3) \text{ dan } x = -3$$

Sehingga, berdasarkan Teorema 4.3 dan Teorema 4.2, solusi homogen (umum) dari rekursif diatas adalah

$$a_n = c_0\, 2^n + c_1\, n\, 2^n + c_2\, n^2\, 2^n + c_3\, (-3)n \quad \text{.....(4.12)}$$

karena $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ *dan* $a_3 = 4$, dari (*4.12*) diperoleh sistem persamaan berikut:

$$1 = c_0 + c_3$$
$$2 = 2c_0 + 2c_1 + 2c_2 - 3c3$$
$$3 = 4c_0 + 8c_1 + 16c_2 + 9c_3$$
$$4 = 8c_0 + 24c_1 + 72c_2 - 27c3$$

dengan solusinya

$$c_0 = 1\frac{2}{125}\ ;\ c_1 = \frac{7}{200}\ ;\ c_2 = -\frac{3}{40}\ ;\ c_3 = -\frac{2}{125}$$

Substitusikan nilai-nilai c_0, c_1, c_2 *dan* c_3 ini ke dalam persamaan (4.12), diperoleh solusi homogen (khusus) yang diminta

$$a_n = 1\frac{2}{125}(2)^n + \frac{7}{200}n(2)^n - \frac{3}{40}n^2(2)^n - \frac{2}{125}(-3)^n$$

D. Relasi Rekursif Tidak Homogen dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum dari relasi rekursif linear tidak homogen dengan koefisien konstanta adalah sebagai berikut:

$$a_n + c_1a_{n-1} + ... + c_ka_{n-k} = f(n)\ ;\ c_k \neq 0, f(n) \neq {}^0,$$

dengan k kondisi awal (syarat batas) dan untuk $1 < i < k$, c_i = konstanta.

Belum ada prosedur umum untuk menentukan solusi khusus bagi suatu relasi rekursif. Dalam kasus yang sederhana, pertama-tama kita buat bentuk umum dari solusi khusus berdasarkan bentuk f(n) dan kemudian kita tentukan solusi pastinya berdasarkan relasi rekursif yang diberikan. Perhatikanlah kasus-kasus berikut ini.

Kasus 1

Bila $f(n)$ merupakan suatu polinom berderajat t di dalam n yaitu

$$A_1n^t + A_2n^{t-1} + \ldots + A_tn + A_{t+1},$$

Maka bentuk umum solusi khususnya'

$$B_1n^1 + B_2n^{t-1} + \ldots + B_in + B_{t+1}.$$

Contoh 4.3

Misalkan kita akan mencari solusi khusus untuk relasi rekursif tidak homogen

$$a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2 - 2n + 1 \quad \ldots\ldots(4.13)$$

Solusi khususnya mempunyai bentuk

$$B_1n^2 + B_2n + B_3 \quad \ldots\ldots(4.14)$$

Dengan mensubstitusikan (*4.14*) ke dalam (4.13), kita memperoleh

$$(B_1n^2 + B_2n + B_3) + 5(B_l\,(n-1)^2 + B_2\,(n-1) + B_3) + 6(B_l\,(n-2)^2 + B_2\,(n-2) + B_3) = 3n^2 - 2n + 1$$

setelah disederhanakan menjadi

$$12B_1n^2 - (34B_1 - 12B_2)n + (29B_1 - 17B_2 + 12B_3) = 3n^2 - 2n + 1 \quad \ldots\ldots(4.15)$$

Dengan membandingkan koefisien kedua ruas (4.15), kita memperoleh

persamaanpersamaan

$12B_1 = 3$

$34B_1 - 12B_2 = 2$

$29B_1 - 17B_2 + 12B_3 = 1$

yang menghasilkan

$B, = ¼ ; B2 = 13/24 ; B3 = 71/288$

Jadi, solusi khususnya adalah

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{4} n^2 + \frac{13}{24} n + \frac{71}{288}$$

Kasus 2

Bila $f(n)$ berbentuk β^n, maka solusi khususnya akan berbentuk umum β^n, dengan syarat, β bukan akar karakteristik relasi rekursif tersebut.

Contoh 4.4

Misalkan kita akan mencari solusi khusus untuk relasi rekursif tidak homogen

$a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 42.4^n$ .....(*4.16*)

Solusi khususnya mempunyai bentuk umum $B.4^n$.....(*4.17*)

Dengan mensubstitusikan (4.17) ke dalam (4.16), kita memperoleh

$B.4^n + 5\ B.4^{n-1} + 6\ B.4^{i-2} = 42.4^n$

$\Leftrightarrow$ $B.4\ n + 5\ B.4\ n.4\text{-}1 + 6\ B.4n.4\text{-}2 = 42.4n$

$\Leftrightarrow$ $B.4\ n + 5/4.\ BA\ n + 6/16.\ BA\ n = 42.4n$

$\Leftrightarrow$ $42/16.B.4n = 42.4n$

$\Leftrightarrow$ $B = 16$

Jadi, solusi khususnya adalah

$a_n^{(P)} = 16.4^n$.

Contoh 4.5

Misalkan kita akan mencari solusi khusus untuk relasi rekursif tidak homogen

$a_r - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 3^n$ .....(*4.18*)

Persamaan karakteristiknya:

x^2-6x + 9 = 3^n

$\Leftrightarrow$ a (x-3)^2 = 3^n

Ternyata merupakan akar karakteristik kembarnya. Karena itu bentuk umum solusi khususya adalah $Bn^2.3^n$. .....(*4.19*)

Dengan mensubstitusikan (*4.19*) ke dalam (4.18), kita memperoleh

$Bn^2.3^n$ - 6$B(n-1)^2.3^{nn'}$ + 9$B(n-2)^2.3^{nn2}$ = 3^n

$\Leftrightarrow$ $\{Bn^2.3^n - 6B(n^2 - 2n + 1).3^n.3^{-1} + 9B(n^2 - 4n + 4).3^n.3n^2 = 3^n$

$\Leftrightarrow$ $Bn^2.3^n - 2Bn^2.3^n + 4B^n.3^n - 2B.3^n + Bn^2.3^n - 4Bn.3^n + 4B.3^n = 3^n$ 2$B.3^n$ = 3n

$\Leftrightarrow$ 2$B.3^n$ = 3^n

$\Leftrightarrow$ B = ½.

Jadi, solusi khususnya adalah

$a_n^{(P)}$ = ½ $n^2.3^n$.

Kasus 3

Bila $f(n)$ berbentuk perkalian antara polinom dengan fungsi eksponen, maka solusi khususnya akan berbentuk perkalian antara kasus I dengan kasus 2. Yaitu, bila *1*(n) berbentuk

$$(A_1n^t + A_2n^{t-1} + \ldots + A_tn + A_{t+1})\,\beta^n$$

maka bentuk umum solusi khususnya

$$(B_1n^s + B_2n^{t-1} + \ldots + B_tn + B_{t+1})\,\beta^n .$$

Contoh 4.6

Misalkan kita akan mencari solusi khusus untuk relasi rekursif tidak homogen

$a_n = -a_{n-1} + 3n.\,2^n$.....(*4.20*)

Persamaan karakteristiknya:

$x + 1 = 3n.2^n$

Solusi khususnya mempunyai bentuk umum $[B_1n + B_0].2^n$.....(*4.21*)

Dengan mensubstitusikan (*4.21*) ke dalam (4.20), kita memperoleh

$[B_1n + B_0].2^n + [B_1(n-1) + B_0].2^{n-1} = 3n.2^n$

$\Leftrightarrow$ $B_1n.2^n + B_0.2^n + B_1n.2^{n-1} - B_1.2^{n-1} + B_0.2^{n-1} = 3n.2^n$

$\Leftrightarrow \quad B_1 n.2^n + B_0.2^n + B_1/2.\ n.2^n - B_1/2.2^n + B_0/2.2^n = 3n.2^n$

$\Leftrightarrow \quad (B_1 + B_1/2)\ n.\ 2^n + (3B_0/2 - B_1/2).2^n = 3n.2^n$ .....(4.22)

Dengan membandingkan koefisien kedua ruas (4.22), kita memperoleh persamaan persamaan

$B_i + B\ ½ = 3$ dan $3B_0/2 - B_1/2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad B_1 = 2$ dan $B_0 = ⅔$

Jadi, solusi khususnya adalah

$a_n^{(p)} = (2n + ⅔).\ 2^n$.

Solusi (total) bagi suatu relasi rekursif linear tidak homogen dengan koefisien-koefisien konstanta merupakan jumlah dua bagian, solusi homogen (khusus) yang memenuhi relasi rekursif itu bila ruas kanannya disamakan dengan 0 dan solusi khusus yang memenuhi relasi rekursif itu dengan $f(r)$ di ruas kanan. Misalkan akar-akar karakteristik relasi rekursif itu berbeda semuanya. Solusi totalnya mempunyai bentuk umum

$a_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^{n} + \ldots + A_k\alpha_k^n + P(n)$

dalam hal ini $p(n)$ adalah solusi khususnya.

Contoh 4.7

Misalkan kita akan mencari solusi total untuk relasi rekursif tidak homogen

$\alpha_n - 6\ \alpha_{n-1} + 9\alpha_{n-2} = 3_n$

Pada contoh 4.5 telah dikerjakan dan diperoleh 3 merupakan satu-satunya akar karakteristik kembarnya, sehingga solusi homogen (umumnya) adalah

$a_n^{(h)} = A_0.3^n + A_1.n.3^n$ dan solusi khususnya adalah $a_n^{(p)} = ½\ n^2.3^n$.

Diperoleh solusi totalnya adalah

$$a_n = A_0.3^n + A_1.n.3^n + 2\ n^2.3^n.$$

Contoh 4.8

Misalkan kita akan mencari solusi khusus untuk relasi rekursif tidak homogeny $\alpha_n + 5\alpha_n, + 6\alpha_{n-2}\ 42.\ 4^n$ (lihat contoh 4.4)

Solusi totalnya adalah

$a_n = A_1(-2)^n + A_2(-3)^n + 16.\ 4_n$ .....(4.23)

Misalkan diketahui syarat-syarat batasnya adalah $a_2 = 278$ dan $a_3 = 962$. Setelah

disubstitusi ke (4.23), diperoleh sistem persamaan linear

$278 = 4A_1 + 9A_2 + 256$

$962 = -8A_1 - 27A_2 + 1024$

Setelah sistem persamaan linear ini diselesaikan kita memperoleh

$A_1 = 1$ dan $A_2 = 2$.

Jadi, solusi totalnya adalah

$a_n = (-2)^n + 2(-3)^n + 16.4^n$.

E. Menyelesaikan Relasi Rekursif dengan Fungsi Pembangkit

Untuk suatu relasi rekursif ordo ke-k yang menspesifikasikan suatu fungsi numerik, kita harus tahu untuk nilai-nilai *n* berapa saja relasi itu berlaku. Kita catat bahwa relasi itu berlaku hanya jika $n \geq k$ sebab, untuk $n < k$, relasi itu akan melibatkan a_{-i}, sesuatu yang tidak didefinisikan.

Prosedur umum untuk menentukan fungsi pembangkit bagi fungsi numerik a dari relasi rekursif

$$c_0a_n + c_1a_{n-1} + c_{2an-2} + \ldots + c_ka_{n-k} = f(n)$$

yang berlaku untuk $n \geq s$, dalam hal ini $s \geq k$. Dengan mengalikan kedua ruas persamaan ini dengan z^n dan kemudian menjumlahkan hasilnya dari $n = s$ ke $n = \infty$, kita memperoleh

$$\sum_{n=s}^{\infty} (c_0a_n + c_1a_{n-1} + c_1a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k})z_n = \sum_{n=s}^{\infty} f(n)z^n$$

Karena

$$\sum_{n=s}^{\infty} c_0a_nz_n = c_0(A(z) - a_0 - a_1z - a_2z^2 - \ldots - a_{s-1}z^{s-1})$$

$$\sum_{n=s}^{\infty} c_1a_{n-1}zn = c_1z(A(z) - a_0 - a_1z - a_2z^2 - a_{s-2}z^{s-2})\ n = s$$

.....

$$\sum_{n=s}^{\infty} c_ka_{n-k}z = c_kz^k(A(z) - a_0 - a_1z - a_2z^2 - \ldots - a_{s-k-1}z^{s-k-i})$$

maka kita memperoleh

$$A(z) = \frac{1}{c_0 + c_1 z + ... + c_k z^k}\left[\sum_{n=s}^{\infty} f(n)z^n + c_0\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{s-k-1}z^{s-1}\right) + \right.$$
$$+ c_1 z\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{s-2}z^{s-2}\right)$$
$$\left. + c_k z^k\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{s-k-1}z^{s-k-1}\right)\right]$$

Contoh 4.9

Misalkan kita akan menyelesaikan relasi rekursif

$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n + n,\ n \geq 2$, dengan syarat batas $a_0 = 1$ dan $a_1 = 1$, dengan terlebih dahulu mencari fungsi pembangkitnya, A(z). Karena

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}z^n + 6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}z^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2^2 z^n + \sum_{n=2}^{\infty} rz^n$$

maka kita memperoleh

$$A(z) - a_0 - a_1 z - 5z[A(z) - a_0] + 6z^2 A(z) = \frac{4z^2}{1-2z} + z\left(\frac{1}{(1-z)^2} - 1\right)$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$A(z) = \frac{1 - 8z + 27z^2 - 35z^3 + 14z^4}{(1-z)^2(1-2z)^2(1-3z)}$$

$$A(z) = \frac{5/4}{1-z} + \frac{1/2}{(1-z)^2} - \frac{3}{1-2z} - \frac{2}{(1-2z)^2} + \frac{17/4}{1-3z}$$

Dengan demikian kita memperoleh

$a_n = 5/4 + ½.\ (n+1) - 3.\ 2^n - 2(n+1)2^n + 17/4.\ 3^n$

$a_n = 7/4 + n/2 - n.2^{n+1} - 5.2\ n + 17/4.\ 3^n$

Contoh 4.10

Misalkan kita akan menggunakan fungsi pembangkit biasa untuk relasi rekursif berikut

$$a_0 = 1, a_1 = 3;\ a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}, n - 2$$

Misal P(x) adalah fungsi pembangkit biasa dari barisan (a_n). Maka menurut definisi

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Karena untuk $n \geq 2$, $a_n = 2\,a_{n-1} + 4^{n-1}$ kalau kedua ruas dari persamaan ini dikalikan dengan x_n kemudian ndijumlahkann untuk $n = 2$ sampai $n = \infty$, diperoleh

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(2a_{n-1} + 4^{n-1}\right)x^n$$

ekuivalen dengan

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1}x^n$$

Ruas kiri persamaan diatas adalah

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x^n$$

$$= P(x) - 1 - 3x$$

Suku pertama ruas kanan persamaan diatas adalah

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n = 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}$$

$$= 2x\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - a_0\right)$$

$$= 2x\left(P(x) - 1\right)$$

$$= 2xP(x) - 2x$$

Suku kedua ruas kanan persamaan di atas adalah

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1} x^n = x\sum_{n=2}^{\infty} 4^{n-1} x^{n-1}$$

$$= x\left(\sum_{n=2}^{\infty} (4x)^{n-1} - 1\right)$$

$$= x\left(\frac{1}{1-4x} - 1\right)$$

$$= \frac{x}{1-4x} - x$$

Sehingga persamaan diatas menjadi $P(x) - 1 - 3x = 2xP(x) - 2x + \dfrac{x}{1-4x} - x$

yang ekuivalen dengan

$$P(x) = \frac{1 - 3x}{(1 - 4x)(1 - 2x)}$$

Karena $\frac{1 - 3x}{(1 - 4x)(1 - 2x)} = \frac{1/2}{1 - 4x} + \frac{1/2}{1 - 2x}$ maka diperoleh

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1/2}{1 - 4x} + \frac{1/2}{1 - 2x}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(4^n + 2^n)x^n$$

Dengan demikian, solusi yang dimaksud adalah $a_n = 2\ (4_n + 2_n)$.

F. Uji Kompetensi

1. Selesaikan relasi rekursif berikut dengan metode akar karakteristik.
   (a) $a_1 = a_2 = 1;\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3$
   (b) $a_0 = 0;\ a_1 = -1;\ a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, n \geq 2$
   (c) $a_0 = a_1 = 1\ ;\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}\ , n \geq 2$
   (d) $a_1 = 2, a_2 = 6;$
   $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0\ ,\ n \geq 3$
   (e) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$
   $a_n = 9a_{n-1} - 15a_{n-2} + 7a_{n-3}\ ,\ n \geq 3$
   (f) $a_0 = 0, a_l = l, a_2 = 2, a_3 = 3$
   $a_n + 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0, n \geq 4$
   (g) $a_0 = a_l = a_2 = 0, a_3 = 5$
   $a_n = 10a_{n-1} - 37a_{n-2} + 60a_{n-4} - 36a_{n-4}\ ;\ n > 4$
2. Sebuah tangga memiliki n buah anak tangga. Anda diminta menaiki tangga tersebut dengan aturan sebagai berikut: Setiap kali melangkah, anda diperbolehkan melangkah satu atau dua anak tangga sekaligus.
   (a) Jika $b_{,,}$ menyatakan banyaknya cara yang berbeda, anda dapat menaiki tangga dengan n anak tangga tersebut, tulis relasi rekursif untuk b_n.
   (b) Selesaikan relasi rekursif pada soal (a)
3. Selesaikan relasi *rekursif* berikut dengan fungsi pembangkit
   (a) $a_t = 3\ ;\ a_{n-1} = 2a_n + 4_n, n \geq 0$

(b) $a_0 = 0$; $a_n + l = a_n + n + 7$; $n \geq 0$

(c) $a_0 = 2$; $a_n = 1$; $a_n + 2 - 2a_{n+1} + a_n = 2n$, $n \geq 2$

(d) $a_0 = 1$; $a_n + 1 = 2n\ a_n + 2a_n + 2$; $n \geq 0$

(e) $a_0 = 2$; $a_n = 2_n\ a_{n-}$, $+ n$, $n \geq 1$

(f) $a_0 = 0$; $a_n = a_{n.t} + 2n$, $n \geq 1$

(g) $a_0 = 2$; $a_n = a_{n.l} + n(n - 1)$,$n \geq 1$.

BAB V
TEORI GRAF

A. Sejarah Singkat dan Beberapa Pengertian Dasar Teori Graf

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal di Eropa. Kurang lebih seratus tahun setelah lahirnya tulisan Euler tersebut tidak ada perkembangan yang berarti berkenaan dengan teori graf.

Tahun 1847, G.R. Kirchoff (1824-1887) berhasil mengembangkan teori pohon (*Theory of trees*) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Cayley (1821-1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan permasalahan kimia yaitu hidrokarbon.

Pada masa Kirchoff dan Cayley juga telah lahir dua hal penting dalam teori graf. Salah satunya berkenaan dengan konjektur empat warna, yang menyatakan bahwa untuk mewarnai sebuah atlas cukup dengan menggunakan empat macam warna sedemikian hingga tiap negara yang berbatasan akan memiliki warna yang berbeda.

Para ahli teori graf berkeyakinan bahwa orang yang pertama kali mengemukakan masalah empat-warna adalah A.F. Mobius (1790 - 1868) dalam salah satu kuliahnya di tahun 1840. Sepuluh tahun kemudian, A. Demorgan (1806 - 1871) kembali membahas masalah ini bersama ahli-ahli matematika lainnya di kota London. Dengan demikian tulisan Demorgan dianggap sebagai referensi pertama berkenaan dengan masalah empat-warna. Masalah empat-warna ini menjadi sangat terkenal setelah Cayley mempublikasikannya tahun 1879 dalam *Proceeding of the Royal Geographic Society* volume pertama.

Hal yang penting untuk dibicarakan sehubungan dengan perkembangan teori graf adalah apa yang dikemukakan oleh Sir W.R. Hamilton (1805 - 1865). Pada tahun 1859 dia berhasil menemukan suatu permainan yang kemudian dijualnya ke sebuah pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut dari kayu berbentuk *dodecahedron* beraturan yakni berupa sebuah polihedron dengan 12 muka dan 20 pojok. Tiap muka berbentuk sebuah pentagon beraturan dan tiap pojoknya dibentuk oleh tiga sisi berbeda. Tiap pojok dari *dodecahedron* tersebut

dipasangkan dengan sebuah kota terkenal seperti London, New York, Paris, dli. Masalah dalam permainan ini adalah, kita diminta untuk mencari suatu rute melalui sisi-sisi dari dodecahedron sehingga tiap kota dari 20 kota yang ada dapat dilalui tepat satu kali. Walaupun saat ini masalah tersebut dapat dikategorikan mudah, akan tetapi pada saat itu tidak ada seorangpun yang bisa menemukan syarat perlu dan cukup dari eksistensi rute yang dicari.

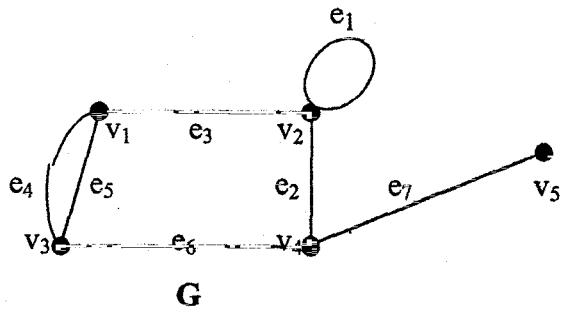
Kurang lebih setengah abadsetelah masa Hamilton, aktiv1tas dalam bidang teori graf dapat dikatakan relatif kecil. Pada tahun 1920-an kegiatan tersebut muncul kembali yang dipelopori oleh D. Konig. Konig berupaya mengumpulkan hasil-hasil pemikiran para ahli matematika tentang teori graf termasuk hasil pemikirannya sendiri, kemudian dikemasnya dalam bentuk buku yang terbitkan pada tahun 1936. Buku tersebut dianggap sebagai buku pertama tentang teori graf.

Tiga puluh tahun terakhir ini merupakan periode yag sangat intensif dalam aktiv1tas pengembangan teori graf baik murni maupun terapan. Sejumlah besar penelitian telah dilakukan, ribuan artikel telah diterbitkan dan lusinan buku telah banyak ditulis. Diantara orang terkenal yang banyak berkecimpung dalam bidang ini adalah Claude Berge, Oysten Ore, Paul Erdos, William Tutte dan Frank Harary.

Pengertian Graf

Sebuah graf linier (atau secara sederhana disebut graf) $G = (V,E)$ adalah suatu sistem yang terdiri atas suatu himpunan objek V = {v1, *v2, ...*} yang disebut himpunan titik dan sebuah koleksi $E = \{e_i, e_2, ...\}$ yang merupakan koleksi sisi sedemikian hingga tiap sisi *ek* dikaitkan dengan suatu pasangan tak-terurut (v_1, v_j). Titik v1, v_j yang berkaitan dengan *ek* disebut titik-titik ujung sisi e_k.

Cara merepresentasikan sebuah graf yang paling umum adalah dengan diagram. Dalam diagram tersebut, titik-titik dinyatakan sebagai noktah dan tiap sisi dinyatakan sebagai kurva sederhana yang menghubungkan tiap dua titik. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh graf pada gambar 5.1 berikut ini.



Gambar 5.1. Graf G dengan lima titik dan tujuh sisi

Dalam sebuah graf, seperti terlihat pada contoh di atas, dimungkinkan adanya suatu sisi yang dikaitkan dengan pasangan (v_2, v_2). Sisi yang dua titik ujungnya sama disebut loop/gelang. Dalam graf pada Gambar 5.1, e_1 merupakan sebuah loop. Dari contoh di atas juga perlu dicatat bahwa dalam sebuah graf dimungkinkan adanya lebih dari satu sisi yang dikaitkan dengan sepasang titik. Sebagai contoh, e_4 dan e_5 pada graf di atas dikaitkan dengan pasangan titik (v_1, v_3). Pasangan sisi semacam ini disebut sisi-sisi paralel/sejajar atau sisi rangkap.

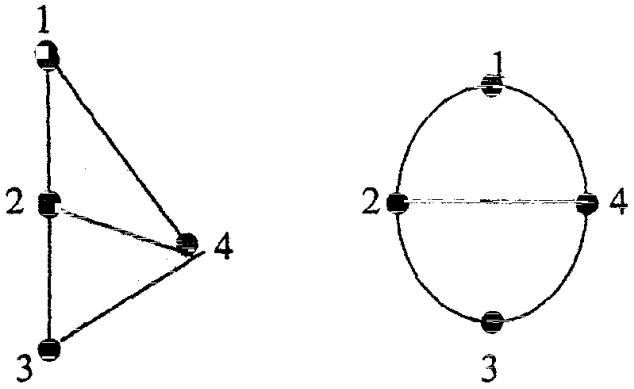
Sebuah graf yang tidak memiliki loop dan tidak memiliki sisi paralel disebut graf sederhana. Dalam beberapa literatur teori graf, pembahasan hanya dibatasi pada graf sederhana, akan tetapi dalam banyak aplikasi teknik, penggunaan loop dan sisi paralel sangat diperlukan. Untuk membedakan antara graf yang memuat loop dan sisi paralel dengan graf *yang* tidak memuat kedua hat tersebut, sebagian penulis menggunakan istilah graf sederhana untuk yang tidak memuat loop dan sisi paralel dan graf umum untuk yang lainnya.

Insidensi dan Ajasensi/Ketetanggaan

Jika sebuah titik v1 merupakan titik ujung dari suatu sisi ej, maka v dan ej disebut saling berinsidensi atau titik v1 menempel/insiden dengan sisi e_j. Sebagai contoh, pada Gambar 5.1 di atas sisi e_2, e_6 dan e_7 adalah sisi-sisi yang menempel dengan titik v_4. Dua sisi yang tidak paralel disebut bertetangga/ajasen, bila kedua sisi tersebut menempel dengan titik yang sama. Sebagai contoh, e_2 dan e_7 dalam Gambar 5.1 merupakan dua sisi yang bertetangga. Selain itu, dua buah titik disebut bertetangga jika kedua titik tersebut merupakan titik-titik ujung dari sisi yang sama. Dalam Gambar 5.1, v4 dan v5 adalah dua titik yang saling

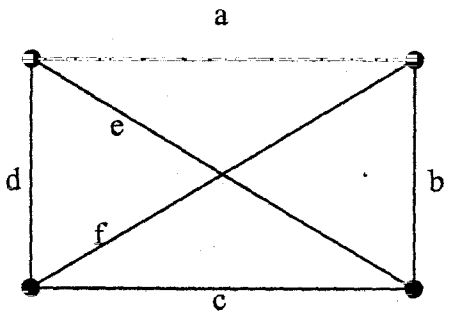
bertetangga, sedangkan titik v1 dan v_4 merupakan dua titik yang tidak saling bertetangga.

Dalam menggambar sebuah graf, bentuk sisi bisa berupa ruas garis lurus atau ruas garis lengkung. Demikian pula ukurannya, dalam penggambaran sebuah graf tidaklah diperhatikan. Hal penting untuk diperhatikan dalam sebuah graf adalah insidensi antara titik-titik dengan sisi-sisinya. Sebagai contoh, Gambar 5.2 di bawah ini menggambarkan graf yang sama, karena insidensi antara sisi-sisi dan titik-titik pada graf tersebut adalah sama.



Gambar 5.2. Graf G yang sama

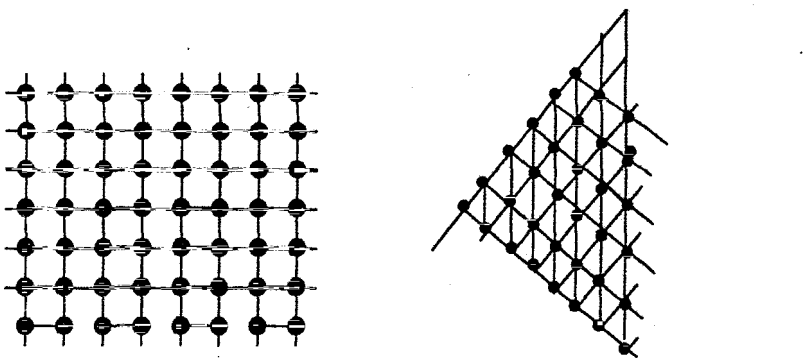
Sekarang perhatikan Gambar 5.3 di bawah ini. Pada gambar tersebut sisi e dan f tampaknya seperti berpotongan, akan tetapi perpotongamya tidak berupa titik. Kedua sisi seperti itu harus dipandang sebagai dua ruas garis yang terletak pada dua bidang berbeda, sehingga kedua sisi itu tidak berpotongan.



Gambar 5.3. Sisi *e* dan *f* tidak berpotongan

Graf Hingga dan Graf Tak Hingga

Walaupun dalam definisi graf tidak disebutkan secara eksplisit bahwa himpunan titik V dan himpunan sisi E tidak perlu merupakan sebuah himpunan hingga, akan tetapi dalam aplikasi teori graf biasanya kedua himpunan tersebut merupakan himpunan hingga. Sebuah graf $G = (V, E)$ dengan V dan E hingga disebut graf hingga atau graf terhingga dan jika sebaliknya yakni jika V atau E tak hingga, maka G disebut graf tak hingga. Contoh graf hingga dapat dilihat di pada Gambar 5.1, Gambar 5.2 dan Gambar 5.3. Sedangkan Gambar 5.4 di bawah ini merupakan contoh dari bagian graf tak hingga.



Gambar 5.4. Bagian dari graf tak hingga

Untuk pembahasan selanjutnya, yang dimaksud dengan graf dalam uraian ini adalah graf hingga.

Derajat (*degree*) Titik

Jumlah atau banyaknya sisi yang menempel dengan suatu titik v, (loop dihitung dua kali), disebut derajat (*degree*) dari titik tersebut; dinotasikan d(v). Derajat suatu titik sering juga disebut valensi dari titik tersebut. Derajat minimum dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan derajat maksimumnya dinotasikan dengan $\Delta(G)$.

Sebagai contoh, dalam Gambar 5.1, $d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = 3$, $d(v_2) = 4$ *dan* $d(v_5) = 1$. Jadi, $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 4$.

Selanjutnya pandang sebuah graf G dengan m sisi dan n titik: $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Karena tiap sisi menyumbangkan dua derajat, maka jumlah derajat dari semua titik dalam G sama dengan dua kali jumlah sisi dalam G. Dengan demikian.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m \quad \text{..... (1)}$$

Sebagai contoh, pada Gambar 5.1

$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 3 + 4 + 3 + 3 + 1$

$= 14$

= dua kali jumlah sisi.

Perhatikan bahwa terdapat empat buah titik yang berderajat ganjil. Persamaan (1) tersebut dinyatakan dalam lemma berikut. Lemma Jabat Tangan (*Handshaking Lemma*)

Untuk setiap graf G dengan n titik dan m sisi berlaku:

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

Dengan lemma ini kita akan lebih mudah dan terstruktur dalam membuktikan Teorema 5.1 berikut.

Teorema 5.1

Banyaknya titik berderajat ganjil dalam sebuah graf selalu genap.

Bukti:

Jika titik-titik berderajat ganjil dan genap kita pisahkan, maka jumlah ruas kiri persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai jumlah dari dua bilangan. Pertama diperoleh dari titik-titik berderajat ganjil dan kedua dari titik-titik berderajat genap. Jadi untuk suatu graf dengan n titik berlaku

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum d(v_j) + \sum d(v_k) \quad \text{..... (2)}$$

dengan $\sum d(v_i)$ adalah jumlah derajat titik-titik yang berderajat genap dan $\sum d(v_k)$ adalah jumlah derajat titik-titik yang berderajat ganjil.

Karena ruas kiri persamaan (2) genap dan suku pertama dari ruas kanan adalah genap, maka suku kedua ruas kanan juga pasti genap.

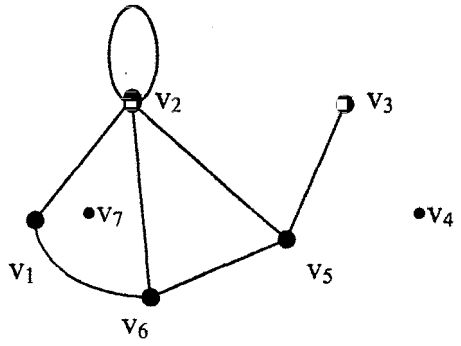
$\sum d(v_k)$ adalah sebuah bilangan genap. ..... (3)

Karena dalam persamaan (3) tiap d(v,) adalah bilangan ganjil, maka banyaknya titik berderajat ganjil pastilah genap.

Sebuah graf dengan semua titiknya berderajat sama disebut graf teratur (*regular graph*).

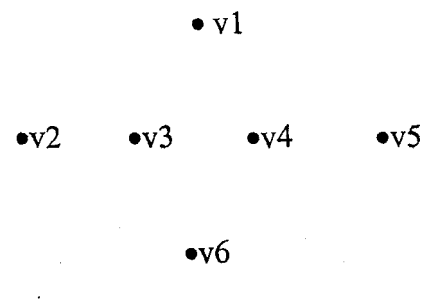
Titik Terisolasi, Titik Anting/Ujung (Daun) dan Graf Nol

Sebuah titik yang tidak memiliki sisi menempel terhadap titik tersebut disebut titik terisolasi. Dengan kata lain, titik terisolasi adalah titik yang berderajat nol. Titik v_4 dan v_7 dalam Gambar 5.5 di, bawah ini adalah dua contoh titik terisolasi. Sebuah titik berderajat satu disebut titik anting/ujung, yang selanjutnya disebut daun. Titik v_3 dalam Gambar 5.5 adalah dawn. Dua sisi yang saling bertetangga atau berbatasan disebut serf jika titik sekutunya berderajat dua. Dalam Gambar 5.5, dua 'si yang menempel dengan v1 adalah seri.



Gambar 5.5. Graf yang memuat titik terisolasi, sisi, seri, dan daun

Berdasarkan definisi graf G = (V, E), himpunan sisi E dimungkinkan merupakan sebuah koleksi kosong. Graf seperti ini, yakni graf yang tidak memiliki sisi, disebut graf nol atau graf kosong (*null graph*). Graf nol dengan *n* titik, dinotasikan N_n. Dengan kata lain, tiap titik dalam sebuah graf nol merupakan titik-titik terisolasi. Sebuah graf nol dengan enam titik dapat dilihat pada Gambar 5.6. Walaupun himpunan sisi dimungkinkan kosong, himpunan titik dari suatu graf tidak boleh kosong. Dengan kata lain, sebuah graf paling tidak harus memiliki sebuah titik.

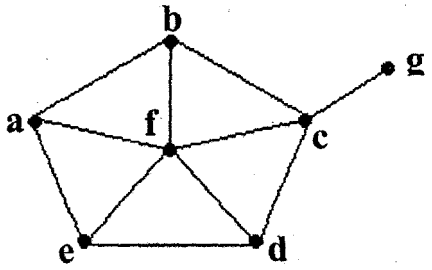


Gambar 5.6. Graf nol dengan enam titik

Jalan, Jejak, Lintasan dan Siklus

Misalkan G adalah sebuah graf. Sebuah jalan (*walk*) di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ \ldots\ e_k\ v_k$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian sehingga $v1_{-1}$ dan v1 adalah titik-titik akhir sisi e_i, untuk $1 < i < k$. Kita katakan W adalah sebuah jalan dari v_0 ke v_k, atau jalan (v_0,v_k). Titik v_0 dan titik vk berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W. Sedangkan titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal dari *W dan k* disebut panjang dari W. Perhatikan bahwa panjang dari jalan *W* adalah banyaknya sisi dalam W. Jika semua *sisi* $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut sebuah jejak (*trail*). Jika semua titik v_0, v_1, v_2, v_k dalam jalan W juga berbeda, maka *W* disebut sebuah lintasan (*path*). Sebuah jalan *W* disebut tertutup, jika titik awal dan titik akhir dari *W* identik (sama). Jejak tertutup disebut sirkit. Sirkit yang titik awal dan titik internalnya berlainan disebut siklus. Siklus dengan n titik dinotasikan dengan C_n.

Contoh 5.1



Gambar 5.7 Graf G

Jalan (walk): a f b f c d c

Jalan tutup (close walk): a b f c g c f e a

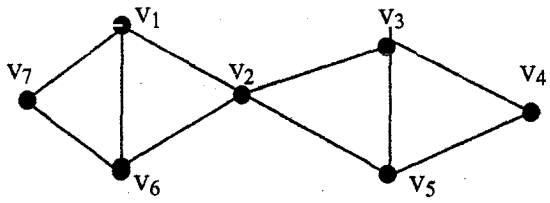
Jejak: a f c d f b

Jeka tutup (sirkit): a f e d c f b a

Lintasan (path): a e f c g

Contoh 5.2

Dalam graf G pada Gambar 5.8, v_1, v_2, v_3, v_5, v_2, v_6, v1 adalah sirkit yang bukan merupakan siklus; sedangkan v_2, v_3, v_4, v_5, v_2 adalah sebuah siklus.



Gambar 5.8. Graf G

B. Graf Sebagai Model Matematika dan Aplikasinya

Konstruksi model matematika dapat dibuat dalam berbagai cara dengan permasalahan matematika yang berbeda-beda. Salah satu model matematika yang sudah cukup dikenal dan bisa mencakup berbagai permasalahan adalah teori graf. Pada bagian ini akan disajikan dua contoh permasalahan yang dapat dibuat model matematikanya dalam bentuk graf.

Contoh 5.3

Seorang guru bermaksud membuat suatu diagram tentang hubungan antarsiswa dari kelas yang diajamya. Diagram tersebut harus berisikan informasi apakah antara satu siswa dengan siswa lainnya berteman atau tidak berteman. Hal semacam itu dapat dinyatakan dalam bentuk diagram yang disebut graf. Dalam graf tersebut, seorang siswa dinyatakan sebagai sebuah titik dan hubungan berteman antara dua siswa dinyatakan dengan sebuah sisi yang menghubungkan titik-titik yang mewakili dua siswa tersebut.

Contoh 5.4

Dalam suatu persiapan untuk menghadapi perang, beberapa peleton tentara ditempatkan di beberapa lokasi yang berbeda. Komunikasi antarpeleton dilakukan dengan menggunakan radio telepon yang kemampuannya terbatas pada jarak tertentu.

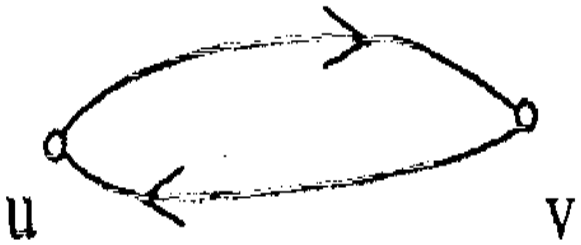
Jika jarak antara dua peleton masih terjangkau, maka komunikasi dapat dilakukan. Keadaan seperti ini dapat dinyatakan dalam suatu model matematika

berbentuk graf. Dalam graf tersebut, titik menyatakan peleton dan sisi antara dua titik menyatakan komunikasi antara dua peleton yang diwakili oleh dua titik tersebut.

Graf Berarah sebagai Model Matematika

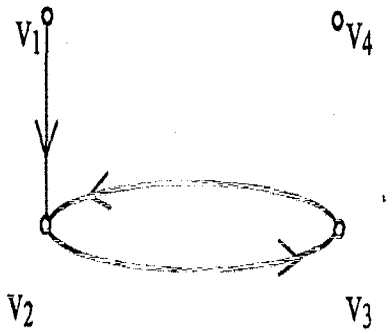
Sebuah graf berarah *D* adalah suatu himpunan hingga yang tidak kosong dengan sebuah relasi R pada V. R adalah relasi yang tidak refleksif. Seperti halnya dalam graf yang sudah dibicarakan di atas, elemen dari V disebut titik. Tiap pasangan terurut dalam R disebut sisi berarah atau arah.

Karena relasi dari sebuah graf berarah *D* tidak perlu simetris, maka apabila (*u*, *v*) merupakan arah D, (*v*, *u*) belum tentu merupakan arah dari *D.* Hal macam ini dapat kita ilustrasikan pada diagram dengan gambar segmen garis atau kurva antara titik u dan v yang memakai tanda panah sebagai tanda arah dari *u* ke v atau dari v ke *u.* Bila dari *u* ke v masing-masing mempunyai arah, maka diagramnya dapat kita buat seperti gambar 5.9 di bawah ini .



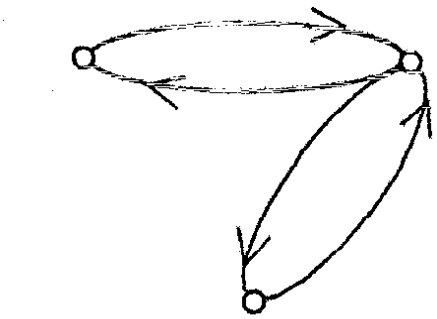
Gambar 5.9. Graf Berarah

Misalkan *Dl* = (V_1,E_1) adalah sebuah graf berarah dengan $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2)\}$. Diagram graf berarah *Di* ditunjukkan oleh Gambar 5.10 di bawah ini.



Gambar 5.10. Graf Berarah

Mungkin juga terjadi bahwa relasi yang mendefmisikan sebuah graf berarah D merupakan sebuah relasi simetris. Graf semacam ini disebut graf berarah simetris. Gambar 5.11 di bawah ini adalah contoh sebuah graf simetris.



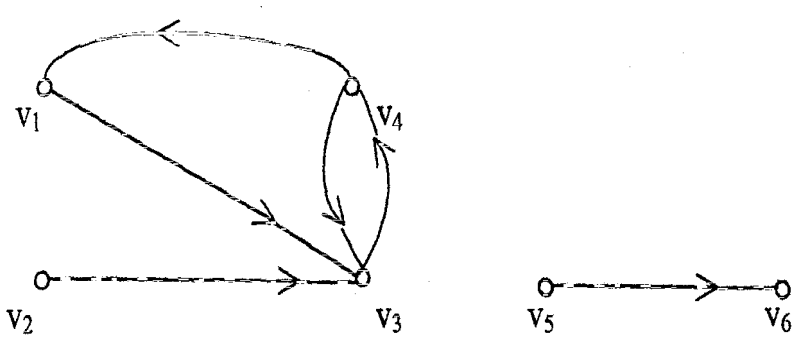
Gambar 5.11. Graf Berarah Simetris

Contoh 5.5

Diketahui sebuah graf *berarah D dengan* himpunan V = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6} dan himpunan arah E = {(v1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_6)} Gambarlah diagram dari graf D.

Solusi:

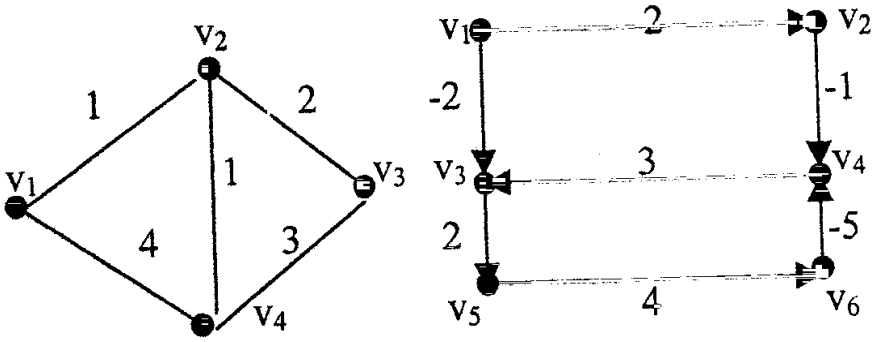
Gambar di bawah ini merupakan diagram dari graf D.



Gambar 5.12. Graf D

Jaringan Kerja sebagai Model Matematika

Sebuah jaringan kerja adalah sebuah graf atau graf berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi atau sisi berarah ke himpunan bilangan real. Jaringan kerja yang merupakan sebuah graf disebut jaringan kerja tidak berarah sedangkan jaringan kerja yang merupakan graf berarah disebut jaringan kerja berarah. Gambar 5.13 di bawah ini merupakan contoh diagram dari dua jenis jaringan kerja tersebut.



Gambar 5.13. Model Graf Jaringan Kerja

Graf bertanda S adalah suatu jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya + l atau -1. Karena tanda positif atau negatif dipasangkan pada tiap sisi dari S, maka dapat dipahami bila tiap sisi dari S disebut sisi positif atau sisi negatif. Sebagai contoh,

jika

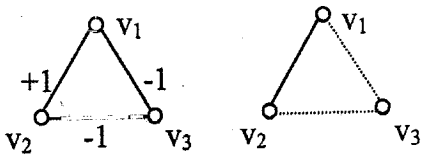
$$V = \{v_1, V_2, V_3\}$$

$$E = \{V_1V_2, V_1V_3, V_2V_3\}$$

dan

$$f = \{V_1V_2, +1), (V_1V_3, -1), \{V_2V_3, -1)\}$$

maka graf bertanda ini dapat dinyatakan dalam dua cara seperti diperlihatkan pada Gambar 5.14 di bawah ini.



Gambar 5.14. Graf Bertanda

Contoh 5.6

Hubungan bertetangga dapat dinyatakan Oalam be ti c ',rat be*x*m&. Dua keluarga yang saling berhubungan baik dapat diwakili oleh sisi positif, dua keluarga yang berhubungan kurang baik dapat dinyatakan dengan sisi negatif dan dua keluarga yang tidak saling berhubungan atau tidak saling kenal dapat dinyatakan dengan tidak ada sisi yang menghubungkan dua titik yang mewakili dua tetangga tersebut.

Jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya bulat positif seringkali digunakan sebagai model matematika. Ada dua cara yang sering digunakan untuk menyatakan jaringan kerja tidak berarah seperti ini. Sebagai contoh, jika

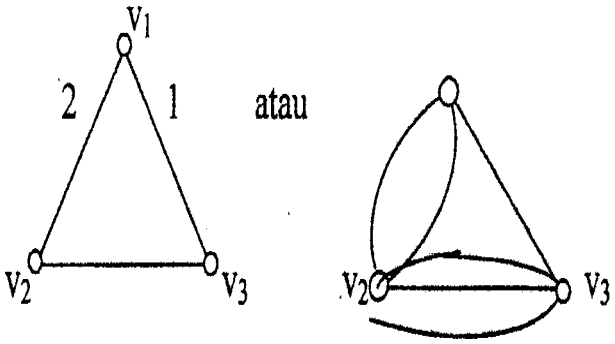
$$V = \{v1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{v1v_2, v1v_3, v_2v_3\}$$

dan

$$f = \{v_1v_2, 2), (v1v_3, 1), (v_2v_3, 3)\}$$

maka jaringan kerjanya dapat dibuat seperti terlihat pada Gambar 5.15 di bawah ini.



Gambar 5.15 Graf bertanda

Jaringan kerja tak berarah yang dinyatakan seperti Gambar 5.15 disebut multigraf. Misalkan *M* adalah sebuah multigraf dengan himpunan sisi E dan fungsi *f*. Jika *uv r = E* dan *f*(*uv*) = *n* (*n* adalah bilangan bulat positif), maka *u* dan v dihubungkan oleh n sisi. Sisi-sisi seperti ini disebut sisi rangkap (multiple edges).

Contoh 5.7

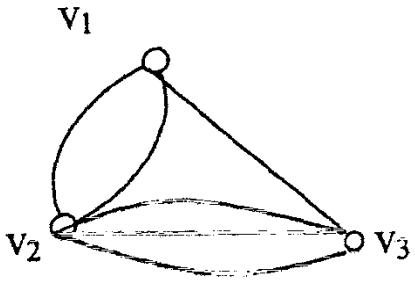
Misalkan v1, v_2 dan v_3 adalah tiga buah kota. Tiap dua kota dihubungkan oleh satu jalan yang jaraknya tidak sama. Jika antara salah satu kota dengan kota lain ditempuh dengan jalan kaki, maka lama perjalanannya adalah sebagai berikut:

antara v1 dan v_2, dua hari;

antara v1 dan v_3, satu hari;

antara v_2 dan v_3, tiga hari.

Situasi seperti ini dapat dinyatakan dalam bentuk graf seperti pada Gambar 5.16.



Gambar 5.16. Graf G

Bila relasi yang mendefinisikan suatu graf memuat (v,v) dengan v e V, maka nama graf tersebut berubah menjadi graf dengan loop, graf berarah dengan

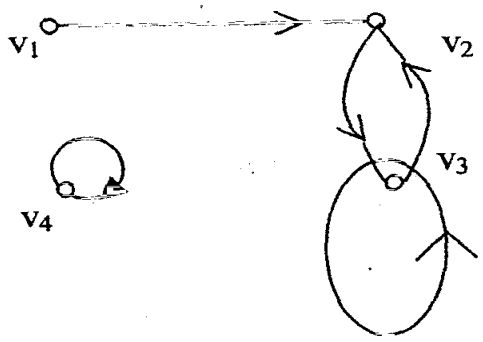
loop, jaringan kerja dengan loop, atau multigraf dengan loop.

Misalkan

V = {v1, v_2, v_3, v_4} dan

E = {(v1,v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_3),(v_4, v_4)).

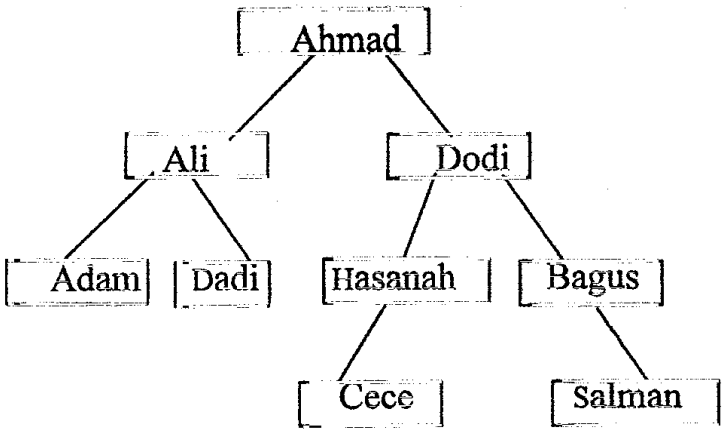
Karena relasi E memuat (v_3, v_3) dan (v_4, v_4), maka graf berarah dengan loop ini dapat digambar seperti di bawah ini.



Gambar 5.17. Graf berarah dengan Loop

Silsilah Keluarga

Silsilah keluarga merupakan contoh masalah sederhana yang bisa dinyatakan dalam bentuk graf. Graf yang terbentuk dari silsilah keluarga biasanya berupa pohon atau tree. Gambar 5.18 di bawah ini adalah contoh silsilah keluarga Ahmad yang dapat dinyatakan dengan graf pohon.

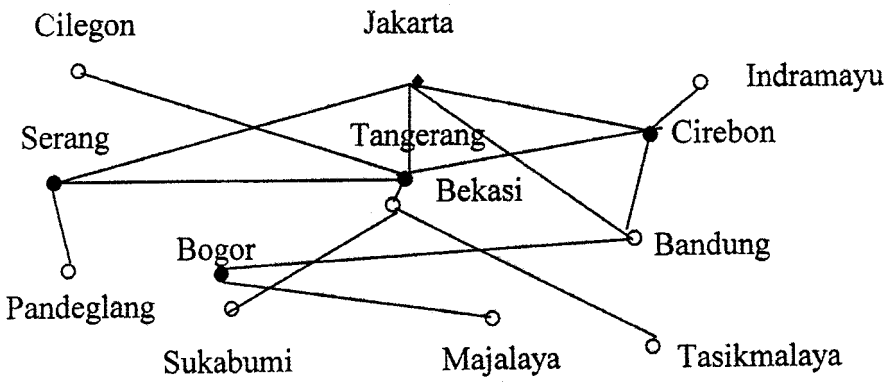


Gambar 5.18. Graf tentang silsilah keluarga

Sistem Komunikasi

Perhatikan Gambar 5.19 di bawah ini. Gambar tersebut merupakan suatu

jaringan komunikasi dengan menggunakan komputer. Pada gambar tersebut, bulat kecil putih menyatakan komputer mikro dan bulatan kecil hitam menyatakan komputer mini.



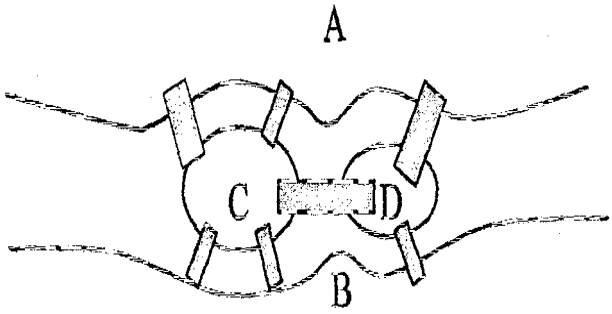
Gambar 5.19. Jaringan Komunikasi di Jawa Barat

Komputer mini digunakan untuk mengubah sinyal dari suatu sirkuit ke sirkuit lainnya serta untuk memproses data. Sedangkan lambang *diamond* menyatakan komputer *mainframe* yang merupakan pusat dari seluruh jaringan. Seseorang yang bermaksud mengakses jaringan tersebut harus melalui salah satu dari komputer mini yang ada dengan menggunakan komputer mikro miliknya. Sistem tersebut dapat digunakan untuk mengirim pesan antarkomputer mikro, atau untuk melakukan proses pengolahan data dengan menggunakan salah satu komputer yang lebih besar. Melalui diagram atau graf di atas dapat diajukan berbagai pertanyaan antara lain sebagai berikut:

1. Dapatkah komputer mikro di Cilegon mengirimkan pesan melalui komputer mikro di Tasikmalaya?
2. Berapa banyak perubahan sinyal diperlukan untuk memperoleh pesan yang dikirim dari Cirebon ke Pandeglang?
3. Jika komputer mini di Jakarta rusak, apakah pesan dari Cirebon ke Pandeglang masih dapat dikirimkan?
4. Jika sirkuit antara Cirebon dan Bandung ada kerusakan, apakah pengiriman pesan dari Indramayu ke Bogor masih bisa dilakukan?

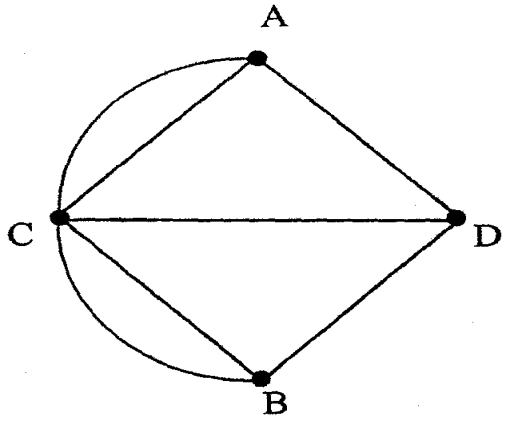
Jaringan Transportasi

Masalah transportasi sebenarnya merupakan hal yang sangat klasik dalam teori graf, karena kelahiran teori graf itu diawali oleh masalah transportasi yang terkenal yaitu Jembatan Konigsberg. Ilustrasi jembatan tersebut dapat dilihat pada Gambar 5.20 di bawah ini.



Gambar 5.20. Ilustrasi Jembantan Konigsberg

Pada gambar tersebut, A, B, C dan D adalah daerah-daerah yang dihubungkan oleh tujuh buah jembatan. Masalahnya, para penduduk Konigsberg tidak mampu menemukan rute yang melalui setiap jembatan tepat satu kali, bergerak dari suatu tempat tertentu dan kembali ke tempat itu lagi.. Situasi seperti ini dapat dinyatakan dalam bentuk yang sederhana berupa graf seperti diperlihatkan pada gambar 5.21 di bawah ini

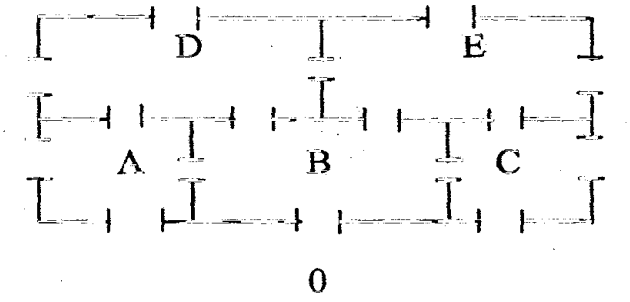


Gambar 5.21. Graf model jembatan Konigsberg

Desain Arsitektur

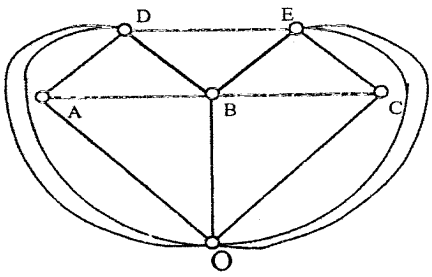
Perhatikan desain sebuah bangunan pada Gambar 5.22 di bawah ini. Pada gambar tersebut, A, B, C, D dan E menyatakan ruangan yang ada dalam bangunan

tersebut, sedangkan 0 menyatakan bagian luar bangunan.



Gambar 5.22. Desain sebuah bangunan

Jika A, B, C, D, E dan 0 dinyatakan sebagai titik-titik dan pinto yang menghubungkan antarruangan atau antarruangan dengan bagian luar dinyatakan sebagai sisi, maka situasi pada gambar di atas dapat dinyatakan sebagai graf seperti pada Gambar 5.23 di bawah ini. Masalah desain arsitektur diantaranya adalah, misalkan kita ingin menciptakan tata letak ruangan demikian sehingga sejumlah ruangan tertentu dapat dimasuki secara langsung dari ruangan-ruangan yang diinginkan.



Gambar 5.23 Graf model desain bangunan gambar 5.22

C. Representasi Graf dan Beberapa Graf Khusus

Graf dalam Notasi Himpunan

Sebuah graf G adalah suatu himpunan V yang tidak kosong yang memenuhi sifat tidak refleksif dan simetris dari suatu relasi *R* pada V. Karena R simetris, maka untuk setiap pasangan terurut (u,v) E *R*, pasangan terurut (v, u) juga elemen R. Himpunan pasangan terurut simetris dalam *R* dinotasikan dengan E. Sebagai contoh, sebuah graf G dapat didefinisikan dengan himpunan

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

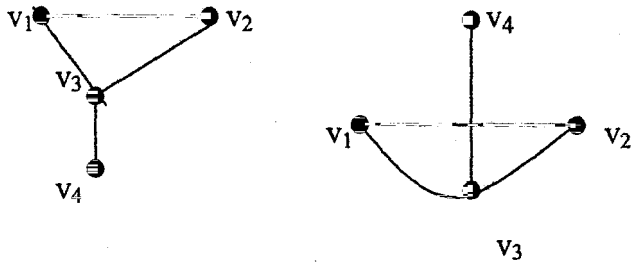
dan relasi

$$R = \{(v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_2,v_1), (v_2,v_3), (v_3,v_1), (v_3,v_2),(v_3,v_4), (v_4,v_3)\}$$

Dalam hal ini,

$$E = \{\{(v_1,v_2), (v_2,v_1), (v_1,v_3), (v_3,v_1), (v_2,v_3), (v_3,v_2),(v_3,v_4), (v_4,v_3)\}\}$$

Berkenaan dengan pembicaraan sebuah graf, seringkali kita menyatakannya dalam bentuk diagram. Dalam diagram seperti ini, titik dinyatakan sebagai sebuah noktah atau lingkaran kecil dan sisi dinyatakan oleh kurva sederhana yang menghubungkan dua titik tertentu. Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh diagram pada Gambar 5.24 berikut ini.



Gambar 5.24. Contoh dua buah graf

Walaupun dua diagram pada Gambar 5.24 di atas kelihatannya berbeda, namun sebenarnya dua diagram tersebut menyatakan graf yang sama.

Dalam sebuah graf G, V merupakan sebuah himpunan titik dan tiap elemen dari disebut titik. Banyaknya titik dalam G disebut orde dari G. Tiap elemen dari E disebut sisi dan E sendiri disebut himpunan sisi dari G. Banyaknya sisi dalam disebut ukuran dari G. Dengan demikian V1 = orde dari G dan $_{I}$ E ! = ukuran dari G.

Jika G merupakan sebuah graf yang didefinisikan dalam bentuk sebuah himpunan titik *V* dan suatu relasi R pada *V*, maka (*u, v*) E R mengakibatkan (v, u) E R. Dengan demikian {(u, v), (v, u)} adalah sebuah sisi dari G. Untuk memudahkan dalam penulisan, sebuah sisi biasanya cukup dinotasikan dengan uv atau vu. Himpunan sisi E menentukan relasi R. Dengan demikian graf G yang diberikan sebagai ilustrasi di atas dapat didefmisikan sebagai himpunan V = {v_1, v_2, v_3, v_4} dan E = {v_1 v_2, v_1 v_3, v_2 v_3, v_3 v_4). Orde dan ukuran dari G adalah 4. Himpunan titik dari G dapat juga dinotasikan dengan *V*(*G*) dan himpunan sisinya

dinotasikan dengan E(G). Penggunaan notasi seperti ini sangat bermanfaat khususnya apabila kita membicarakan dua graf atau lebih.

Himpunan V × V dimungkinkan berupa himpunan kosong, karena relasi R pada memenuhi sifat tidak refleksif dan antisimetris. Hal ini berakibat bahwa himpunan sisi dari graf bisa berupa himpunan kosong atau dengan kata lain sebuah graf mungkin tidak memiliki sisi.

Jika $e = uv \in E(G)$, maka dikatakan bahwa *e* menghubungkan titik *u* dan v. Titik *u* dan v disebut bertetangga dalam G, jika uv $\in$ *E*(*G*). Jika uv $\notin$ E(G), maka *u* dan v merupakan dua titik yang tidak saling bertetangga. Jika $e = uv \in E(G)$, maka *u* dan v masing-masing disebut ujung dari *e*. Jika uv dan uw merupakan dua sisi berbeda dari G ($v \neq w$), maka uv dan uw adalah dua sisi yang bertetangga. Dengan demikian dalam gray G pada Gambar 5.24, v_1 dan v_3 berbatasan, sedangkan v_1 dan v_4 tidak bertetangga. Titik V_3 merupakan ujung dari sisi v_2v_3 sedangkan v_4 bukan ujung dari v_2v_3. Sisi v_1v_3 dan v_3v_4 adalah dua sisi yang bertetangga sedangkan sisi v_1v_2 dan v_3v_4 tidak bertetangga.

Graf dalam Notasi Matriks Insidensi

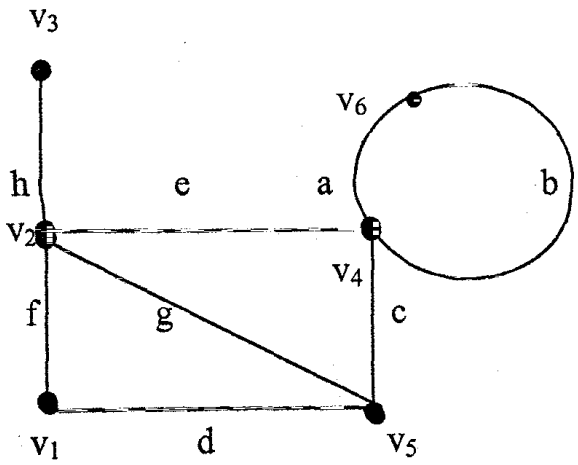
Misalkan G adalah sebuah graf dengan *n* titik, *e sisi dan* tidak memuat loop. Definisikan sebuah matriks $A = (a_u)$ berordo *n x e* dengan *n* menyatakan baris dan e menyatakan kolom sebagai berikut:

Elemen matriks

$a_{ij} = 1$, jika sisi ke j menempel dengan titik v_i dan

$a_{ij} = 0$, jika lainnya.

Matriks semacam ini disebut matriks insidensi. Matriks A dari sebuah graf biasanya dinotasikan dengan A(G). Contoh sebuah graf dengan matriks insidensinya disajikan pada Gambar 5.25 di bawah ini.



Gambar 5.25. Graf G

Matriks insidensinya sebagai berikut.

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sebuah matriks insidensi hanya memuat dua kemungkinan elemen, yaitu 0 dan 1. Matriks seperti ini disebut matriks biner atau matriks (0,1). Misalkan elemen 0 dan 1 tersebut berasal dari lapangan Galois modulo 2. Jika diberikan suatu graf yang direpresentasikan secara geometris, maka matriks insidensinya dapat dengan mudah dibuat. Di lain pihak, bila diberikan sebuah matriks insidensi A(G), kita juga bisa secara mudah menyatakannya secara geometris. Dengan demikian, kedua representasi tersebut sebenarnya memuat informasi yang sama tentang suatu graf tertentu.

Jika sebuah matriks insidensi kita observasi secara lebih teliti, maka akan diperoleh beberapa hat berikut.

1. Karena tiap sisi hanya menempel dengan tepat dua titik, maka tiap kolom dari matriks A hanya memuat tepat dua elemen 1.
2. Banyaknya elemen I pada tiap baris sama dengan derajat dari titik yang

berpadanan.

3. Sebuah baris *yang* semua elemennya 0, menyatakan sebuah titik terisolasi.
4. Sisi-sisi paralel dalam sebuah graf akan menghasilkan kolom-kolom yang sama pada matriks insidensinya.
5. Jika sebuah graf G tidak terhubung dan terdiri atas dua komponen Gl dan G2, maka matriks insidensi $A(G)$ dari graf G tersebut dapat ditulis sebagai berikut

$$A(G) = \begin{bmatrix} A(G_1) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{bmatrix}$$

   Dengan $A(G_1)$ dan $A(G_2)$ masing-masing merupakan matriks insidensi dari 2 komponen G_1 dan G_2. Hal ini didasarkan atas fakta bahwa tidak ada satupun sisi dalam G_1 yang menempel dengan suatu titik di G_2 dan demikian pula sebaliknya. Jelas, bahwa hasil ini berlaku juga untuk setiap graf tidak, terhubung dengan sejumlah komponen tertentu.
6. Permutasi dari dua baris atau kolom dalam sebuah matriks insidensi berpadanan dengan pelabelan kembali titik-titik dan sisi-sisi dari graf yang sama.

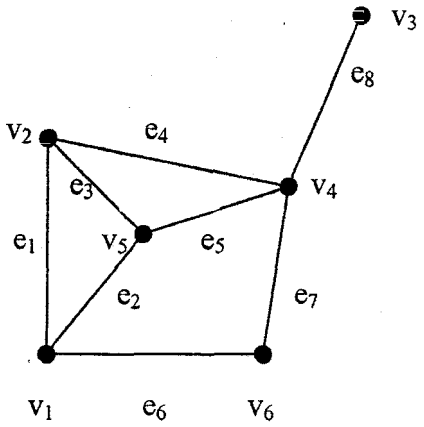
Graf dalam Notasi Matriks Ketetanggaan

Sebuah graf, selain dapat dinyatakan sebagai suatu matriks insidensi, dapat juga dinyatakan dalam bentuk lain yakni matriks ketetanggaan atau matriks keterhubungan.

Misal G adalah graf dengan n titik. Matriks ketetanggaan dari graf G adalah matriks bujursangkar (persegi) berordo n, X(G) (x_{ij}) dengan elemen x_{ij} menyatakan banyaknya sisi yang menghubungkan titik ke-i dan titik ke j.

Dengan definisi ini memungkinkan untuk menyatakan sebuah graf yang memiliki sisi paralel atau loop dengan matriks ketetanggaan.

Contoh sebuah graf yang tidak memiliki sisi paralel dapat dilihat pada Gambar 5.26 di bawah ini dengan matriks ketetanggaannya.

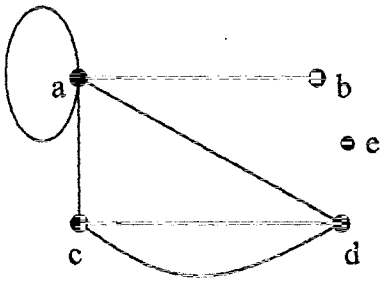


Gambar 5.26. Graf G

Matriks ketetanggaannya:

$$X(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Contoh sebuah graf yang memiliki sisi paralel dan loop dapat dilihat pada Gambar 5.27 di bawah ini dengan matriks ketetanggaannya.



Gambar 5.27. Graf H

Matriks ketetanggaannya:

$$X(H) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bila matriks ketetanggaan *X* dari graf G kita teliti secara seksama, akan diperoleh beberapa hal berikut.

1. Elemen-elemen matriks *X* sepanjang diagonal utama semuanya bernilai 0 jika dan hanya jika graf dari matriks tersebut tidak memuat loop: Sebuah. loop pada titik ke-i berpadanan dengan $x_{ii} = 1$.
2. Menurut definisi matriks ketetanggaan, memungkinkan adanya ketentuan untuk sisisisi paralel. Dengan demikian, matriks ketetanggaan *X* tidak hanya didefinisikan untuk graf yang tidak memuat sisi paralel.
3. Jika graf tidak memuat loop dan sisi paralel, derajat suatu titik sama dengan jumlah atau banyak elemen 1 pada baris atau kolom dari *X*yang bersesuaian.
4. Permutasi baris dan kolom yang bersesuaian mengakibatkan terjadi perubahan pada posisi titik-titiknya. Perlu dicatat bahwa dalam melakukan permutasi, baris dan kolom harus disusun dalam urutan yang sama. Jadi, jika dua baris dalam *X* dipertukarkan, maka kolom yang bersesuaian juga harus dipertukarkan. Dengan demikian dua graf G_l dan G_2 yang tidak memuat sisi paralel adalah isomorfk jika dan hanya jika matriks-matriks ketetanggaannya yakni $X(G_1)$ dan $X(G_2)$ saling berkaitan.
5. Sebuah graf G tidak terhubung dan terdiri atas dua komponen G_1 dan G_2 jika dan hanya jika matriks ketetanggaannya yakni $X(G)$ dapat dipartisikan sebagai

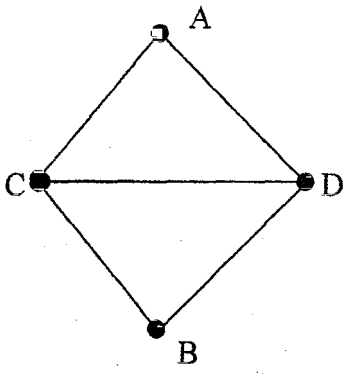
$$X(G) = \begin{bmatrix} X(G_1) & 0 \\ 0 & X(G_2) \end{bmatrix}$$

dengan .*X*(G) adalah matriks ketetanggaan dari komponen G1 dan $X(G2)$ adalah matriks ketetanggaan dari komponen G_2. Jelas bahwa partisi ini mengakibatkan tidak adanya sisi yang menghubungkan suatu titik pada subgraf G_1 dengan titik dalam subgraf G_2.

6. Diberikan sebuah matriks biner *Q* berordo *n.* Maka, selalu bisa dibentuk sebuah graf G dengan *n* titik (dan tidak memuat sisi-sisi paralel sehingga *Q* merupakan matriks ketetanggaan dari G).

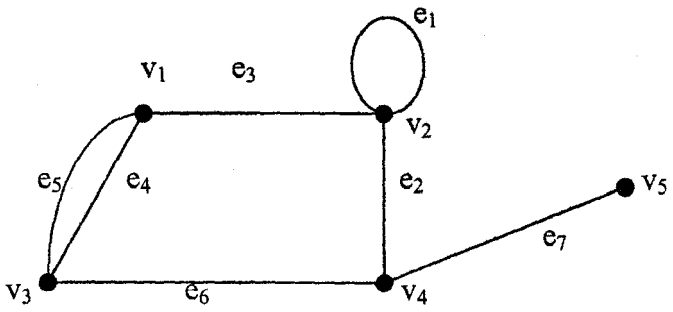
Graf Sederhana

Sebuah graf yang tidak memiliki loop dan tidak memiliki sisi paralel disebut graf sederhana. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 5.28 di bawah ini.



Gambar 5.28. Graf Sederhana

Karena graf tersebut tidak memiliki loop dan tidak memiliki sisi paralel, maka graf tersebut termasuk graf sederhana. Selanjutnya, graf pada Gambar 5.29 di bawah ini tidak termasuk graf sederhana sebab termuat di dalamnya sebuah loop dan dua sisi paralel.

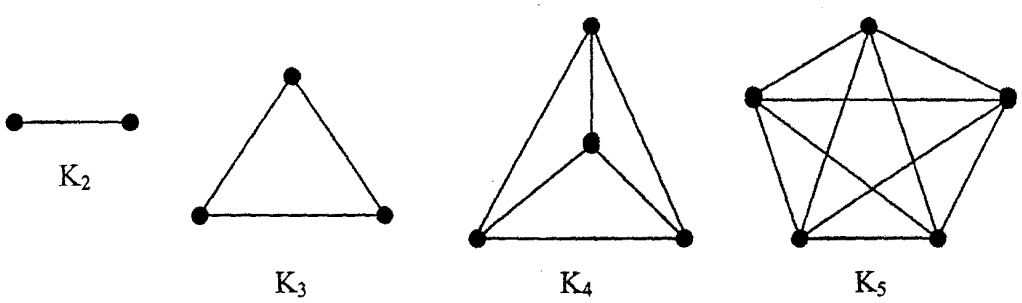


Gambar 5.29 Graf tidak sederhana

Graf Lengkap

Misalkan $G = (V,E)$ adalah sebuah graf sederhana. Jika untuk setiap pasangan titik v_1 dan v_j di G terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya, maka G disebut graf lengkap. Graf lengkap dengan *n* titik dinotasikan dengan K_n. Gambar 5.30 di bawah ini adalah contoh-contoh graf lengkap dengan dua, tiga,

empat dan lima titik.



Gambar 5.30 Contoh Graf Lengkap

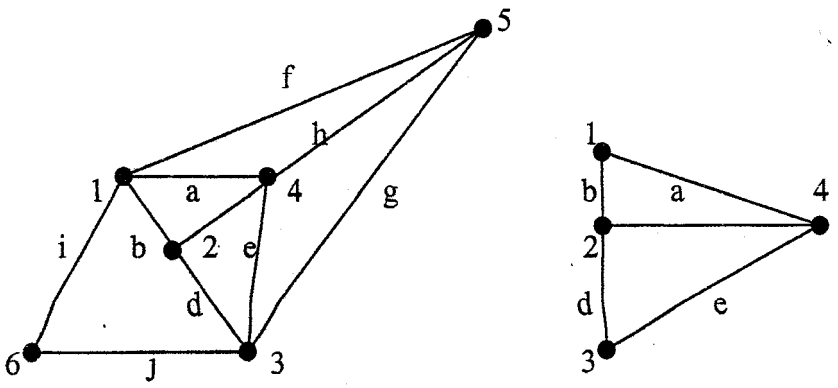
Sebuah graf lengkap sering juga disebut sebagai graf universal. Karena tiap titik dalam graf lengkap selalu dihubungkan dengan titik lain melalui satu sisi, maka derajat tiap titik dalam sebuah graf lengkap G dengan n titik adalah *n-1*. Dengan demikian, banyaknya sisi dalam graf lengkap G adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

Graf Bagian (Subgraf)

Sebuah graf *K* disebut graf bagian (subgraf) dari graf G, dinotasikan $K \subseteq$ G, jika $V(K) \subseteq V(G)$ dan $E(K) \subseteq E(G)$. Sebagai contoh, graf dalam Gambar 5.31, G_2 merupakan graf bagian dari graf G_1. Karena konsep graf bagian dapat dianalogikan dengan konsep himpunan bagian dalam teori himpunan, maka sebuah graf bagian dapat dipandang sebagai bagian dari graf yang lain. Untuk menyatakan bahwa nK merupakan bagian dari graf Gn dapat ditulis $K \subseteq G$.

Jika kita telaah lebih jauh, maka akan diperoleh beberapa sifat berikut ini.

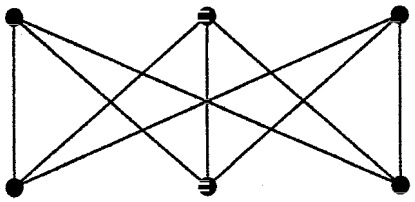
1. Setiap graf merupakan graf bagian dari dirinya sendiri.
2. Graf bagian dari suatu graf bagian G merupakan graf bagian dari G.
3. Sebuah titik dalam graf G merupakan graf bagian dari G.
4. Sebuah sisi dari G bersamaan dengan kedua titik ujungnya juga merupakan graf bagian dari G.



Gambar 5.31. Graf G_2 merupakan graf bagian dari G_1

Graf Teratur

Sebuah graf disebut graf teratur jika semua titiknya berderajat sama. Sebagai contoh, graf G pada Gambar 5.32 di bawah ini merupakan sebuah graf teratur berderajat 3.



Gambar 5.32. Graf Teratur G

Graf Bipartit

Sebuah graf G disebut graf bipartit jika *V*(*G*) (himpunan titik graf G) dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian *X* dan *Y* sedemikian sehingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di *X* dan sebuah titik di *Y*. Kita notasikan (*X*, *Y*) bipartit dari G.

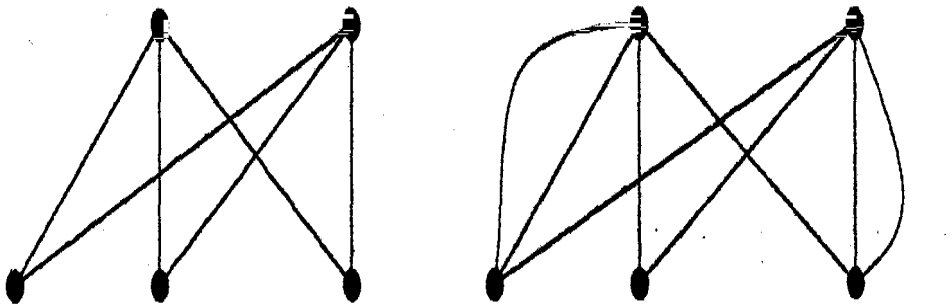
Apabila G sederhana dan bipartit dengan partisi (*X*, Y) sedemikian sehingga setiap titik di *X* berhubungan langsung dengan setiap titik di *Y*, maka G disebut graf bipartit lengkap, dinotasikan dengan $K_{m,n}$ dengan *m* dan *n* adalah banyaknya titik di kedua partisi tersebut.

Gambar 5.32 merupakan contoh graf bipartit. Karena titik-titik pada himpunan yang satu dihubungkan langsung dengan setiap titik pada himpunan yang lainnya,

maka Gambar 5.32 disebut graf bipartit lengkap $K_{3,3}$.

Dalam definisi di atas, pengertian graf bipartit lengkap hanya dibatasi untuk graf sederhana saja, sebab kalau tidak, maka dua graf bipartit yang berbeda dapat mempunyai notasi yang sama.

Perhatikan graf berikut ini.

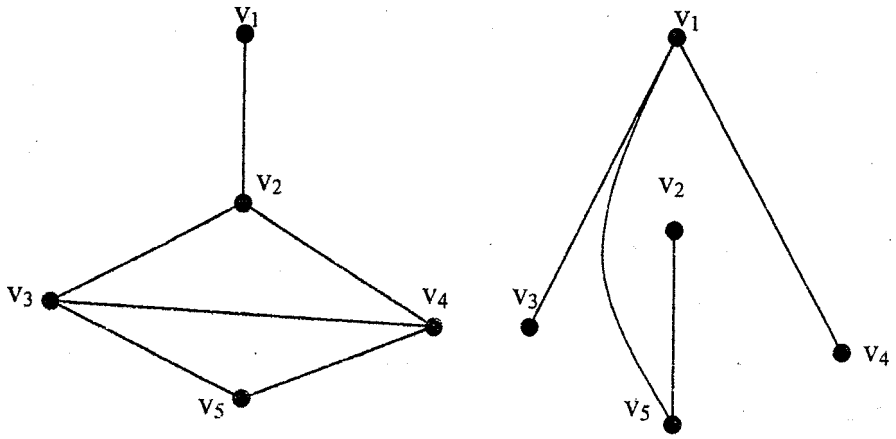


Gambar 5.33. Graf Teratur G

Apakah kedua graf pada gambar 5.33 di atas merupakan graf *K2,3?*

Graf Komplemen

Komplemen dari sebuah graf G, dinotasikan G', adalah sebuah graf dengan himpunan titik yang sama seperti dalam G dan dengan sifat bahwa dua titik di G bertetangga jika dan hanya jika dua titik yang sama dalam G' tidak bertetangga. Gambar,, 5.34 di bawah ini memuat contoh dua graf yang rating berkomplemen.



Gambar 5.34. Graf yang Saling Berkomplemen

Graf Isomorfik

Kita akan menentukan syarat-syarat apakah yang harus dipenuhi agar dua buah graf dapat dikatakan isomorfik.

Sebuah graf G disebut isomorfik dengan graf H jika terdapat pemetaan satu-satu Φ (yang disebut isomorfisme dari V(G) ke *V*(*H*)) sedemikian sehingga Φ mempertahankan ketetanggaan. Jadi, (u,v) $\in$ *E*(*G*) jika dan hanya jika ((D(u), (D(v)) $\in$ E(H). Jika G isomorfik. dengan *H,* kita tulis *G = H.*

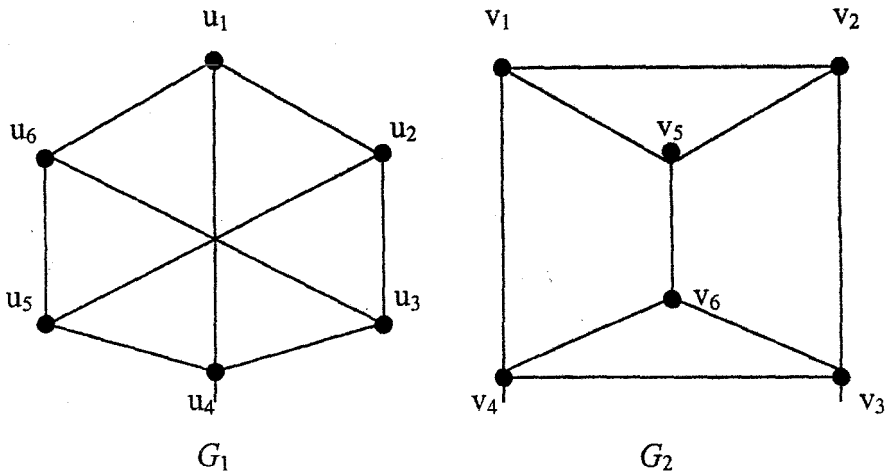
Misalkan G_1 isomorfik dengan G_2; dengan demikian terdapat Φ yang merupakan suatu isomorfisma dari G_1 ke G_2. Defnisikan pemetaan balikan Φ^{-1}: $V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ dengan $\Phi^{-1}(v_2) = v_1$ jika $\Phi(v_1) = v_2$. Jelas bahwa Φ^{-1} merupakan pemetaan satu-satu dan $V(G_2)$ ke $V(G_I)$. Misalkan u_1, $u_2 \in V(G_2)$, $\Phi^{-1}(u_2) = ui$ dan $\Phi^{-1}(v_2) = v_1$. Maka $\Phi(u_1) = u_2$ dan $\Phi(v_1) = v_2$. Dari dua persamaan terakhir ini diperoleh bahwa u_2 dan v_2 adalah dua titik yang bertetangga jika dan hanya jika $\Phi(u_1)$ dan $\Phi(v_1)$ bertetangga. Karena G1 isomorfik dengan G_2, maka $\Phi(u_1)$ dan $\Phi(u_2)$ bertetangga jika dan hanya jika $u_1 = \Phi^{-1}(u_2)$ dan $v_1 = \Phi^{-1}(v_2)$ bertetangga. Dengan demikian u_2 dan v_2 merupakan dua titik yang bertetangga jika dan hanya jika $\Phi^{-1}(u_2)$ dan $\Phi^{-1}(v_2)$ bertetangga. Hal ini menunjukkan bahwa G_2 isomorfik dengan G_1; dengan kata lain relasi isomorfik dan merupakan sebuah relasi simetris.

Selanjutnya kita harus memperlihatkan bahwa relasi tersebut merupakan relasi transitif. Misalkan G1 isomorfik dengan G_2 dan G_2 isomorfik dengan G_3. Dengan demikian terdapat isomorfsma $f : V(G_I) \rightarrow V(G_2)$ dan g : $V(G_2) \rightarrow V(G_3)$.

Pandang fungsi kompisit g o f. Dapat diperlihatkan bahwa g o f merupakan pemetaan satu-satu dari $V(G_1)$ pada $V(G_3)$. Misalkan u_1, $v_1 \in V(G_1)$. Misalkan pula $f(u_1) = u_2$ dan $f(v_1) = v_{2,}$ $g(u_2) = u_3$ dan $g(v_2) = v_3$. Karena *f* dan *g* isomorfisma, maka ui dan v_1 bertetangga jika dan hanya jika $f(u_1) = u_2$ dan $f(v_1) = v_2$ bertetangga , u_2 dan v_2 bertetangga jika dan hanya jika $g(u_2) = u_3$ dan $g(v_2) = v_3$ bertetangga pula. Jadi, u_1 dan v_1 bertetangga jika dan hanya jika $u_3 = (g \ o \ f)(u_1)$ dan $v_3 = (g \ o \ f)(v_1)$ bertetangga. Hal ini menunjukkan bahwa g o f adalah isomorfisma. Dengan demikian G_1 isomorfik dengan G_3.

Jika G_1 dan G_2 graf isomorfk, maka terdapat pemetaan satu-satu (D dari

$V(G_1)$ pada $V(G_2)$. Akibatnya $V(G_1)$ dan $V(G_2)$ memiliki elemen yang sama banyaknya, atau G_1 dan G_2 berorde sama. Misalkan ui dan v, dua titik dari G_1 dan misalkan pula bahwa $d_1(u_i) = u_2$ dan (b(v_1) = v_2. Maka ui dan v_1 bertetangga dalam G_1 jika dan hanya jika u_2 dan v_2 bertetangga dalam G_2. Dengan kata lain u_1v_1 merupakan sisi dari G_1 jika dan hanya jika u_2v_2 merupakan sisi dari G_2. Hal ini menyimpulkan bahwa G_1 dan G_2 berukuran sama. Kita tahu bahwa dua graf yang orde dan ukurannya sama, belum tentu isomorfik. Sebagai contoh perhatikan dua graf pada Gambar 5.35 di bawah ini. Dua graf tersebut masing-masing berorde enam dan ukurannya sembilan, akan tetapi tidak isomorfik.



Gambar 5.35 Graf G_1 dan G_2 tidak isomorfik

Tampak sulit untuk memperlihatkan bahwa graf G_1 dan G_2 pada Gambar 5.35 di atas adalah tidak isomorfik, karena kita harus meneliti setiap pemetaan satu-sate dari V(G_1) pada $V(G_2)$ atau dari $V(G_2)$ pada $V(G_1)$ gagal untuk diperlihatkan sebagai suatu isomorfisma. Namun demikian kita dapat menyederhanakan masalah tersebut dengan cara sebagai berikut. Pandang satu pemetaan satu-satu Φ dari $V(G_1)$ pada $V(G_2)$.

Titik-titik v_1, v_2 *dan* v_5 dari G_2 merupakan tiga titik yang saling bertetangga. Dengan demikian . seharusnya memetakan tiga titik dalam G_1 ke dalam v_1, v_2 dan v_5. Jika Φ suatu isomorfisma, maka dua titik dari G1 adalah bertetangga jika dan hanya jika dua titik bayangan dari G_2 di bawah Φ juga bertetangga. Akibatnya tiga titik dari G_1 yang bayangannya v_1, v_2 *dan* v_5 juga

harus merupakan tiga titik yang saling bertetangga. Akan tetapi G_1 tidak memuat tiga titik yang saling bertetangga. Dengan demikian antara $V(G_1)$ dan $V(G_2)$ tidak ada suatu isomorfisma, atau G_1 tidak isomorfisma dengan G_2.

Teorema 5.2

Jika G_1 dan G_2 merupakan graf isomorfik, maka derajat titik-titik dari G_1 secara tepat merupakan derajat titik-titik dari G_2.

Bukti:

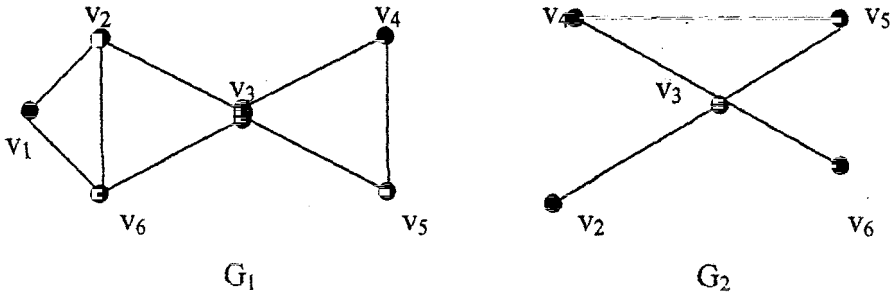
Karena G_1 dan G_2 isomorfik, maka terdapat suatu isomorfisma $\Phi = V(G_1) \rightarrow V(G_2)$. Misalkan u suatu titik sembarang dari G_1 dan misalkan $d(u) = n$. Selanjutnya misalkan bayangan u dalam G_2 adalah v, yaitu $\Phi(u) = v$. Akan ditunjukkan bahwa d(v) = n.

Karena $d(u) = n$, maka G_1 memuat titik-titik u_i, $u_2, \ldots, u_n$ yang bertetangga dengan u. Misalkan $\Phi(u_1) = v$; untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Maka v bertetangga dengan tiap titik v_1, v_2, …, v, karena u merupakan suatu isomorfisma. Titik-titik tersebut yaitu v_1, v_2, $\ldots, v_n$ merupakan titik-titik yang bertetangga dengan v, karena u bertetangga dengan x dalam G_1 jika dan hanya jika v bertetangga dengan $\Phi(x)$ dalam G_2. Jadi $d(v) = n$.

Graf Terhubung

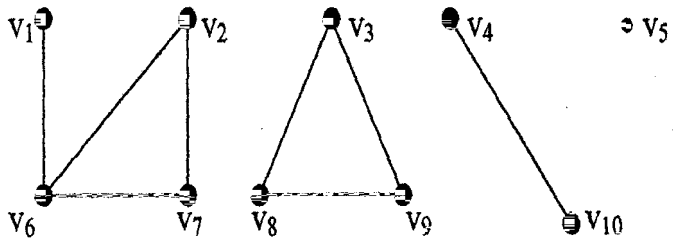
Setiap graf G terdiri atas beberapa graf bagian. Komponen graf adalah jumlah maksimum graf bagian dalam sebuah graf G. Sebuah graf disebut terhubung (*connected*) jika graf tersebut hanya terdiri atas satu bagian (satu komponen). Jika G adalah graf terhubung, kita katakan bahwa komponen dari G adalah 1, dinotasikan $\omega(G) = 1$.

Konsep lintasan dapat digunakan untuk menjelaskan apa yang dinamakan graf terhubung. Dalam graf terhubung G, maka untuk setiap pasang titik sembarang u dan v di G, terdapat suatu lintasan dari titik u menuju titik v. Gambar 5.36 di bawah ini memuat contoh graf G_1 dan graf G_2 yang keduanya merupakan graf terhubung.



Gambar 5.36 Graf Terhubuing G_1 dan G_2

Apabila suatu graf tidak terhubung, maka graf tersebut terdiri atas beberapa komponen yang masing-masing komponennya adalah suatu graf terhubung atau suatu titik terpencil. Sebagai contoh perhatikan graf G pada Gambar 5.37 di bawah ini. Graf G tersebut merupakan graf tidak terhubung yang memiliki 4 buah komponen.



Gambar 5.37 Graf tidak terhubung G

Berapa banyak sisi atau titik yang harus dihapus (dibuang) dari sebuah graf tertentu, agar graf tersebut menjadi graf tak terhubung? Persoalan tersebut dalam teori graf dapat diformulasikan menjadi keterhubungan titik dan keterhubungan sisi.

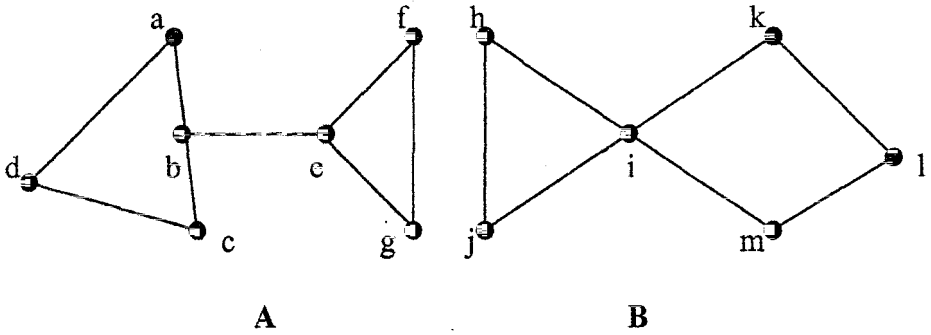
Definisi 5.1

Keterhubungan sisi pada graf G, yang dilambangkan dengan $\lambda(G)$, adalah banyaknya sisi paling sedikit yang dapat dihapus, demikian sehingga graf G menjadi graf tak terhubung. Jika $\lambda(G) \geq k$, maka G disebut graf terhubung dalam k-sisi.

Contoh 5.8

Graf A dapat menjadi tak terhubung dengan menghapus sisi (b, e), sedangkan graf B dapat menjadi tak terhubung dengan menghapus sisi (h, i) dan

sisi (j,i). Graf A disebut graf dengan keterhubungan 1-sisi, sedangkan graf B mempunyai keterhubungan 2-sisi.



Gambar 5.38. Graf A dan Graf B

Definisi 5.2

Sebuah himpunan pemotong (cutset) pada sebuah graf terhubung G adalah sebuah himpunan S yang memuat sisi-sisi dengan sifat-sifat berikut:

a. Penghapusan semua sisi pada S membuat G menjadi tak terhubung;
b. Penghapusan beberapa sisi pada S (tapi tidak semuanya) tidak mengakibatkan G tak terhubung.

Definisi 5.3

Himpunan pemotong dengan hanya satu sisi disebut jembatan (bridge).

Contoh 5.9

Pada Gambar 5.38, himpunan pemotong untuk graf A adalah {(a,d), (c,d)} atau {(a,b), (b,c)}, atau {(b,e)}, atau {(e,f), (e,g)}. Sisi (b,e) merupakan jembatan.

Definisi 5.4

Sebuah titik pemotong adalah sebuah titik tunggal yang penghapusannya mengakibatkan sebuah graf tak terhubung.

Definisi 5.5

Keterhubungan titik k(G) dari graf terhubung G adalah jumlah titik paling sedikit yang penghapusannya mengakibatkan G tak terhubung. Jika kG) ≥ k, maka graf G disebut terhubung dengan k-titik.

Contoh 5.10

Pada Gambar 5.38, titik b atau e dalam graf A atau titik i dalam graf B

merupakan titik-titik pemotong. Graf A dan graf B mempunyai keterhubungan 1.

D. Graf Euleur dan Graf Hamilton

Sebuah sirkit di graf G yang memuat semua sisi G disebut sirkit Euler. Sebuah graf yang memuat sirkit Euler disebut graf Euler. Sebuah siklus (*cycle*) adalah sebuah sirkit/jejak tertutup (*closed trail*) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam suatu siklus disebut panjang dari siklus tersebut. Siklus dengan panjang k disebut panjang k-siklus. Sebuah siklus yang memuat semua titik sebuah graf disebut siklus Hamilton. Graf yang memuat siklus Hamilton disebut graf Hamilton. Jadi graf terhubung G disebut graf Euler jika ada jejak (*trail*) tertutup yang memuat semua sisi pada graf G, sedangkan graf Hamilton adalah sebuah graf terhubung G jika ada sebuah siklus yang memuat setiap titik graf G itu.

Apabila jejak Euleur tidak disyaratkan harus tertutup, maka graf ini disebut graf semi-Euleur.

Untuk memahami lebih jauh mengenai graf Euler dan graf Hamilton ada beberapa teorema yang akan dijelaskan.

Teorema 5.3.

Misalkan G adalah graf terhubung. G adalah graf Euler jika dan hanya jika semua titik pada G mempunyai derajat genap.

Bukti:

Misal G mempunyai suatu sirkit Euler. Dalam menelusuri sirkit Euler tersebut maka setiap titik yang dilalui mengalami 2 hal sebagai berikut. Pertama, titik tersebut dilalui dengan menggunakan sisi tertentu dan kedua, dari titik tersebut melalui titik lain dengan sisi tertentu. Karena sisi G adalah bagian sirkit Euler yang ada, maka jelas setiap titik G mempunyai deraj at genap.

Dengan induksi

- Jika tidak ada sisi maka graf memuat satu titik *X* dan dapat dikatakan sirkit *X*.
- Jika pernyataan sembarang graf dengan semua titiknya berderajat genap, dengan paling banyak *k sisi* mempunyai sirkit Euler benar, maka:
  akan ditunjukkan untuk k + 1 *sisi* mempunyai sirkit Euler.

Misal: G graf dengan k + 1 sisi. Misal sirkitnya C. Jika C memuat semua sisi, maka terbukti. Sebaliknya penghapusan sirkit C dari G sehingga graf G tidak terhubung, tetapi derajat setiap titik genap dan iumlah titik paling banyak k. Menggunakan hipotesis induksi untuk setiap komponen G memuat sirkit C, Cn, n'. Semua sirkit ini terurut dalam sirkit Euler dalam G. Terbukti.

Gambar 5.39 merupakan contoh graf Euler, semi Euler dan bukan graf Euler. Salah satu jejak Euler yang dimulai dari titik A pada Gambar 5.39(a)|alah:

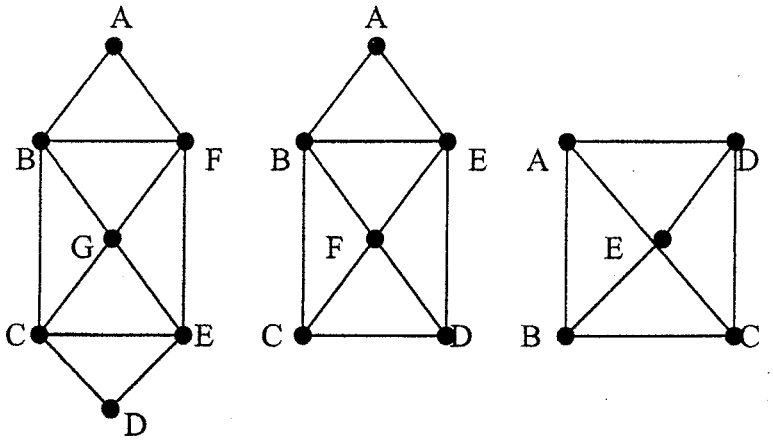
$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow A.$$

Jejak tidak tertutup Euler dengan titik awal C dan titik akhir *D* pada Gambar 5.39(b)|alah:

$$C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow D.$$

Sekarang, bagaimana dengan Gambar 5.39(c)?

Mengapa?



Gambar 5.39 Graf Euler, Semi Euler, dan Bukan Graf Euler

Untuk menciptakan sebuah jejak Euler kita dapat menggunakan alogaritma berikut:

Algoritma untuk menyusun jejak Euler.

Masukan : $G = (V,E)$ adalah graf Euler dengan n simpul dan m sisi.

Keluaran : Jejak Euler bernama *JE* dengan m sisi dan E menjadi himpunan kosong sehingga menjadi graf N_n.

Langkah-1angkah berikut ini akan menghasilkan jejak Euler.

A. Langkah awal: ambil sembarang simpul awal v pada G.

B. Pemilihan sisi-sisi {e_1, e_2, …, e_m,}

1. Pemberian nilai awal

   Lambangkan nomor sisi dengan *k* dan awalilah *k* dengan nilai 1, dicatat sebagai $k \leftarrow 1$.

   Pilih sebuah sisi, namakanlah e_1 yang salah satu simpul ujungnya ialah v.

   Sisihkah e_1 dari himpunan E, dicatat sebagai $E \leftarrow E - (e_1)$.

   Tempatkan e_1 pada *JE*, dicatat sebagai $JE \leftarrow (e_1)$.

2. Ulangi langkah-1angkah berikut:

   Tambahlah nomor sisi dengan 1, dicatat sebagai k $\leftarrow k + 1$

   Ambil sisi selanjutnya, namakanlah e_k yang membentuk jejak dengan sisi e_{k-1}, sedemikian sehingga e_k boleh berupa jembatan apabila tidak ada pilihan lain pada himpunan E yang tersisa.

   Sisihkan *ek* dari himpunan E, dicatat sebagai $E \leftarrow E - \{e_k\}$.

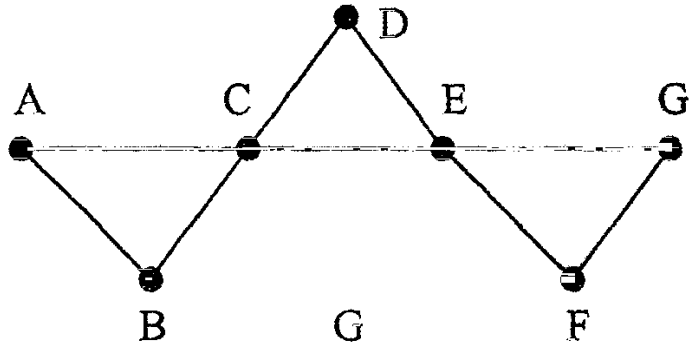
   Tempatkan e_k pada *JE*, dicatat sebagai $JE \leftarrow JE - \{e_k\}$.

   Sampai semua sisi terpakai, yaitu $k = m$ (atau E = Z).

   Maka $JE = \{e_1, e_2, \ldots, e_m,\}$ merupakan jejak Euler.

Contoh 5.11

Susunlah suatu jejak Euler pada graf Euler G di bawah ini:



Gambar 5.40 Graf G

Penyelesaian:

Himpunan titik graf G ialah V = {*A, B, C, D, E, F, G*} dan himpunan sisinya ialah E = {*AB, AC, BC, CD, CE, DE, EF, EG,FG*}. Dalam hal ini sebagai simpul v kita pilih simpul C. Rincian jejak algoritma tersebut ditabelkan dibawah ini; dalam hal ini terjadi 8 kali iterasi, yaitu $k = 2, 3, ..., 9$.

K	sisi e_k	Himpunan E terakhir	Jalur *JE*
1	$E_1 = CD$	*E* - (*CD*)	{*CD*}
2	$E_2 = DE$	*E* - {*CD,DE*}	{*CD,DE*}
3	$E_3 = EF$	*E* - (*CD, DE,EF*)	{*CD,DE,EF*}
4	*E4 = FG*	*E* - (*CD,DE,EFFG*}	{*CD,DE,EFFG*}
5	$E_5 = GE$	(*AB,AC,BC,CE*)	{*CD,DE,.EF,FG,GE*}
6	$E_6 = EC$	{*AB,AC,BC*}	{*CD,DE,EF,FG,GE,EC*}
7	$E_7 = CB$	{*AB,AC*}	{*CD,DE,EF,FG,GE,EC,CB*}
8	$E_8 = BA$	{*AB*}	{*CD, DE, EF, FG, GE, EC, CB, BA*}
9	$E_9 = AC$	{}	(*CD, DE,EF,FG, GE, EC, CB, BA,AC*}

Jadi, j ej ak Euler itu ialah C → *D* → *E* → *F* → *G* → *E* → *C* → *B* → *A* → *C*. Dari jejak ini dapat diamati derajat setiap titik graf, yaitu $d(C) = d(E) = 4$.

Teorema 5.4

Misalkan G adalah graf sederhana dengan n ≥ 3 titik sedemikian sehingga $d(u) + d(v) \geq n$ *untuk setiap pasang titik u dan v yang tidak bertetangga, maka G adalah graf Hamilton.*

Bukti:

Akan ditunjukkan *G* Hamilton.

Misal *G* bukan Hamilton yang memenuhi kondisi (d(u) + $d(v)) \geq n$. Asumsikan bahwa titik di *G* dengan penambahan himpunan sisi {u, v} akan membentuk graf Hamilton, untuk dua titik u, v yang tidak bertetangga. Karena *G* bukan Hamilton dan *G* + {*u,* v} Hamilton, maka untuk setiap siklus Hamilton di *G* + {*u,* v} memuat siklus {u,v}. Sehingga pada *G* terdapat lintasan Hamilton u_i , U2, ..., u_n dengan ut = *n* dan $u,, = v$.

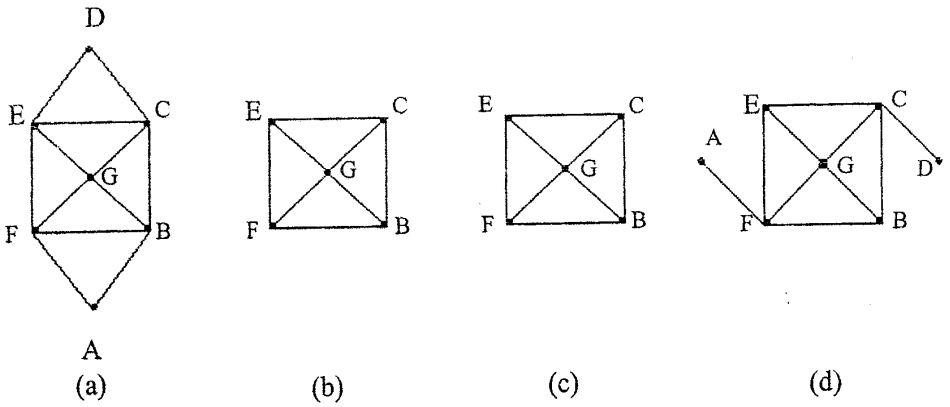
Sekarang jika setiap $2 < k < n$, $\{u_1, u_k\} \in$ E(G) maka $\{u_{k-1}, u_n\} \in E(G)$. Sebab kalau tidak $u_1u_k \ldots u_n\ u_{k-1}, u_{k-2} \ldots u_n$, adalah siklus Hamilton dari G, sehingga untuk setiap titik U_k yang bertetangga dengan titik v, akan terdapat titik lainnya tidak bertetangga dengan v.

Jadi setiap u_l bertetangga ke *r* titik dari $\{u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ maka paling sedikit r titik, jadi jika $d(v_1) > r$, maka $d(u_n) > (n-1) - d(v_1)$ sehingga $d(v1) + d(u_n) > n - 1$. Dengan demikian hipotesis $d(v1) + d(u,) \geq n$ terbukti.

Sekarang amati Gambar 5.41 di bawah ini. Pada contoh sebelumnya telah diperlihatkan bahwa graf pada Gambar 5.41(a) adalah graf Euler. Selain itu graf ini juga merupakan graf Hamilton. ,Sirkit Hamiltonnya adalah dengan jalur $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow A$. Graf pada Gambar 5.41(b) adalah suatu graf Euler dan salah satu jalurnya adalah $B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow B$. Selain itu graf ini juga semi Hamilton dengan lintasannya ialah $B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow F$, tetapi graf ini bukan graf Hamilton. Mengapa?

Mudah diperiksa bahwa graf pada Gambar 5.41(c) bukan graf Euler, tetapi graf Hamilton dengan sirkitnya ialah $B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow B$.

Selanjutnya pada Gambar 5.41(d) bukan graf Euler dan bukan pula graf Hamilton. Jadi dapat disimpulkan bahwa tidak ada ciri-ciri yang menunjukkan adanya hubungan antara graf Hamilton dan graf Euler.



Gambar 5.41 Graf G

E. Uji Kompetensi

I. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat dengan memberi tanda silang (*X*) pada huruf A, B, C, atau D di muka jawaban yang tersedia.

1. Jembatan Konigsberg di daratan Eropa telah menjadi inspirasi kelahiran teori graf. Orang yang pertama kali membahas masalah jembatan tersebut dengan menggunakan teori graf adalah
   A. Hamilton
   B. Konigsberg
   C. Euler
   D. Konig
2. Teori pohon merupakan bagian teori graf yang sangat penting. Orang yang pertama kali mengemukakan teori ini adalah
   A. Kirchoff
   B. Konig
   C. Hamilton
   D. Euler
3. Dua buah sisi yang menempel pada dua titik yang sama disebut sisi …
   A. Seri
   B. Sejajar
   C. Menempel
   D. Bertetangga
4. Sebuah graf yang tidak memuat loop dan sisi paralel disebut graf …
   A. Nol
   B. *Tree*
   C. Sederhana
   D. Terhubung
5. Graf G = (V, E) disebut graf hingga jika …
   A. V dan E merupakan himpunan hingga
   B. V merupakan himpunan hingga
   C. *E* merupakan himpunan hingga
   D. V atau E merupakan himpunan hingga

6. Graf G = (*V, E*) disebut graf tak hingga jika …
   A. V dan E merupakan himpunan hingga
   B. V atau E merupakan himpunan tak hingga
   C. V dan *E* merupakan himpunan tak hingga
   D. V merupakan himpunan kosong
7. Graf *G* = (*V,* E) disebut graf null jika …
   A. V atau E merupakan himpunan kosong
   B. V dan E merupakan himpunan kosong
   C. V merupakan himpunan kosong
   D. E merupakan himpunan kosong
8. Misalkan e_1 dan e_2 adalah dua sisi dari suatu graf G yang tidak paralel dan titik v_1 dalam G. Jika e_1 dan e_2 menempel di v_1, maka kedua sisi itu disebut …
   A. Bertetangga
   B. Menempel
   C. *Sejajar*
   D. Seri
9. Misalkan dua titik v_1 dan v_2 dalam sebuah graf G merupakan titik-titik ujung dari sebuah sisi *e.* Maka kedua titik tersebut merupakan titik-titik yang saling
   A. Seri
   B. Paralel
   C. Bertetangga
   D. Menempel
10. Sebuah titik dalam graf G yang tidak memiliki satupun sisi menempel disebut
    A. Titik pendan
    B. Titik terisolasi
    C. Titik insidensi
    D. Titik bertetangga
11. Berikut adalah contoh permasalahan yang bisa dinyatakan dalam bentuk

graf, KECUALI

A. Masalah hubungan keluarga
B. Masalah hubungan bertetangga
C. Masalah hubungan pertemanan
D. Masalah pengobatan penyakit menular

12. Sebuah graf berarah G adalah suatu himpunan hingga titik yang tidak kosong dan sebuah relasi R yang bersifat …

A. refleksif
B. tidak refleksif
C. antisimetris
D. transitif

13. Karena relasi dari sebuah graf berarah *D* tidak perlu simetris, maka apabila (*u, v*) merupakan arah dari *D*, (v, u) adalah …

A. Pasti merupakan arah dari D
B. Berlawanan arah dengan (u,v)
C. Searah dengan (u, v)
D. Tidak perlu merupakan arah dari D

14. Jaringan kerja yang merupakan graf berarah disebut …

A. jaringan kerja biasa
B. jaringan tidak berarah
C. jaringan kerja berarah
D. jaringan kerja semu

15. Misalkan *M* adalah sebuah multigraf. Jika $uv \in E$ dan $f(uv) = n$, maka *u* dan v dihubungkan oleh sisi sebanyak

A. n
B. $n-1$
C. $n + 1$
D. $n(n-1)$

16. Misalkan $G = (V,E)$ adalah sebuah multigraf. Jika G memuat (uv) dengan v anggota V, maka G disebut …

A. loop

B. multi graf dengan loop
C. multigraf
D. graf berarah

II. Kerjakan setiap soal berikut ini

1. Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang mengupas masalah …
2. G.R. Kirchoff berhasil mengembangkan salah satu cabang/bagian teori graf yang disebut teori …
3. Para ahli teori graf berkeyakinan bahwa yang pertama kali mengembangkan atau membahas masalah empat-warna adalah
4. Pada Gambar 5.1, sebutkan sebuah sisi yang dua titik ujungnya sama.
5. Perhatikan kembali graf pada Gambar 5.1. Apakah graf tersebut memiliki sisi *sejajar?*
6. Perhatikan kembali graf pada Gambar 5.1. Sebutkan sisi-sisi yang menempel dengan titik V3
7. Jika dua buah sisi yang tidak paralel menempel di sebuah titik yang sama, maka kedua sisi itu disebut
8. Banyaknya titik berderajat ganjil dalam sebuah graf selalu
9. Dalam sebuah graf G = (V, *E*), himpunan mana yang dimungkinkan merupakan sebuah himpunan kosong.
10. Suatu sekolah bermaksud membentuk sepuluh macam kepanitiaan yang anggota-anggotanya diambil dari 15 orang siswa terpilih. Banyaknya anggota dari kepanitiaan yang dibentuk tidak ditentukan, artinya, bisa beranggotakan sedikit atau bisa banyak. Kemudian setiap siswa dari yang 15 orang itu dimungkinkan untuk tidak menjadi anggota kepanitiaan atau mungkin pula merangkap sebagai anggota beberapa kepanitiaan. Berikan dua contoh graf yang menggambarkan situasi tersebut.
11. Gambarlah graf berarah dengan himpunan titik V = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi E = $\{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_5, v_6))$.

12. Kota *A* dan kota *B* dihubungkan oleh sebuah jalan umum biasa, sedangkan kota B dan kota C dihubungkan oleh dua jalan: satu jalan umum biasa dan satu lagi jalan bebas hambatan yang dikenakan biaya bagi siapa saja yang melaluinya. Buatlah dua graf yang menggambarkan situasi seperti ini.
13. Silsilah keluarga dapat dibuat atau dinyatakan dalam bentuk sederhana berupa graf. Graf tersebut biasanya berbentuk
14. Sebuah graf yang tidak memiliki loop dan sisi-sisi paralel disebut
15. Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf sederhana. Jika untuk setiap pasangan titik v_i, v_j dalam G terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya maka G disebut
16. Misalkan G = (*V, E*) adalah sebuah graf dan $H = (V_1, Et)$ adalah sebuah graf bagian dari G, maka V1 merupakan himpunan bagian dari dan Et merupakan himpunan bagian dari
17. Jika semua titik dari suatu graf berderajat sama, maka graf tersebut disebut graf
18. Jika sebuah graf memuat titik-titik yang dapat didekomposisi menjadi dua himpunan sedemikian hingga tidak ada sisi-sisi yang menghubung-kan titik-titik pada himpunan yang sama, maka graf tersebut disebut graf
19. Misalkan $G = (V_1, E_l)$ dan $H = (V_2, E2)$. Jika *V1 = V2* dan dua titik dalam G bertetangga jika dan hanya jika dua titik yang sama dalam H tidak bertetangga, maka G disebut dari H.
20. Berikan contoh sebuah graf tidak terhubung terdiri atas empat komponen yang masing-masing merupakan graf lengkap!
21. Diketahui graf dengan lima buah titik. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing titik adalah:
    b) 2, 3, 1, 1, 2
    c) 2, 3, 3, 4, 4
22. Misalkan G adalah sebuah graf dengan 7 titik. Tunjukkan bahwa G bukanlah graf teratur dalam derajat 3.

23. Tunjukkan bahwa jika G adalah sebuah graf sederhana yang mempunyai paling sedikit 2 titik, maka G mempunyai 2 titik atau lebih yang derajatnya sama.

24. Misalkan δ = derajat minimum titik pada graf G,

Δ = derajat maksimum titik pada graf G,

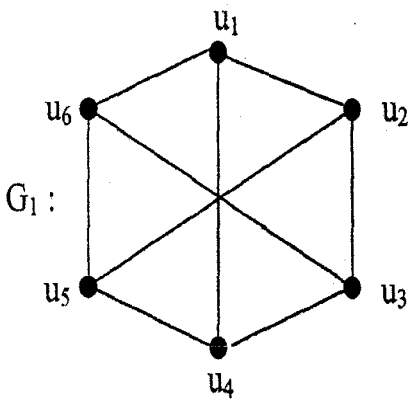
ε = banyaknya sisi dari graf G dan

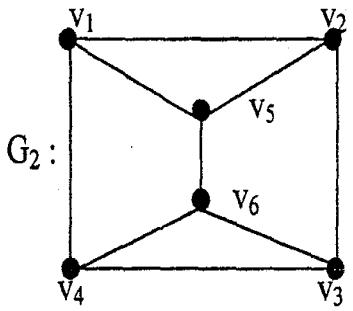
v = banyaknya titik dari graf G.

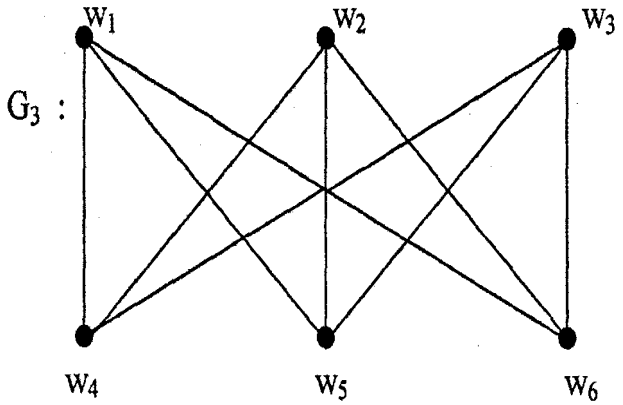
Buktikan bahwa: a) $\varepsilon \leq \binom{v}{2}$

b) Jika G adalah graf sederhana dan $\varepsilon > \binom{v-1}{2}$ maka G adalah graf terhubung.

25. Dari tiga graf di bawah ini, tunjukkan dua graf yang isomorfik.







BAB VI
POHON

A. Definisi

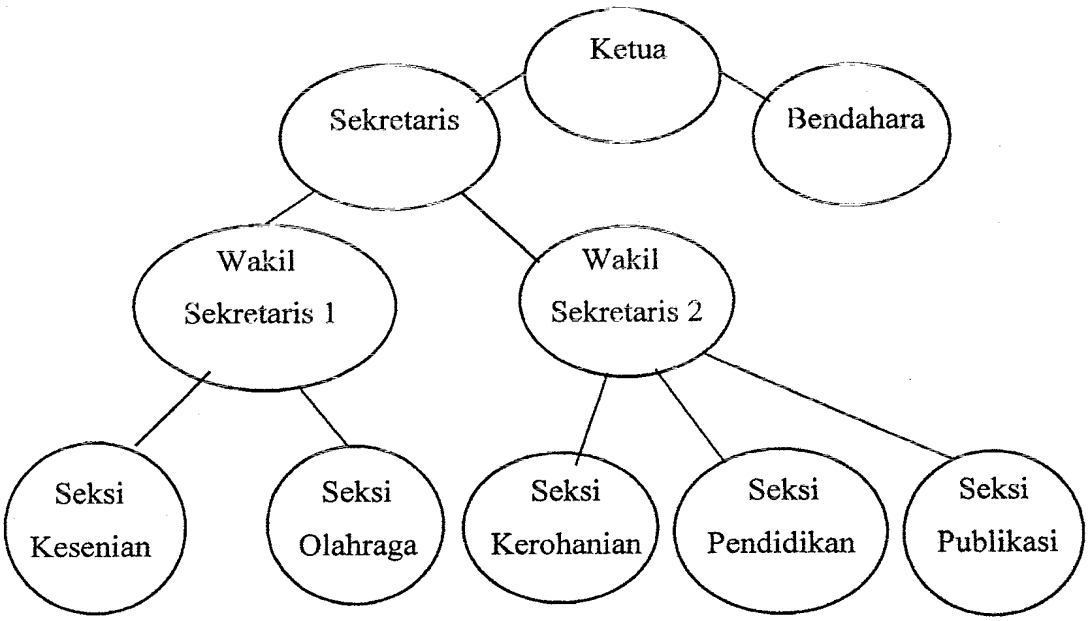
Kirchoff (1824 - 1887) mengembangkan teori pohon untuk diterapkan dalam jaringan listrik. Selanjutnya Arthur Cayley (1821 - 1895) mengembangkan graf jenis ini sewaktu mencacah isomer hidrokarbon jenuh. Sekarang pohon digunakan secara luas dalam linguistik dan ilmu komputer.

Definisi

Pohon ialah graf terhubung yang tidak memiliki siklus.

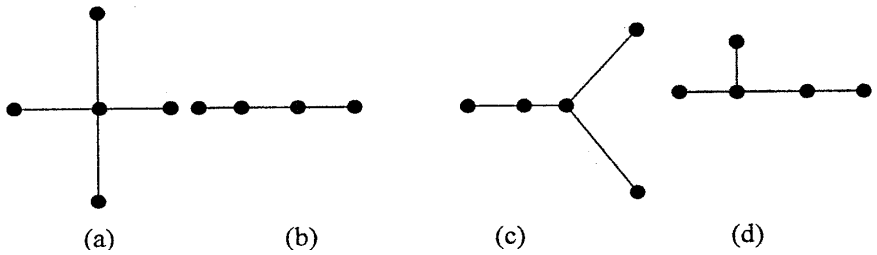
Contoh

Hirarki administrasi organisasi OSIS suatu SMU berbentuk seperti pada Gambar 6.42, merupakan pohon.



Gambar 6.1 Struktur Orgaisasi suatu SMU

Contoh 6.13



Beberapa sifat dasar dari sebuah pohon, akan diuraikan dalam teorema-teorema berikut ini.

Teorema 6.1

Jika T potion, maka untuk setiap dua titik u dan v yang berbeda di T terdapat tepat satu lintasan (*path*) *yang menghubungkan kedua titik tersebut.*

Bukti:

Misalkan *u* dan v adalah dua titik yang berbeda di pohon *T.* Karena *T* graf terhubung, terdapat lintasan yang menghubungkan u dan v. Andaikan P dan P_2 adalah dua lintasan berbeda di *T* yang menghubungkan *u* dan v. Misalkan panjang *P,* kurang dari atau sama dengan panjang P_2.

Telusuri lintasan P, dari *u* ke v. Misalkan *W,* titik pertama di *P dan* P_2, sedemikian hingga titik berikutnya tidak di P_2. Ini terjadi mengingat T graf

sederhana serta P dan P_2 berbeda. Selanjutnya, misalkan titik W_2 adalah titik berikutnya yang terletak di *P dan P*,. Maka sernua sisi dari *W*, ke W_2 membentuk sebuah sirkuit di *T*. Ini bertentangan dengan definisi bahwa pohon T tidak memiliki sirkuit. Jadi pengandaian salah. Dengan demikian teorema terbukti.

Teorema 6.2

Banyaknya titik dari sebuah pohon T sama dengan banyaknya sisi ditambah 1 atau ditulis Jika T pohon, maka $|V(T)| = |E(T)| + 1$.

Bukti:

Kita buktikan teorema di atas dengan induksi pada $|V(T)|$. Jika pohon *T* mempunyai satu titik, jelas banyak sisi *T* adalah nol. Jadi teorema benar untuk pohon *T* dengan satu titik. Asumsikan bahwa pernyataan dalam teorema benar untuk pohon dengan *k* titik, artinya jika pohon *T* mempunyai paling banyak *k* titik, maka $|V(T)| = |E(T)| + 1$.

Akan ditunjukkan bahwa jika pohon *T* mempunyai $k + 1$ titik maka $|V(T)| = |E(T)| + 1$. Misalkan *T* adalah pohon dengan $k + 1$ titik dan λ adalah sebuah sisi T. Maka $T - \lambda$ memiliki tepat dua komponen *T dan* T_2 dan masing-masing komponen adalah pohon dengan titik kurang dari $k + 1$. Sehingga menurut asumsi, $|V(T)| = |E(T)| + 1$; i = 1, 2.

Selanjutnya $|E(T)| = |E(T)| + |E(T_2)| + 1$, sehingga

$$\begin{aligned} |V(T)| &= |V(T_1)| + |V(T_2)| \\ &= |E(T_1)| + 1 + |E(T_2)| + 1 \\ &= (|E(T_1)| + |E(T_2)| + 1) + 1 \\ &= |E(T)| + 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian teorema terbukti.

Teorema 6.3

(a) Bila suatu sisi dihapus dari pohon (*dan titiknya tetap*), *maka diperoleh graf yang tidak terhubung dan karenanya graf itu bukan pohon.*

(b) Bila sebuah sisi ditambahkan pada pohon (*tanpa menambah titik baru*), *diperoleh graf yang memiliki siklus dan karena itu graf tersebut bukan pohon.*

Pembuktiannya dikerjakan sebagai latihan.

Teorema 6.4

Pernyataan berikut ini ekuivalen.

(a) *T adalah pohon.*

(b) *T tidak memiliki siklus dan banyak titiknya lebih satu dari banyak sisinya*

(c) *T terhubung dan banyak titiknya lebih satu dari banyak sisinya.*

(d) *Ada tepat satu lintasan* (*path*) *antara setiap dua titik di T.*

(e) *T terhubung dan penghapusan sembarang sisi pada T menghasilkan graf yang tidak terhubung*

(f) *T tidak memiliki siklus dan penambahan sembarang sisi menghasilkan siklus pada graf itu.*

Pernyataan-pernyataan di atas merupakan sifat-sifat dari sebuah pohon. Setiap pernyataan di atas dapat dibuktikan dengan menggunakan pernyataan sebelumnya.

Bukti:

Jika n = 1, maka semua pernyataan di atas adalah benar. Oleh karena itu dapat dimisalkan bahwa $n \geq 2$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Akan dibuktikan dengan menggunakan induksi terhadap jumlah sisi m. *T* adalah pohon, maka *T* tidak mengandung siklus. Bila sebuah sisi dihapus dari *T*, maka diperoleh sebuah graf yang terdiri dari dua buah pohon T_1 dan T_2, dengan jumlah sisi masing-masing m_1 *dan* m_2 yang lebih kecil dari *m.* Jumlah titiknya masing-masing n_1 *dan* n_2, dengan $n = n, + n_2$. Sesuai dengan asumsi induksi, maka $m_1 = n_1 - 1$ dan $m_2 = n_2 - 1$. Bila sisi yang dihapus dikembalikan, maka akan diperoleh $m = m, + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_1 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1$ atau $(n_1 + n) = m + 1$.

Pembuktian lainnya silakan kerjakan sebagai latihan.

Teorema 6.5

Jika $P = (v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ \ldots\ e_n\ v_n)$ *sebuah lintasan terpanjang di pohon T, maka*

$$d(v_0) = d(v) = 1.$$

Bukti:

Misalkan T adalah sebuah pohon dan $P = (v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ \ldots\ e_n\ v_n)$ lintasan

terpanjang di *T*. Andaikan $d(v_0) \neq 1$, maka $d(v_0) > 1$. Berarti ada paling sedikit dua sisi *T* yang terkait (insiden) dengan v_0. Misalkan $e \neq v_0v_1$ adalah sebuah sisi T yang terkait dengan v_0. Karena *P* lintasan terpanjang di *T* dan *T* sederhana, sisi e harus menghubungkan v_0 dengan sebuah titik lain di *P*, katakan titik v_k, $k \neq 0,1$. Akibatnya (v_0, v_1, v_2, …, v_k, v_p) membentuk siklus di *T*, ini bertentangan dengan kenyataan bahwa *T* sebuah pohon. Dengan kata lain $d(v_0) = 1$. Dengan argumen yang serupa, dapat ditunjukkan $d(v_n) = 1$. Teorema terbukti.

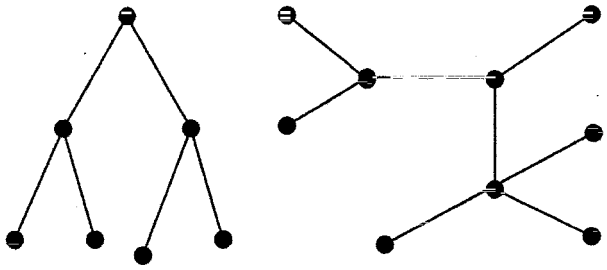
B. Hutan

Definisi 6.7

Hutan (*forest*) *adalah graf tanpa siklus.*

Contoh 6.14

Gambar 6.44 berikut inii menunjukkan hutan dengan dua komponen yang masing-masing adalah pohon.



Gambar 6.2 Hutan dengan dua komponen

Definisi 6.8

Misalkan G adalah sebuah graf. Sebuah pohon di G yang memuat semua titik G disebut pohon pembangun/rentang (*spanning tree*) *dari G.*

Teorema 6.6

Graf G terhubung jika dan hanya Jika G memuat pohon pembangun.

Bukti:

Jika graf G memuat pohon pembangun, jelas G terhubung. Kita buktikan konversi pernyataan ini dengan induksi pada *JE*(*G*)|. Jika *G* terhubung dan |E(G)| = 0, maka $G = K_1$, sehingga jelas G memuat pohon pembangun.

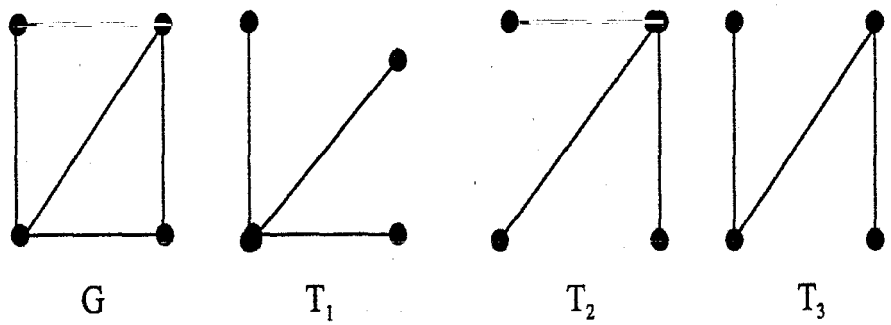
Asumsikan: setiap graf terhubung dengan k sisi memuat pohon pembangun.

Akan ditunjukkan bahwa, jika *G* graf terhubung dengan k + 1 sisi, maka G

memuat pohon pembangun.

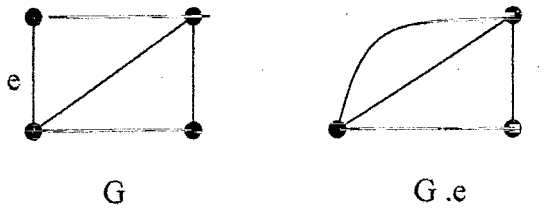
Pandang sebuah graf terhubung *G* dengan k + 1 sisi. Jika G tidak memuat siklus, maka *G* sebuah pohon pembangun. Jika G memuat siklus dan misalkan e adalah sebuah sisi dari siklus di G, maka graf $G_1 = G - e$ terhubung dengan k sisi. Sehingga berdasarkan asumsi, G_1 memuat pohon pembangun. Sebut *T*, pohon pembangun *di* G_1. Jelas, *T* adalah juga pohon pembangun dari *G*. Teorema terbukti.

Sebuah graf terhubung mungkin memuat lebih dari satu pohon pembangun, seperti terlihat pada Gambar 6.3. Graf G memuat pohon pembangun T_1, T_2 *dan* T_3.



Gambar 6.3 Graf G dengan pohon pembangun T_1, T_2 dan T_3

Selanjutnya τ(G) melambangkan banyaknya pohon pembangun di graf G. Adakah cara yang dapat dipakai untuk menentukan banyaknya pohon pembangun di dalam sebuah graf? Jawabnya akan diberikan dalam teorema berikut, namun sebelumnya kita perlu memahami notasi-notasi berikut. Misalkan e adalah sebuah sisi dari graf *G*. Sebuah graf yang diperoleh dari *G* dengan menghapus sisi *e* dari G dan menyatukan kedua titik akhir dari *e*, dilambangkan dengan G. *e* (lihat Gambar-6.46).



Gambar 6.4 Graf G dengan Graf G,e

Perhatikan bahwa banyaknya komponen G sama dengan banyaknya

komponen *G. e*, begitu pula $|E(G.e)| = |E(G)| - 1$ dan $|V(G.e)| = |V(G)| - 1$. Perlu dicatat bahwa jika *T* adalah pohon dan *e sisi* dari *T*, maka *T.e* juga sebuah pohon.

Teorema 6.7

Jika e sebuah sisi pada graf G, maka $|\tau(G.e)| = |\tau(G - e)| + |\tau(G.e|$.

Bukti:

Misalkan e adalah sebuah sisi pada graf *G*. Setiap pohon pembangun *G* yang tidak memuat sisi *e* adalah juga pohon pembangun di *G* - *e*, begitu pula setiap pohon pembangun di *G* - *e* adalah pohon pembangun di G yang tidak memuat e. Sehingga $\tau(G-e)$ sama dengan banyaknya pohon pembangun di *G* yang tidak memuat sisi *e*. Sekarang, setiap pohon pembangun G yang memuat sisi *e*, berkorespondensi dengan sebuah pohon pembangun *G. e*. Sehingga $|\tau(G.e)| = |\tau(G - e)| + |\tau(G.e)|$ terbukti.

Pohon Pembangun Minimum

Sebelum membahas pohon pembangun minimum, kita bahas dahulu pengertian graf berbobot. Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot). Bobot pada tiap sisi dapat menyatakan jarak antara dua buah kota, waktu tempuh antara dua buah kota, biaya perjalanan yang kita tempuh dan sebagainya.

Di dalam graf berbobot, bobot sebuah pohon adalah jumlah bobot sisi-sisi pohon itu. Pohon jumlah minimal di dalam sebuah graf berbobot adalah pohon jumlah yang bobotnya sekecil mungkin. Dengan kata lain, pohon jumlah minimal adalah pohonjumlah sedemikian hingga tidak ada pohon jumlah lain yang memiliki bobot kurang darinya.

Jika G adalah graf berbobot, maka bobot pohon pembangun T dari G didefinisikan sebagai jumlah bobot semua sisi di T. Pohon pembangun yang berbeda mempunyai bobot yang berbeda pula. Di antara semua pohon pembangun di G, pohon pembangun yang berbobot minimum dinamakan pohon pembangun minimum, merupakan pohon pembangun yang paling penting. Pohon pembangun minimum mempunyai terapan yang Was dalam praktek.

Algoritma yang dapat digunakan untuk mendapatkan pohon pembangun

minimum ditemukan oleh Kruskal.

C. Algoritma Kruskal untuk Pohon Pembangun Minimum

Algoritma ini akan mendapatkan pohon pembangun minimum, jika ada, untuk graf berbobot G yang memiliki *n* titik, dengan $n \geq 2$. Dalam algoritma ini, S adalah himpunan titik dan T adalah himpunan sisi.

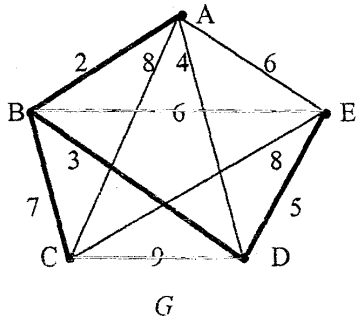
Langkah 1.(mulai). Jika tidak ada sisi, G tidak terhubung dan karena itu tidak memiliki pohon pembangun minimum. Jika tidak demikian, ambil sebuah sisi dengan bobot terkecil (rangkaian dapat diputuskan secara sembarang). Tempatkan sisi itu di T dan titiknya di S.

Langkah 2.(pemeriksaan untuk penyelesaian). Jika T memuat *n-1* sisi, maka berhentilah; sisi-sisi di T dan titik-titik di S membentuk pohon pembangun minimum. Jika tidak demikian, lanjutkan ke langkah 3.

Langkah 3.(ambil sisi berikutnya). Tentukan sisi-sisi berbobot terkecil yang tidak membentuk siklus dengan sembarang sisi yang ada di T. Jika tidak ada sisi seperti itu, G tidak terhubung dan tidak memiliki pohon pembangun minimum. Jika tidak demikian, pilih satu sisi sejenis itu (rangkaian dapat diputus secara sembarang) dan tempatkan sisi itu di *T* dan titiknya di *S.* Kembalilah ke langkah 2.

Contoh 6.15

Gunakan algoritma Kruskal untuk menentukan pohon pembangun dengan bobot minimum dari graf berikut.



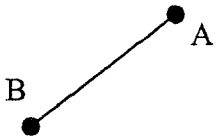
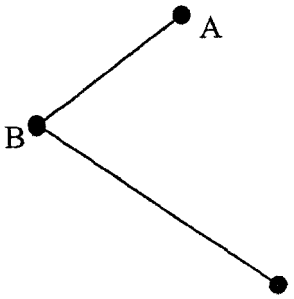
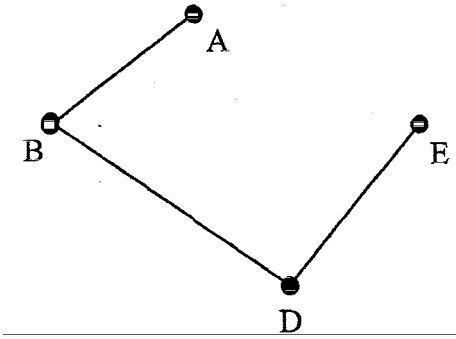
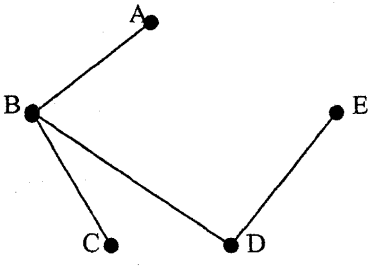
G

Gambar 6.4 Graf Berbobot G

Jawab:

Sisi-sisi graf diurut menaik berdasarkan bobotnya:

Sisi	(A, B)	(B, D)	(A, D)	(D, E)	(A, E)	(B, E)	(B, C)	(A, C)	(C, E)	(C, D)
Bobot	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9

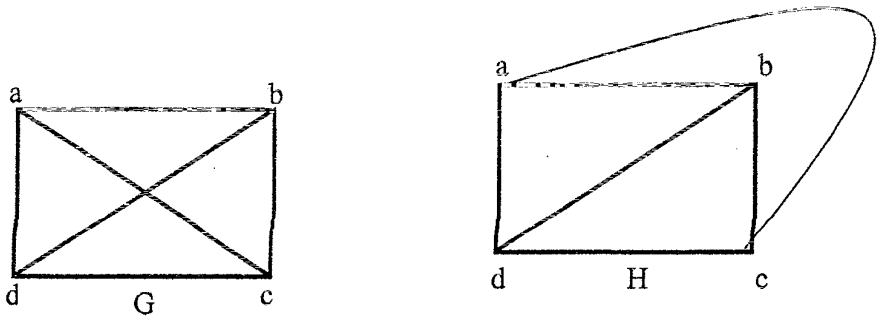
Langkah	Sisi	Bobot	Pohon Pembangun
0			
1	(A, B)	2	
2		3	
3		4	Ditolak, karena membentuk siklus 4
4		5	
5		6	Ditolak, karena membentuk siklus 4
6		6	Ditolak, karena membentuk siklus 4
7		7	

8	8	Ditolak, karena membentuk siklus 4
9	8	Ditolak, karena membentuk siklus 4
10	9	Ditolak, karena membentuk siklus 4

Jadi, apabila algoritma Kruskal dilakukan terhadap graf pada Gambar 6.47, maka hasilnya diperlihatkan dengan sisi yang dicetak tebal. Dengan demikian diperoleh pohon pembangun dengan bobot minimum: 2 + 3 + 5 + 7 = 17.

D. Graf Planar

Sebuah graf G disebut planar, jika G dapat digambar pada bidang datar sedemikian hingga sisi-sisinya tidak ada yang saling nberpotongann, kecuali mungkin pada titik-titik akhir dari sisi-sisi tersebut. Graf planar G yang digambar pada bidang sedernikian hingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan kecuali mungkin pada titik-titik akhir sisi-sisi tersebut disebut graf bidang; atau sering-pula disebut pajangan (*embedding*) G. Graf bidang pasti graf planar, tetapi sebaliknya tidak berlaku. Sebagai contoh, graf G pada Gambar 6.48 di bawah adalah graf planar karena dapat digambar seperti graf *H;* tetapi graf G bukan graf bidang karena sisi-sisi *ac* dan *bd* dari G digambar saling nberpotongann.

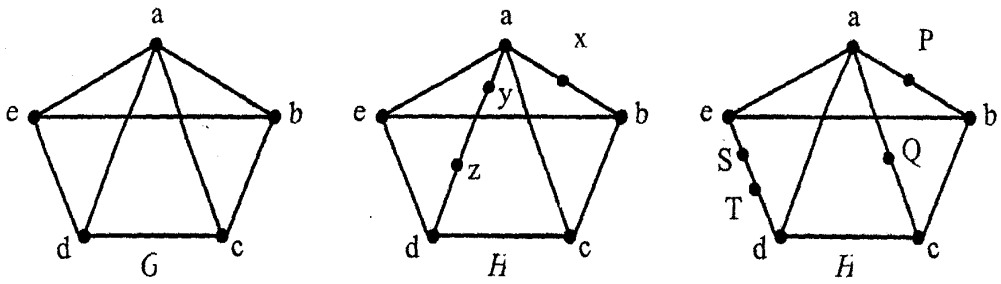


Gambar 6.4 Graf Planar

Perlu dicatat bahwa sebuah graf G planar jika dan hanya jika graf sederhana yang dibentuk dari G dengan menghapus gelang (*loop*) dan mengganti sisi rangkap dengan sebuah sisi adalah graf planar. Sehingga dalam membicarakan graf-graf planar cukup dibatasi pada graf-graf sederhana saja.

Pandang sebuah graf G, Bentuk graf H dari G dengan cara menambah (menyisipkan) beberapa (mungkin nol) titik pada beberapa sisi G. Graf H disebut graf subdivisi dari G. Selanjutnya, jika Hl juga sebuah graf subdivisi dari G, maka

kita sebut *H* dan H_l *homeomorfik* (lihat Gambar 6.5).



Gambar 6.5 Graf G, H, dan H_1

Perhatikan bahwa, selain *H* homeomorfik dengan H_i, *H* juga homeomorfik dengan G. Begitu pula G dengan Hl adalah graf-graf yang homeomorfik. Jelas bahwa, sebuah graf homeomorfik dengan dirinya sendiri. Begitu pula, graf G planar jika dan hanya jika subdivisi G planar.

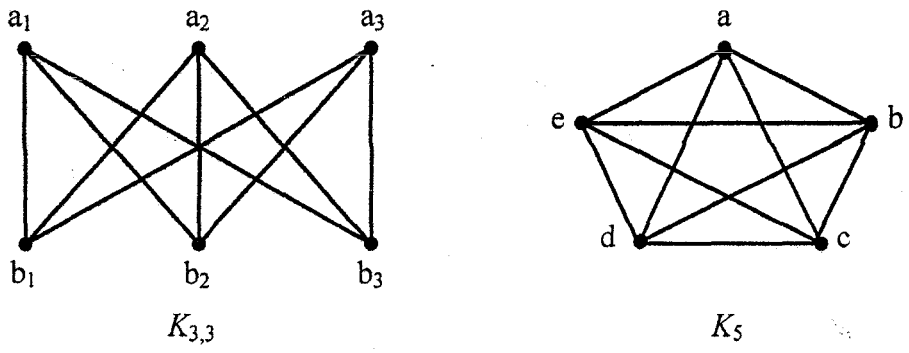
E. Teorema Kuratowski

Kuratowski memberikan karakteristik dari graf-graf yang tidak planar (nonplanar). Kuratowski membuktikan bahwa setiap graf nonplanar pasti memuat sebuah graf bagian yang isomorfik dengan subdivisi dari graf $K_{3,3}$ atau graf K6.

Sebelum membicarakan Teorema Kuratowski lebih lanjut, perlu ditunjukkan bahwa graf.bipartit komplit $K_{3,3}$ dan graf komplit *K5* adalah graf-graf yang tidak planar. Untuk menunjukkan bahwa graf $K_{3,3}$ atau graf Ks tidak planar akan digunakan nTeorema Kurva Jordann yang berbunyi sebagai berikut:

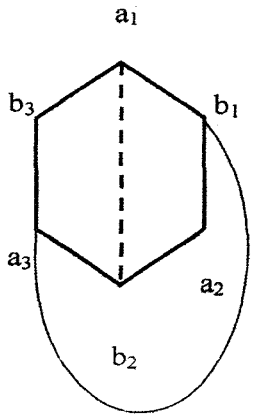
> *Misalkan J adalah sebuah kurva tertutup sederhana pada bidang datar D dan titik x terletak di interior J,- titik y terletak di exterior J Jika dibuat sebuah kurva yang menghubungkan titik x dan y pada bidang D, maka kurva tersebut pasti memotong kurva Jn.*

Kita tidak bermaksud membuktikan teorema ini, namun secara intuitif teorema tersebut mudah dipahami.



Gambar 6.6 Graf G

Pandang graf $K_{3,3}$ pada Gambar 6.7. Graf tersebut memuat siklus C = a_i b_i a_2 b_2 a_3 b3 a_3.



Sisi a_1b_2 dari $K_{3,3}$ dapat digambar ndi dalamn atau ndi luarn siklus C.

Andaikata a_1b_2 digambar ndi dalamn siklus C, maka sisi b_1a_3 dari $K_{3,3}$ harus digambar ndi luarn siklus C (lihat Gambar 6.7).

Gambar 6.7 Gtraf G

Selanjutnya, pada siklus C = as b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_1 pada Gambar 6.51, titik a_2 terletak ndi dalamn siklus C demikian juga titik b_3 terletak ndi dalamn siklus C. Maka, berdasarkan teorema kurva Jordan, sisi b_3a_2 akan memotong sisi alb2 dari $K_{3,3}$. Dengan demikian $K_{3,3}$ adalah graf nonplanar. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa graf K_5 nonplanar. Karena $K_{3,3}$ dan K_5 adalah graf-graf nonplanar memuat graf bagian yang isomorfik dengan subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_6. Kita sajikan temuan Kuratowski ini dalam teorema berikut tanpa membahas buktinya.

Teorema 6.8

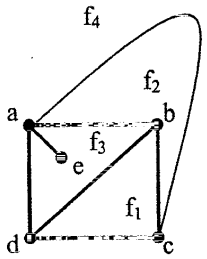
Sebuah graf G nonplanar jika dan hanya jika G memuat sebuah graf bagian yang horneomorfik dengan graf $K_{3,3}$ atau K_6.

Walau secara matematis karakterisasi geometrik ini baik, namun secara

praktis sulit untuk dipakai, sebab sulit menentukan apakah suatu graf tertentu memuat graf bagian yang homeomorfik dengan $K_{3,3}$ atau K_6. Pertanyaan yang muncul: Adakah karakterisasi secara aritmatik untuk menentukan apakah suatu graf itu planar atau nonplanar? Sampai saat ini, jawabnya nbelum adan! Namun usaha-usaha ke arah sana itu sudah dilakukan, seperti akan terlihat pada pembicaraan selanjutnya.

F. Formula Euler

Sebuah graf *G* membagi bidang menjadi beberapa daerah yang masing-masing disebut muka (*face*), yang disimbolkan dengan *f.* Himpunan semua nmukan graf bidang *G* dinotasikan dengan F(G). Banyaknya sisi *G* yang membatasi suatu muka *f* dari G disebut deraj at dari muka *f* dan dinotasikan dengan $d_G(f)$ atau d(*f*).



Misalnya, graf G pada gambar di samping ini mempunyai 4 muka yaitu: f_1, f_2, f_3 dan f_4. Jadi $F(G) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Gambar 6.8 Graf G

Terdapat 3 sisi yang membatasi muka f_1, yaitu *bc, cd* dan *bd;* dengan $d(f_1) = 3$. Begitu pula terdapat 4 sisi yang membatasi muka f3 yaitu *ab, bd, ad* dan *ae;* sehingga $d(f_3) = 4$. Mudah dicek bahwa $d(f_2) = d(f_4) = 3$.

Berikut kita tinjau hubungan antara banyaknya titik, banyaknya sisi dan banyaknya muka dari suatu graf bidang yang terhubung.

Teorema 6.9 (Formula Euler)

Jika G graf bidang terhubung, maka

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Bukti: (Induksi pada $|E(G)|$)

Untuk $|E(G)| = 0$ diperoleh $|V(G)| = 1$ dan $|F(G)| = 1$.

Sehingga

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 - 0 + 1 = 2.$$

Asumsikan pernyataan berikut benar: Jika *G* graf bidang terhubung dengan

$$|E(G)| = k \geq 1, \text{ maka } |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Akan ditunjukkan pernyataan itu juga benar untuk |E(G)| = k + 1.

Misalkan G adalah sebuah graf bidang terhubung dengan k + 1 sisi.

Kita tinjau 2 kasus yaitu *G* memuat siklus dan G tidak memuat siklus.

Kasus 1: G memuat siklus

Misalkan e adalah sebuah sisi di siklus yang terdapat di *G*, maka graf $H = G - e$ merupakan graf bidang terhubung dengan *k* sisi. Sehingga berdasarkan asumsi berlaku $|V(H)| - |E(H)| + |F(H)| = 2$.

Selanjutnya, karena $|V(H)| = |V(G)|$, $|E(H)| = |E(G)| - 1$ *dan*

$|F(H)| = |F(G)| - 1$,

maka
$$\begin{aligned} |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| &= |V(H)| - (|E(H)| + 1) + (|F(H)| + 1) \\ &= |V(H) - |E(H)| + |F(H)| - 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Jadi teorema terbukti untuk kasus ini.

Kasus 2: G tidak memuat siklus

Karena *G* terhubung dan tidak memuat siklus, maka G pohon. Jadi G memuat sebuah titik yang berderajat 1. Misalkan v adalah sebuah titik yang berderajat 1 di *G*, maka graf $T = G - v$ tetap merupakan pohon. Jadi graf bidang terhubung dengan *k* sisi. Sehingga berdasarkan asumsi berlaku

$$|V(Y)| - |E(1)| + |F(7)| = 2$$

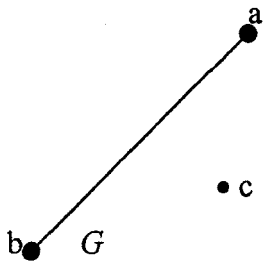
Karena $|V(7)| = |V(G)| - 1$, $|E(7)| = |E(G)| - 1$ dan $|F(7)| = |F(G)|$,

maka

$$\begin{aligned} |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| &= (|V(7)| + 1) - (|E(7)| + 1) + |F(7)| \\ &= |V(7)| - |E(7)| + |F(7)| + 1 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

dengan demikian teorema terbukti.

C A T A T A N : Formula Euler di atas tidak berlaku untuk graf bidang tak terhubung. Misalnya, untuk graf bidang tak terhubung G pada Gambar 6.53 berikut diperoleh



|V(G)| = 3; |E(G)| = 1,dan |F(G)| = 1,
sehingga $|V(G)| - |E(G)| + F(G)| = 3 \neq 2$.

Gambar 6.9 Graf bidang tak terhubung

Dengan menggunakan teorema di atas, kita buktikan teorema berikut.

Teorema 6.10

Jika G graf sederhana planar dengan $|E(G)| > 1$, *maka* $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.

Bukti:

Kita tinjau dua kasus yaitu *G* terhubung atau *G* tidak terhubung.

Kasus 1: G graf terhubung

Misalkan G_l = graf bidang G. Jelas bahwa $|V(G1)| = |V(G)|$ dan $|E(G_1)| = |E(G)|$, karena G_1 isomorfik dengan *G*.

Jika $|E(G_1)| = 2$, maka |V(G)| = 3 (karena G sederhana dan terhubung). Sehingga $|E(G)| = 2 \leq 3 = 3\ |V(G)| - 6$. Jika $|E(G)| \geq 3$, maka $|E(G_1)| > 3$. Karena G_l sederhana dan $|E(G_1)| \geq 3$, $d(f) \geq 3$.

Dengan demikian $\sum_{f \in F(G_1)} d\ (f) \geq 3\ |F(G)|$ ..... (1)

Karena setiap sisi G membatasi paling banyak dua muka,

$$\sum_{f \in F(G_1)} d\ (f) \leq 2\ |E(G_1)| \text{..... (2)}$$

dari (1) dan (2) diperoleh

$$3\ |F(GI)| \leq 2\ |E(G_I)| \text{..... (3)}$$

dari Teorema 6.9 di atas diperoleh

$$|F(G_1)| = 2 + |E(G_1)| - |V(G_1)|$$

sehingga (3) menjadi

$$3\ (2 + |E(G_1)| - |V(G_1)|) < 2\ |E(G_1)|\ ,$$

ekuivalen dengan

$$|E(G_1)f < 3\ |V(G_1)| - 6$$

karena $|E(G_1)| = |E(G)|$ dan $|V(G_I)| = |V(G)|$, maka $|E(G)| < 3\,|V(G)| - 6$.

Jadi teorenna terbukti untuk kasus G graf terhubung. 0

Kasus 2: G graf tak terhubung

Misalkan $G_1, G_2, \ldots, G_k$ adalah komponen-komponen dimana $k \geq 2$. Karena G planar, $V_1,\ 1 \leq i \leq k$ terhubung, G_1 terhubung dan planar. Misalkan dari k komponen tersebut, terdapat k_1 komponen yang masing-masing komponen berisi satu titik (nol sisi) dan k_2 komponen yang masing-masing komponen berisi satu sisi (dua titik) dan k_3 komponen yang masing-masing berisi lebih *dan* satu sisi.

Jelas bahwa

$$k_1 + k_2 + k_3 = k.$$

Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan

$$|E(G_i)| = 0,\ V_i,\ 1 \leq i \leq k,$$

$$|E(G)| = 1, V_i,\ k_1 + 1 \leq i \leq k,$$

$$|E(G)| = 2,\ V_i,\ k_1 + k_2 + 1 \leq i \leq k$$

Selanjutnya kita tinjau dua sub kasus, yaitu $k_3 = 0$ dan $k_3 \geq 1$.

Sub kasus 2.1: $k_3 = 0$

Dalam hal ini, $|V(G)| = k_i + 2\,k_2$ *dan* $|E(G)| = k_2$.

Karena $k_3 = 0$ dan $|E(G)| \geq 2$, maka $k_2 \geq 2$.

Sekarang untuk $k_2 \geq 2$ dan $k_2 \geq 0$ diperoleh

$|E(G)| = k2 \leq 6k_2 - 6 + 3ki = 3(k_1 + 2k_2) - 6 = 3|V(G)| - 6.$

Sub kasus2.2: $k_3 \neq 0$ ($k_3 \geq 1$)

Dalam hal ini kita peroleh

$$|E(G)| = \sum_{i+1}^{k_1} |E(G_i)| + \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} |E(G_1)| + \sum_{i=k_1+k_2+1}^{k} |\ E(G)|$$

$$= 0 + k_2 + \sum_{i=k_1+k_2+1}^{k} |\ E(G_1)|$$

$$= k_2 + 3 \sum_{i=k_1+k_2+1}^{k} |\ V(G_1)|$$

$$= k_2 + 3(|V(G)| - k_i - 2k_2) - 6(k - k_1 - k_2)$$

$$= 3\,|V(G)| - 6k + 3\,k_1 + k_2$$

$$= 3\,|V(G)| - 6 + (6 - 6k + 3\,k_1 + k_2).$$

Karena $k_3 \geq 1$ (dan $k_1 \geq 0,\ k_2 \geq 0$), maka $3\,k_1 + 5\,k_2 + 6\,k_3 \geq 6.$

Karena $k_3 = k - k_1 - k_2$, diperoleh

$$3\,k_1 + 5\,k_2 + 6\,(k - k_1 - k_2) > 6,$$

atau

$$6k - 3k_1 - k_2 > 6.$$

Jadi,

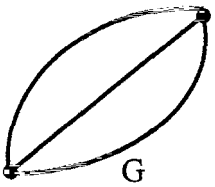
$$|E(G)| < 3\,|V(G)| - 6 + (6k - 3k_1 - k_2) < 3\,|V(G)| - 6.$$

Dengan demikian lengkaplah bukti teorema.

C A T A T A N :

1) Kata nsederhanan dalam teorema tidak boleh ndihilangkann. Sebagai contoh, graf G di bawah ini adalah graf planar dengan *3 sisi,* tetapi

$$|E(G)| = 3 > 0 = 3\,|V(G)| - 6.$$



Gambar 6.10 Graf bidang tak terhubung

2) Syarat n I $E(G)| >$ 1n dalam teorema tidak boleh ndikendorkann. Seperti terlihat pada graf sederhana planar berikut mempunyai tepat satu sisi. Ternyata

$$|E(G)| = 1 > 0 = 3\,|V(G)| - 6.$$

Gambar 6.11 Graf Sederhana Planar

3) Perhatikan graf lengkap dengan 5 titik, *K6.*
   Karena $|E(K_5)| = 10 > 3(5) - 6 = 3\,|V(K5)| - 6$, maka dengan menggunakan teorema, kita simpulkan K_5 nonplanar.
4) Teorema memberikan nsyarat perlun sebuah graf planar, tetapi bukan nsyarat cukupn, karena graf bipartit komplit $K_{3,3}$ memenuhi hubungan $|E(K_{3,3})| = 9 \leq$

12 = 3 $|V(K_{3,3})| - 6$, tetapi ternyata $K_{3,3}$ nonplanar.

Dengan menggunakan Teorema 6.14 di atas, dapat dibuktikan bahwa setiap graf planar sederhana memuat sebuah titik yang berderajat tidak lebih dari 6.

Teorenna 6.15

Jika G graf planar sederhana, maka $\delta(G) \leq 6$.

Bukti

Untuk $|E(G)| = 1$ atau $|E(G)| = 0$, jelas pernyataan di atas benar. Sekarang, misalkan |E(G)| > 1.

Karena G planar dan sederhana, inaka menurut Teorema 6.14 berlaku

$|E(G)| < 3\,|V(G)| - 6$..... (*)

Andaikata δ (G) < 6. Ini berarti $v \in V(G)$, $d(v) \geq 6$. Sehingga menurut nLemma Jabat Tangann

$$|E(G)| = \tfrac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

$$\geq \tfrac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v) 6 = 3\,|V(G)|$$

$> 3\,|V(G)| - 6$, kontradiksi dengan (*).

Jadi pengandaian $\delta(G) > 5$ salah. Dengan demikian haruslah $\delta(G) < 6$.

Teorema terbukti.

G. Pewarnaan Graf

Pada akhir abad ke-19, seorang kepala sekolah memberikan soal yang sangat menantang kepada murid-muridnya. Soal itu sebagai berikut nTunjukkan bahwa semua peta hanya memerlukan empat warna, sehingga negara-negara atau propinsi-propinsi yang bertetangga mendapat warna yang berbedan.

Kepala sekolah tersebut mengatakan hanya mau menerima pembuktian yang tidak lebih dari 30 baris tulisan dan satu halaman diagram. Tampaknya soal ini sederhana sekali, tetapi sebenarnya tidak demikian. Soal ini menjadi masalah besar di dunia matematika, yang kemudian terkenal dengan nama Konjektur

Empat Warna. Baru pada tahun 1976 ditemukan penyelesaian masalah ini. Pada tahun tersebut Kenneth Appel dan Wolfgang Haken, matematikawan dari Universitas Illionis di Amerika Serikat, dapat membuktikan (dengan bantuan komputer) dugaan empat warna dengan menyita waktu sekitar 1200 jam komputer untuk menghasilkan beratus-ratus halaman kertas hasil analisis menyeluruh terhadap sekitar 2000 graf dengan jutaan kemungkinan bentuknya.

Salah satu cara yang digunakan adalah menggunakan graf yang titiknya menunjukkan propinsi dan garis menunjukkan hubungan dua propinsi itu sebagai tetangga.

Konsep-konsep yang dikaji dan diuraikan di dalam pembahasan ini terdiri atas topik-topik yang menyangkut pewarnaan titik, pewarnaan sisi (pewarnaan garis) dan pewarnaan peta.

Pewarnaan Titik Suatu Graf

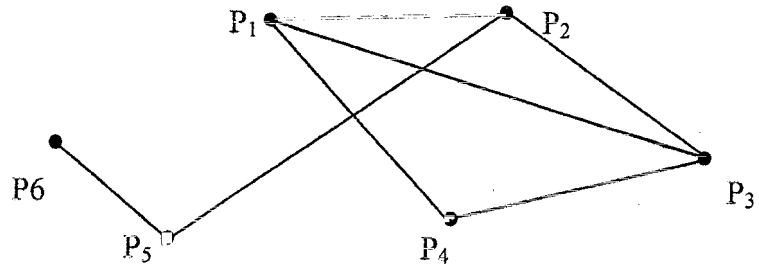
Agar kita lebih memahami pengertian tentang pewarnaan titik suatu graf, perhatikan contoh-contoh serta penj elasannya berikut ini.

Contoh 6.16

Andaikan sebuah pabrik kimia ingin mengirim hasil produksinya dengan menggunakan kereta api. Sesuai dengan aturan yang ada, tidak semua zat kimia ini dapat dimuat dalam satu kereta karena kemungkinan bercampurnya zat itu yang dapat menyebabkan terjadinya reaksi berupa ledakkan yang membahayakan. Bagaimana zat-zat kimia ini dapat dikirim? Dengan maksud meminimumkan biaya, pabrik itu ingin menggunakan gerbong kereta api sesedikit mungkin. Berapa banyaknya gerbong kereta api itu?

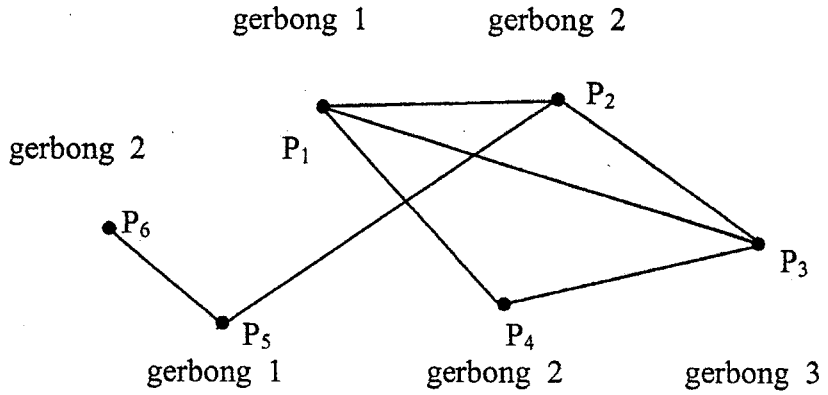
Pada contoh di atas ada objek (hasil zat kimia) dan ada keterhubungan (tidak dapat dimuat dalam satu gerbong kereta) diantara objek itu. Karena hal ini merupakan ide dasar suatu graf, hal biasa untuk menyajikan dengan menggunakan graf. Pada contoh di atas, titik-titiknya adalah zat kimia dan sisinya menghubungkan zat-zat kimia yang tidak dapat diangkut dalam gerbong kereta yang sama.

Sebagai ilustrasi, diasumsikan bahwa pada Contoh; 6.16 ada enam hasil zat kimia *P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 dan* P_6. Andaikan P_1 dengan P_2, P_3, atau P_4 tidak dapat diangkut dengan kereta yang sama; juga P_2 dengan P_3 atau *P_5; P_3* dengan P_4 dan P_5 dengan P_6. Graf yang menyajikan hal ini dapat dilihat pada Gambar 6.56, yang titik-titiknya menunjukkan enam zat kimia dan sisinya menghubungkan pasangan zat kimia yang tidak dapat dimuat dalam gerbong kereta yang sama.



Gambar 6.12 Graf

Berapa banyak minimum gerbong kereta yang diperlukan? Dalam graf pada Gambar 6.56, zat kimia yang disajikan dengan titik berdekatan harus, dimuat dalam gerbong kereta yang tidak sama. Misal zat P_1 dan P_2 berdekatan, gerbong kereta lain diperlukan untuk memuat P_2, katakan gerbong kereta 2. Karena P_3 berdekatan dengan P_1 dan P_2, maka diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_3, katakan gerbong kereta 3. Tetapi tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_4, gerbong kereta 2 dapat digunakan lagi. Demikian pula halnya, tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_5, karena gerbong kereta 1 atau 3 dapat digunakan lagi. Misal dipilih gerbong kereta 1, maka untuk P_6 dipilih gerbong kereta 2 atau 3, katakan gerbong kereta 2. Graf pada Gambar 6.57 menunjukkan bagaimana titik-titik itu diberi nama (label) sehingga zat kimia yang tidak dapat berada bersama dimuat dalam gerbong kereta berbeda. Juga karena *P_1, P_2 dan* P_3 saling berdekatan,, maka paling sedikit harus digunakan tiga gerbong kereta berbeda. Sehingga banyak minimum gerbong kereta yang harus digunakan ada tiga.



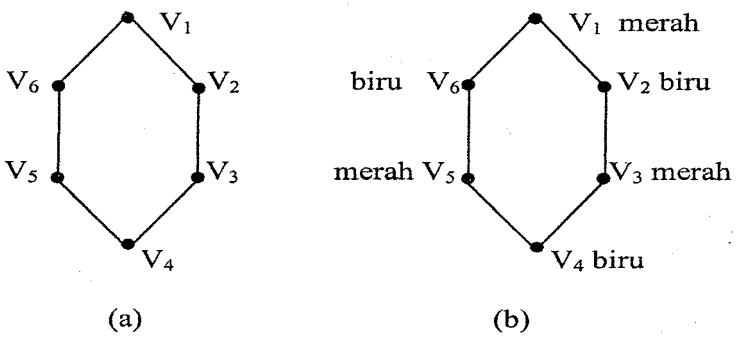
Gambar 6.13 Graf

Apa yang telah dilakukan di atas, adalah memberi label pada titik-titik graf sehingga titik yang berdekatan mendapatkan label yang berbeda. Ide ini sering terjadi dalam teori graf dan label ini disebut warna. Mewarnai sebuah graf berarti memberi warna pada setiap titik graf itu sedemikian hingga titik yang berdekatan mendapat warna berbeda. Menanyakan banyak minimum gerbong kereta yang diperlukan pada Contoh diatas adalah sama seperti menanyakan banyak minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai graf pada Gambar 6.13, dengan warna mewakili gerbong kereta.

Bila suatu graf G dapat diwarna dengan tidak kurang dari n warna, maka G dikatakan memiliki bilangan khromatik (x(G)) n. Jadi graf G pada Gambar 6.56 memiliki bilangan khromatik 3.

Contoh

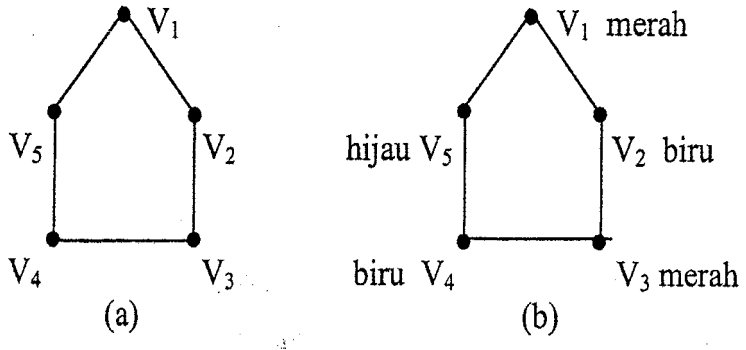
Graf pada Gambar 6.58(a) memiliki bilangan khromatik 2 karena titik V_1, V_3 *dan* V_5 dapat diwarnai dengan satu warna (misalkan merah) dan tiga titik lainnya dengan warna kedua (misalkan biru), seperti yang terlihat pada Gambar 6.14. Secara umum, jika suatu siklus memiliki titik yang banyaknya genap, maka sikius itu dapat diwarnai menggunakan dua warna.



Gambar 6.14 Graf

Contoh

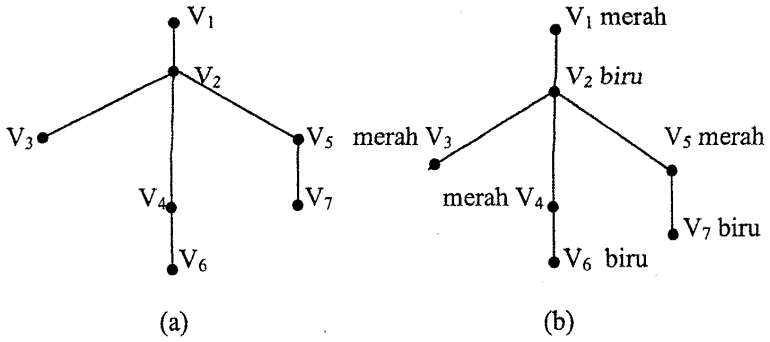
Bila suatu siklus memiliki titik yang banyaknya ganjil, seperti pada Gambar 6.59(a), maka harus digunakan tiga warna. Bila dicoba menggunakan warm itu secara berselang seperti pada Gambar 6.58, warna merah untuk titik V_1 dan V_3 serta wama biru untuk V_2 dan V_4, maka warna merah atau biru tidak dapat digunakan lagi untuk V_6. Penggunaan tiga warna untuk mewamai siklus yang banyak titiknya ganjil diilustrasikan pada Gambar 6.15b.



Gambar 6.15 Graf

Contoh

Graf lengkap K_n dapat diwarnai dengan menggunakan *n* warna. Karena setiap titik saling berdekatan dengan titik lainnya, maka kurang dari n wama tidak cukup untuk mewama graf itu. Jadi K_n memiliki bilangan khromatik *n*.



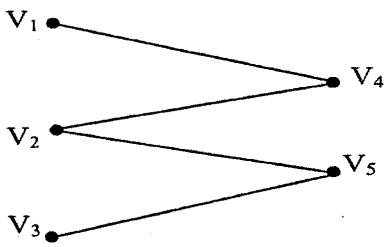
Gambar 6.16 Graf

Contoh

Graf pada Gambar 6.16(a) dapat diwarnai dengan menggunakan dua warna, seperti yang terlihat pada Gambar 6.16(b).

Contoh 6.21

Graf pada Gambar 6.61 memiliki bilangan khromatik 2 karena titik di sebelah kiri dapat diwarnai dengan menggunakan warna pertama dan titik di sebelah kanan dengan menggunakan warna kedua.



Gambar 6.17 Graf

Secara umum, sangat sulit untuk menentukan banyak minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai graf. Salah satunya dengan mendaftar semua cara mewarnai (yang berbeda) titik-titik graf, kemudian memeriksa setiap cara itu untuk menentukan mana yang menggunakan banyak warna minimum. Sayangnya, walaupun titik graf tidak seberapa banyak dan kita menggunakan komputer super, proses ini sangat makan waktu, bahkan'sampai berabad-abad.

Tetapi, ada beberapa cara yang berhasil diperoleh untuk dapat menunjukkan bilangan khromatik suatu graf. Misal, seperti yang terlihat pada Contoh 6.18, siklus yang panjangnya ganjil memiliki bilangan khromatik 3. Jadi setiap graf yang memiliki siklus jenis ini membutuhkan minimum 3 warna. Graf

pada Gambar 6.59 merupakan salah satu contohnya. Bila tidak ada siklus yang panjangnya ganjil pada suatu graf, maka 2 warna sudah cukup.

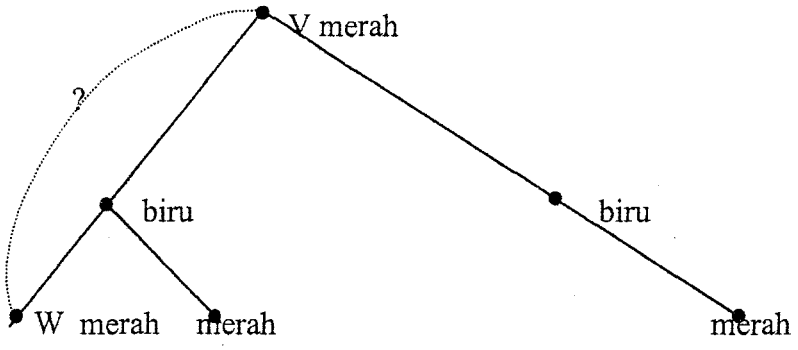
Teorema 6.11

Suatu graf G tidak nienailiki siklus yang panjangnya ganjil, jika dan hanya jika G dapat diwarna dengan 2 warna.

Bukti:

Seperti uraian di atas, bila *G* memiliki siklus yang panjangnya ganjil, maka pewarna G membutuhkan paling sedikit 3 warna.

Sekarang andaikan G tidak memiliki siklus yang panjangnya ganjil. Pilih suatu titik V yang diberi warna merah. Kemudian pada setiap titik yang berdekatan dengan V diberi warna biru. Sekarang, pada titik-titik yang berdekatan dengan titik yang baru diberi warna biru itu, diberi warna merah. Dapatkah salah satu dari titik yang berwarna merah ini, katakan titik W, berdekatan dengan titik V yang juga berwarna merah? Diagram pada Gambar 6.62 mengilustrasikan situasi ini.

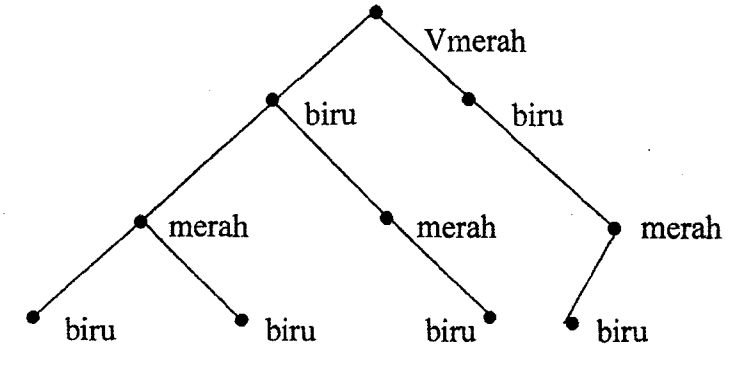


Gambar 6.18 Graf

Terlihat bahwa jika *V* dan *W* berdekatan, maka akan ada siklus yang panjangnya 3. Dengan demikian, setiap titik lain yang baru saja diwarnai merah tidak berdekatan dengan titik yang berwarna merah, karena jika tidak demikian berarti ada siklus yang panjangnya ganjil. Berikutnya, titik yang berdekatan dengan yang baru saja diwarnai merah diberi warna biru. Hal ini diperlihatkan pada gambar 6.18

Kemudian, jika dua titik yang diwamai biru terletak berdekatan, maka ada sikius yang panjangnya ganjil. Kemudian dilanjutkan dengan mewamai merah

titik yang berdekatan dengan titik yang baru diwarnai biru. Seperti sebelumnya, tidak ada titik yang baru diwarnai merah dapat terletak berdekatan dengan titik yang telah berwarna merah. Proses ini diulangi sampai tidak ada titik yang belum mendapat warna terletak berdekatan dengan titik yang telah diwarna.

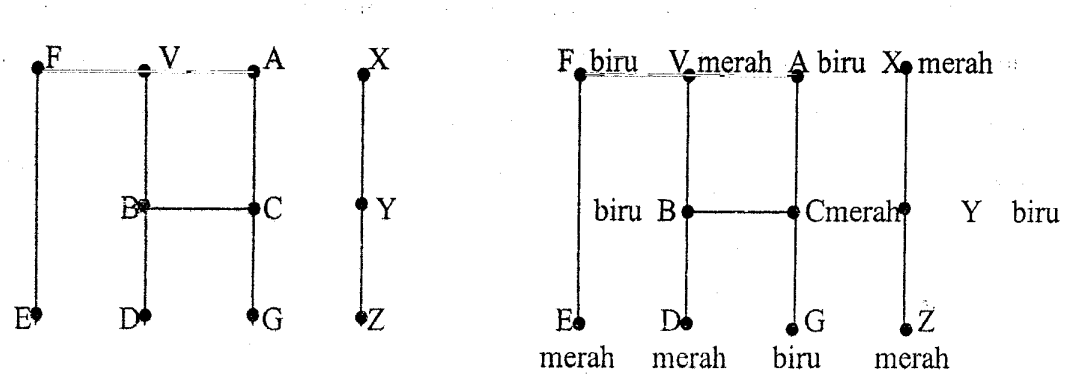


Gambar 6.19 Graf

Jika grafnya tidak terhubung, maka akan ada titik yang tidak berdekatan dengan titik yang telah berwarna, sehingga belum mendapat warna. Untuk titik-titik seperti itu, proses di atas diulang lagi dengan menggunakan warna merah dan biru. Akhirnya semua titik dapat diwarnai dengan warna merah dan biru.

Contoh

Pada graf dalam Gambar 6.20(a), proses pewamaan di atas dimulai dengan memilih titik *V* dan memarnainya dengan warna merah. Karena *F, B dan A* terletak berdekatan dengan V, maka warna biru diberikan pada titik itu. Titik yang belum mendapat warna dan terletak berdekatan dengan titik biru itu adalah *C, D dan* E, sehingga diberi warna merah. Akhirnya, titik G adalah titik yang belum diwarnai dan terletak berdekatan dengan titik merah, sehingga diwarnai biru. Sekarang, *X* adalah titik belum diwarnai yang terletak tidak berdekatan dengan titik yang berwarna, sehingga *X* diberi warna merah. Kemudian *Y* diberi warna biru, serta akhirnya *Y* diberi warna merah. Lihat Gambar 6.64(b).



a b

Gambar 6.20 Graf

Teorema berikut ini memberikan batas atas pada banyak warna yang diperlukan untuk mewarnai sebuah graf.

Teorema 6.12

Jika G graf sederhana dengan derajat maksimum d(G), maka

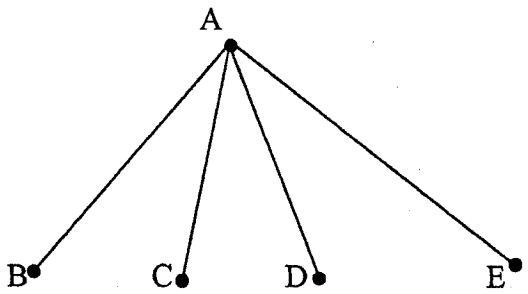
$\chi(G) - \Delta(G) + 1$.

Bukti:

Misalkan k adalah derajat maksimum titik dari G. Akan ditunjukkan bahwa G dapat diwarnai dengan menggunakan $k + l$ warna $C_0, \ldots, C_k$. Mula-mula titik *V* dipilih dan diberi warna C_0. Kemudian, beberapa titik W lain dipilih. Karena paling banyak ada *k* titik yang berdekatan dengan *W* dan ada paling sedikit $k + l$ warna *yang* tersedia, maka paling sedikit ada satu warna (dapat lebih banyak) yang belum digunakan untuk mewarnai titik yang berdekatan dengan W. Pilih warna itu. Proses ini dapat dilanjutkan sampai semua titik dari G mendapat warna. 0

Contoh 6.23

Proses yang digambarkan pada Teorema 6.12 dapat menggunakan lebih banyak warna daripada yang sebenarnya diperlukan. Graf pada Gambar 6.65 memiliki titik berderajat 4, yang merupakan derajat maksimumnya, sehingga dengan Teorema 6.12 di atas, graf itu dapat diwarnai dengan menggunakan 4 + 1 = 5 warna. Tetapi, dengan menggunakan prosedur yang digambarkan pada Teorema 6.11, graf itu dapat diwarnai dengan menggunakan 2 warna.



Gambar 6.21 Graf

Berikut ini akan diuraikan algoritma, yang ditemukan Welsh dan Powell, untuk pewarnaan titik-titik dari suatu graf.

H. Algoritma Welsh dan Powell

Algoritma ini memberikan cara mewarnai sebuah graf dengan memberi label titik-titiknya sesuai dengan derajatnya.

Langkah 1 (melabel titik dengan derajatnya). Label titik v_1, v_2, …, v_n. sedemikian hingga $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$.

Langkah 2 (warnai titik pertama dari titik-titik yang belum berwarna, yang berdekatan dengan titik itu). Berikan wama yang belum digunakan, pada titik pertama yang belum berwarna pada daftar titik itu.

Lakukan hal itu pada semua titik dalam daftar secara terurut.

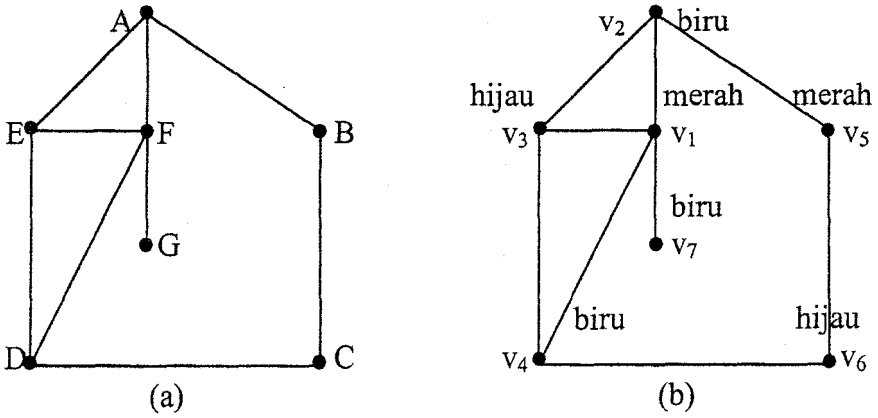
Berikan warna baru ini pada setiap titik yang tidak berdekatan dengan setiap titik lain yang telah diwarnai ini.

Langkah 3 Jika terdapat titik yang belum berwarna, maka kembalilah ke langkah 2.

Langkah 4 (selesai). Pewarnaan graf telah dilakukan.

Contoh 6.24

Untuk graf pada Gambar 6.66(a), titik F memiliki derajat terbesar, yaitu 4 sehingga *F* diberi label v1. Titik *A, D dan* E berderajat 3 sehingga diberi label v_2, v_3 *dan* v_4 secara random. Demikian pula titik B dan C yang berderajat 2 diberi label v_5 dan v_6. Titik G yang merupakan satu-satunya titik yang tersisa, diberi v_7. Hal ini diperlihatkan pada Gambar 6.66(b).



Gambar 6.22 Graf

Penyajian dalam bentuk daftar berdekatan sangat mudah digunakan dengan algoritma Welsh dan Powell ini. Untuk graf pada Gambar 6.65(b), penyajian daftar berdekatannya adalah sebagai berikut.

$v_1 : v_2, v_3, v_4, v_7$

$v_2 : v_1, v_3, v_5$

$v_3 : v_1, v_2, v_4$

$v_4 : v_1, v_3, v_6$

$v_5 : v_2, v_6$

$v_6 : v_4, v_5$

$v_7 : v_1$

Pada Aggoritma Welsh dan Powell ini titik belum berwama pertama dalam daftar adalah v_1 yang diberi warna merah. Kemudian dicari titik berikut yang tidak berdekatan dengan v_1 pada daftar, yaitu titik dibawah v_1 yang tidak mengikuti v_1. Diperoleh titik v_5, yang diberi warna merah. Dilanjutkan dengan melihat bagian bawah daftar untuk mencari titik berikutnya yang tidak berdekatan dengan v_1 maupun v_6. Karena titik seperti itu tidak ada, maka kembali dilihat bagian atas daftar dan ditentukan lagi titik belum berwarna yang pertama, yaitu v_2, yang diberi warna biru. Kemudian, titik belum berwarna berikutnya ditentukan yang tidak berdekatan dengan v_2. Diperoleh titik v_4 dan diberi warna biru. Cara ini dilanjutkan lagi dan diperoleh titik v_7 yang belum berwarna dan tidak berdekatan

dengan v_2 maupun v_4. Sehingga V_7 diwarna biru, bagian atas daftar dilihat kembali dan ditentukan titik belum berwarna berikutnya, yaitu v_3, yang diberi warna hijau. Karena v_6 belum diwarnai dan tidak berdekatan dengan v_3, maka diberi warna hijau. Dengan demikian maka graf pada Gambar 6.66(b) dapat diwarnai dengan tiga warna.

Penyajian daftar berdekatan membuat algoritma Welsh dan Powell mudah digunakan, karena titiknya dapat ditandai ketika diwarnai, sehingga tinggal memperhatikan titik belum berwarna sisanya dalam proses pewarnaan itu.

Pewarnaan Peta dan Pewarnaan Sisi

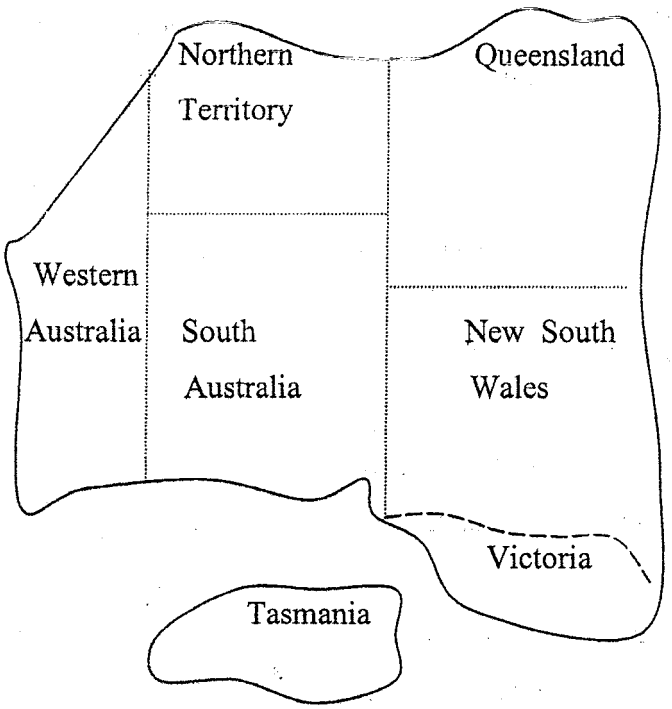
Pewarnaan Peta

Sebuah atlas akan sangat mudah dipahami kalau masing-masing daerah saling berbatasan mempunyai warna yang berlainan. Suatu masalah yang menarik di sini ialah menentukan banyaknya minimum warna yang harus disediakan agar tujuan tersebut terwujud, misalnya untuk mawama peta negara tetangga kita Australia seperti diperlihatkan pada pada Gambar 6.67. Pewarnaan peta sama dengan pewarnaan titiktitik graf dari gambar peta tersebut sedemikian hingga tidak ada dua titik berdekatan yang mendapat warna sama.

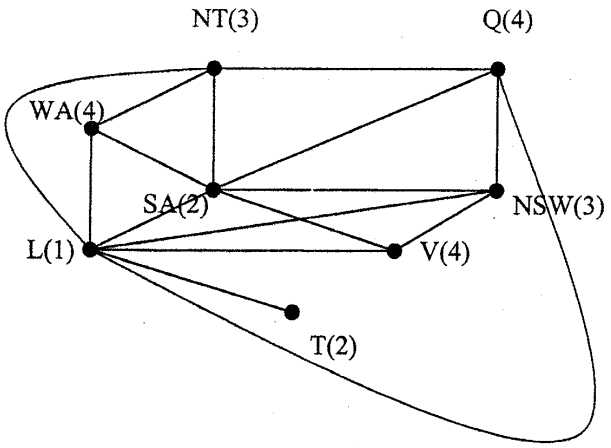
Dalam hal ini negara-negara bagiannya dan lautan yang mengelilinginya diwakili oleh titik-titik. Selanjutnya pasangan titik yang mewakili daerah-daerah yang saling berbatasan dihubungkan dengan sebuah sisi, sehingga model grafnya seperti tampak pada Gambar 6.68. Oleh karena itu derajat suatu titik mencerminkan banyaknya perbatasan yang mengelilingi daerah yang diwakili titik itu. Jadi rumusan persoalan grafnya ialah mewarnai semua titik graf sedemikian hingga titik-titik yang terhubungkan oleh sisi mempunyai wama berbeda satu sama lain.

Jadi dapat disimpulkan bahwa langkah-1angkah yang dilakukan dalam pemodelan dengan graf ialah menentukan:

1. Objek apa yang akan dikonversikan sebagai titik graf?
2. Hubungan apa yang dicerminkan oleh sisi graf? Pasangan titik apa saja yang harus dihubungkan oleh sisi?
3. Merumuskan masalah nyata dalam bahasa teori graf.



Gambar 6.23 Graf

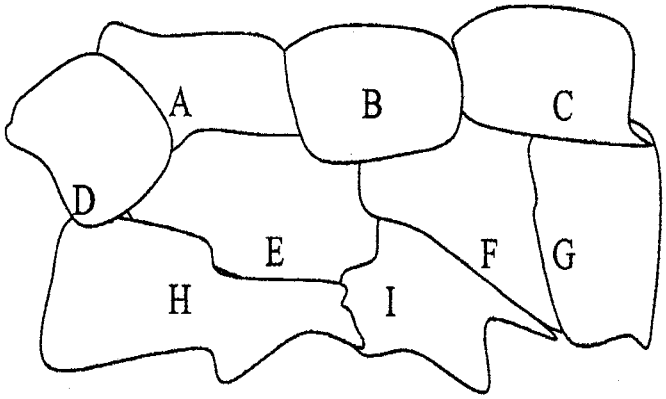


Gambar 6.23 Graf

Angka-angka pada Gambar 6.68 menyatakan kemungkinan penempatan warna dan masih ada pula kemungkinan penempatannya yang lain. Dari graf tersebut tampak bahwa dengan empat macam warna kita telah mampu membuat peta Australia sedemikian hingga dua negara bagian yang saling berbatasan dapat dibedakan dengan jelas.

Contoh 6.25

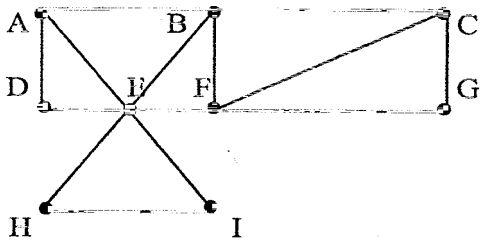
Wamai peta pada Gambar 6.69, kemudian tentukan bilangan khromatiknya.



Gambar 6.24 Graf

Jawab:

Peta pada Gambar 6.24 dapat dilukiskan dalam bentuk graf seperti pada Gambar 6.25 berikut ini.



Gambar 6.25 Graf

(1) Pengurutan derajat titik

Titik	E	F	B	A	C	I	D	G	H
Derajat Titik	6	5	4	3	3	3	3	2	3

(2) Pewarnaan Titik

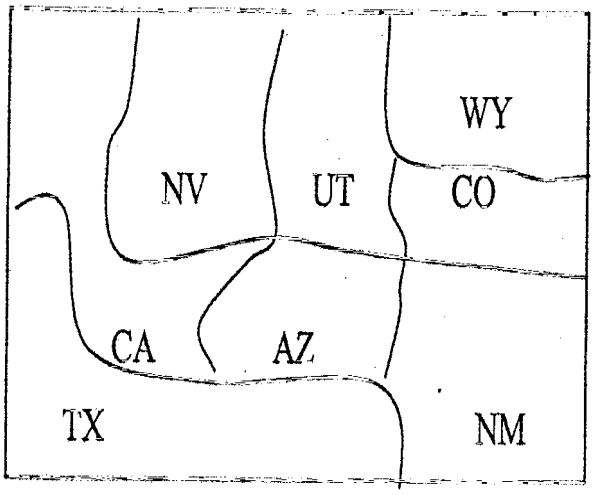
Pertama tandailah titik E dengan angka 1. Telusuri daftar titik tadi dan amati gambar grafnya, ternyata titik C adalah titik pertama yang tidak berdekatan dengan *E;* berilah tanda 1. Tampak bahwa titik-titik lainnya berdekatan dengan *E atau C.* Kembali ke daftar titik, tandai titik F dengan angka 2 dan juga titik-titik A dan H, karena tidak berdekatan dengan F. Penelusuran ketiga kalinya terhadap daftar titik akan menandai titik *B* dengan angka 3; lalu tandai pula titik *I, D* dan G dengan angka 3. Dengan demikian bilangan

khromatik graf tersebut adalah 3. Langkahlangkah tersebut dapat dirangkum dalam bentuk tabel berikut:

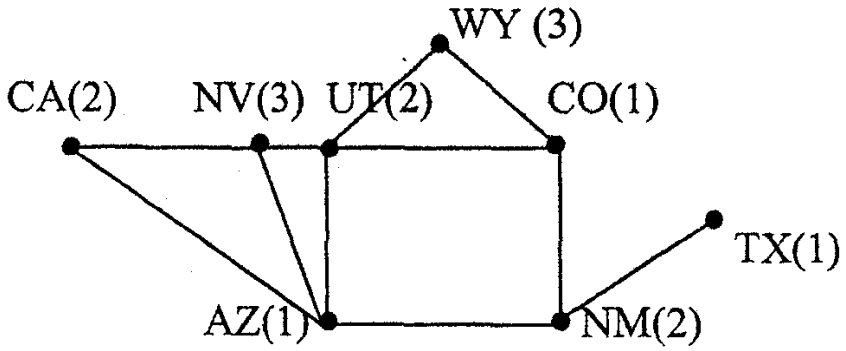
Titik	Warna		
	Tahap 1	Tahap 2	Tahap 3
E	1		
F		2	
B			3
A		2	
C	1		
I			3
D			3
G			3
H		2	

Contoh

Gambar 6.26(a) merupakan bagian dari peta Amerika Serikat. Grafnya beserta warna (label) diperlihatkan pada Gambar 6.26(b) dengan menggunakan algoritma Welsh dan Powell.



Gambar 6.26(a)



Gambar 6.26(b)

Berikut ini tabel yang menunjukkan hubungan antara titik, derajat titik dan warna.

Titik	AZ	UT	NV	CO	NM	CA	WY	T*X*
Derajat Titik	4	4	3	3	3	2	2	1
Wama	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)	(3)	(1)

Dengan demikian, peta pada Gambar 6.71 (a) dapat diwarnai dengan 3 warna.

I. Pewarnaan Sisi

Pewarnaan sisi atau pewamaan garis pada suatu graf adalah penentuan wama sisi-sisi suatu graf sehingga setiap sisi yang berdekatan mendapatkan warna yang berbeda. Ukuran keterwamaan suatu graf didefinisikan sama dengan ukuran keterwarnaan titik, yaitu mengacu kepada banyaknya warna yang memungkinkan sehingga setiap sisi yang berdekatan mendapat wama yang berbeda.

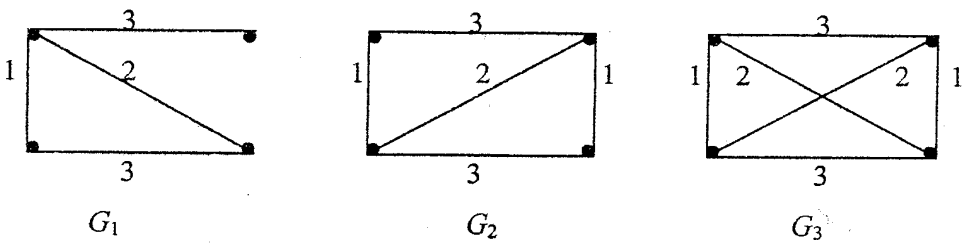
Jumlah warna minimal yang dapat digunakan untuk mewamai sisi-sisi dalam suatu graf G disebut indeks khromatik G dinotasikan e(G).

Teorema 6.13

Jika G adalah graf sederhana yang derajat maksimum titiknya adalah m, maka indeks khromatiknya $\chi'(G)$ *adalah*

$$m \leq \chi'(G) \leq m + 1.$$

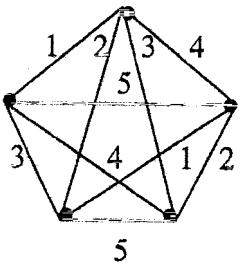
Contoh 6.27



G_1 G_2 G_3

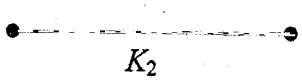
Derajat maksimum titik dari graf G_1, G_2 *dan* G3 adalah 3. Indeks khromatiknya adalah 3.

Contoh 6.28

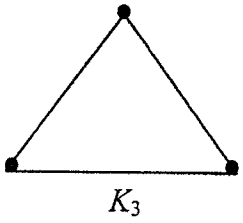


Derajat maksimum titik graf G adalah 4. Indeks khromatiknya adalah 6.

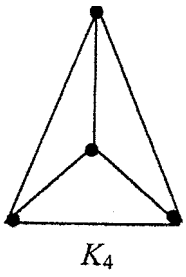
Untuk graf lengkap K,, mempunyai sifat khusus mengenai indeks khromatiknya. Perhatikan beberapa contoh graf lengkap berikut ini.



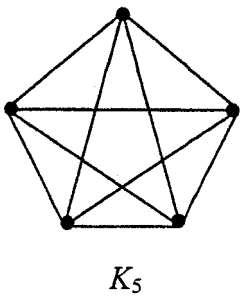
$\chi'(k_2) = 1$



$\chi'(k_3) = 3$



$\chi'(k_4) = 3$



$\chi'(k_5) = 5$

Hubungan antara banyaknya titik graf lengkap dan indeks khromatik untuk graf itu dapat dirumuskan dalam Teorema 6.14 berikut ini.

Teorema 6.14

$\chi'(K,_n) = n$, jika n ganjil dan n > 1.

$\chi'(K_n) = n - 1$, jika n genap.

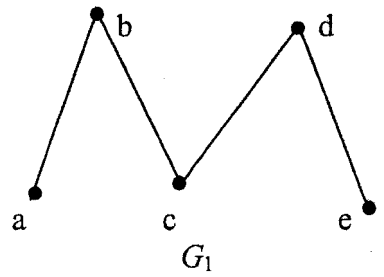
Contoh 6.29

$\chi'(K_5) = 5$; $\chi'(K_6) = 5$; $\chi(K_7) = 7$; $\chi(K_8) = 7$.

Teorema 6.15

Jika G adalah graf sederhana bipartit yang derajat maksimum titiknya ($d(G)$) adalah m, makes $\chi'(G) = m$.

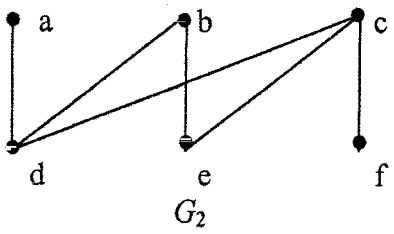
Contoh 6.30



G_1

$\Delta(G_1) = 2$

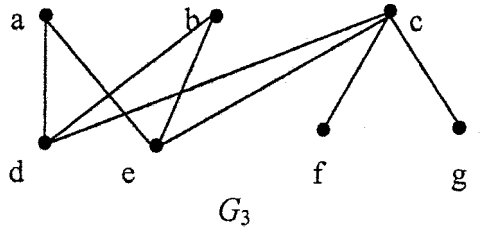
$\chi'(G_1) = 2$



G_2

$\Delta(G_2) = 3$

$\chi'(G_2) = 3$



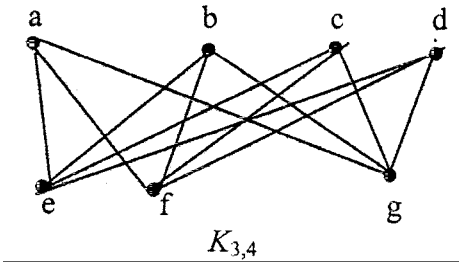
G_3

$\Delta(G_3) = 4$

$\chi'(G_3) = 4$

Berdasarkan Teorema 6.15 di atas, dapat disimpulkan bahwa $\chi'(K_{p,t}) = max\ (p,t)$. $K_{p,t}$ adalah lambang untuk graf bipartit lengkap, yang himpunan titiknya terpisah menjadi himpunan pertama terdiri atas p titik dan himpunan kedua terdiri atas t titik. Tanda max (p,t) menyatakan yang terbesar di antara p dan t.

Contoh 6.31



$K_{3,4}$

p = 3
t = 4

$\chi'(K_{3,4}) = \max(3,4) = 4$

J. Uji Kompetensi

I. Pilihlah salah satu jawaban yang tepat dengan memberi tanda silang (*X*) pada huruf A, B, C, atau D di muka jawaban yang tersedia.

1. Sebuah pohon mempunyai dua titik berderajat 2, sebuah titik berderajat 3 dan tiga titik berderajat 4. Banyaknya titik berderajat satu adalah
   A. 7
   B. 8
   C. 9
   D. 10
2. Suatu kompetisi sepakbola melibatkan 16 kesebelasan. Apabila kompetisi tersebut dilakukan dengan cara sistem gugur (kesebelasan yang kalah tidak bertanding lagi), berapa banyak pertandingan untuk menentukan juara pertama?
   A. 12 kali
   B. 15 kali
   C. 16 kali
   D. 18 kali
3. Banyaknya lintasan (*path*) sederhana yang panjangnya bukan nol pada pohon yang memiliki *n* titik dengan $n > 2$ adalah
   A. $(n(n-1))/2$
   B. $(n(n-1))/3$
   C. $n(n-1)$
   D. $2n(n-1)$
4. Pernyataan yang benar adalah
   A. Jika *T* pohon, maka untuk setiap dua titik *u* dan v yang berbeda di *T* terdapat lebih dari satu lintasan (*path*) yang menghubungkan kedua

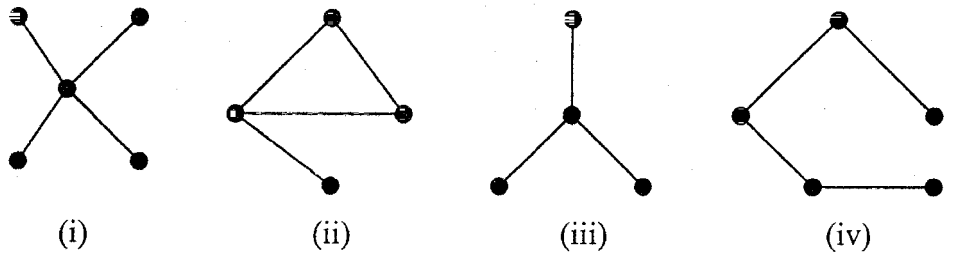
titik tersebut.

B. Jika *T* pohon, maka $|V(T)| = |E(T)| - 1$

C. Pohon adalah suatu graf yang tidak memiliki siklus (sirkit)

D. Jika.e sebuah sisi pada graf G maka $\tau(G) = \tau(G\text{-}e) + \tau(G.e)$.

5. Graf lengkap dengan 4 titik mempunyai …
   A. 8 pohon pembangun
   B. 16 pohon pembangun
   C. 20 pohon pembangun
   D. 24 pohon pembangun
6. Perhatikan graf pada gambar dibawah ini.

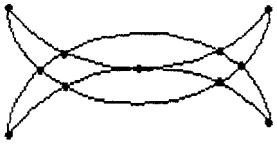


   Yang bukan merupakan pohon adalah graf pada gambar
   A. (i)
   B. (ii)
   C. (iii)
   D. (iv)
7. Banyaknya sisi pada pohon dengan 21 titik adalah
   A. 20 buah
   B. 21 buah
   C. 22 buah
   D. tidak tentu

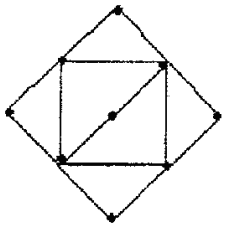
II. Kerjakan setiap soal berikut ini

1. Carilah jejak Euler atau jejak terbuka Euler, jika ada, pada keempat graf berikut:

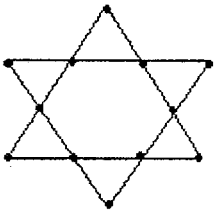
   (a)



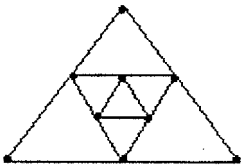
(b)



(c)

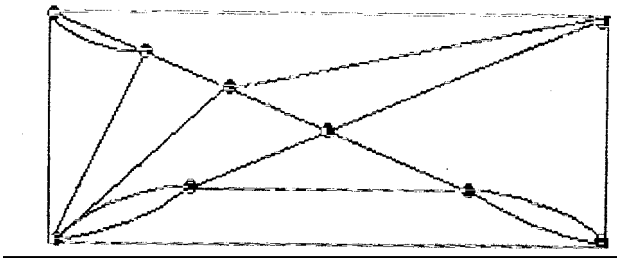


(d)

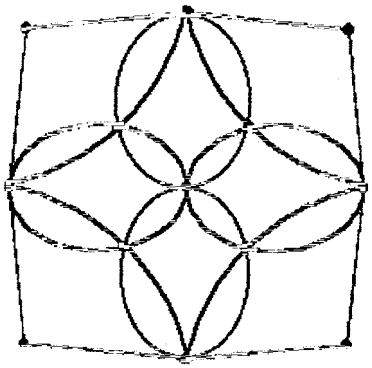


2. Andaikan denah suatu bangunan yang terdiri dari 5 ruangan dan 18 pintu diberikan seperti pada gambar berikut. Dapatkah seorang anak melintasi setiap pintu hanya satu kali saja dan kembali ke ruangan semula ketika is berangkat?

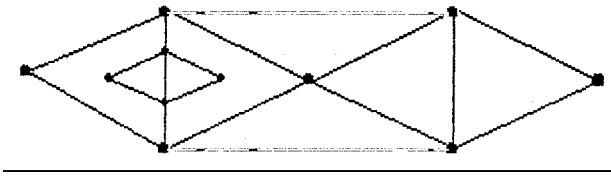
3. Graf pada gambar berikut merupakan suatu model jalan yang dapat dilewati pengunjung suatu pameran lukisan dalam sebuah gedung. Pintu masuk dan keluar gedung adalah pada lokasi M. Dapatkah anda menyusun petunjuk dalam bentuk tanda-tanda panah sehingga pengunjung yang mengikuti petunjuk itu diharapkan tidak melihat lukisan yang sama lebih dari satu kali.



4. Tugas pengantar surat pos ialah menyebar surat-surat ke alamat tujuan di seluruh kota dengan berawal dan berakhir dari kantor pos induknya. Naluri cenderung tidak ingin melintasi kembali j alan yang pernah dilaluinya hanya sekedar untuk mencapai tempat lain dan tujuan yang belum selesai. Dapatkah anda menyusun trayek perjalanan yang diharapkan pak pos ini dari kantor pos yang berlokasi di P apabila model grafnya seperti berikut.

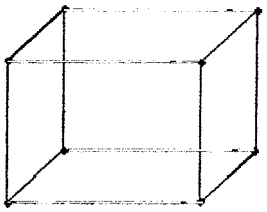


5. Carilah empat siklus yang sisi-sisinya saling lepas dari graf gambar berikut.

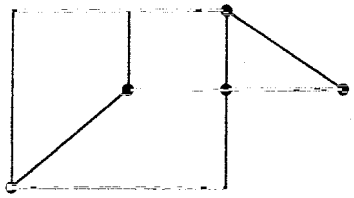


6. Tentukan *m* dan *n* agar $K_{m,n}$ dan K_n merupakan graf Euler.
7. Periksalah apakah graf-graf pada gambar berikut ini merupakan graf Hamilton atau semi-Hamilton atau bukan keduanya?

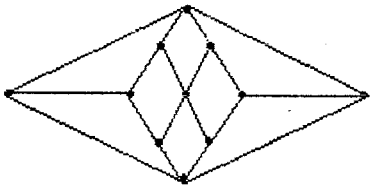
   (a)



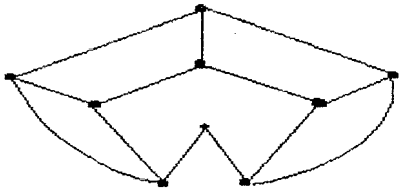
(b)



(c)

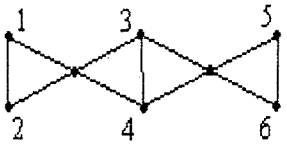


(d)

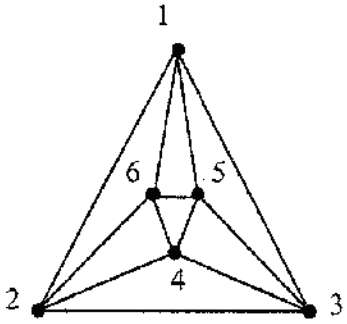


8. Berikan contoh graf dengan jejak Euler identik dengan sirkit Hamilton.
9. Periksalah apakah graf-graf pada gambar berikut merupakan graf Euler atau graf Hamilton, atau keduanya. Berikan pula jejak Euler dan sirkit Hamilton jika dimungkinkan.

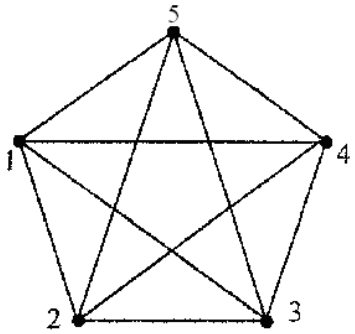
   (a)



   (b)



(c)



10. Perhatikan Tabel 1 mengenai matriks siswa dan bidang studi berikut ini.

Tabel 1

Matriks Siswa dan Bidang Studi

	A	B	C	D	E
1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0
4	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	0	0	1
7	1	0	1	0	0
8	0	0	1	1	0

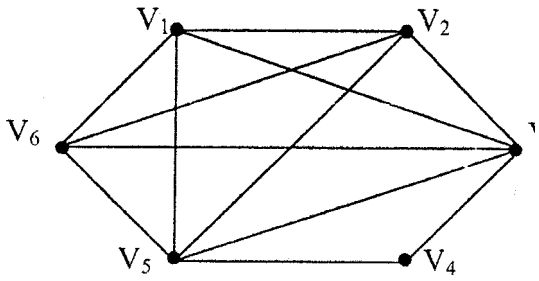
Tabel tersebut menunjukkan matriks tentang lima bidang studi (dilabel dengan abjad) yang dipilih oleh delapan orang siswa (dilabel dengan angka). Angka I diisikan sebagai elemen (i, j) matriks itu, jika siswa i memilih bidang studi j. Sedangkan angka 0 diisikan sebagi elemen (i, j), jika siswa i tidak memilih bidang studi j.

Contoh : siswa 1 memilih bidang studi B dan E karena elemen (1,B) dan

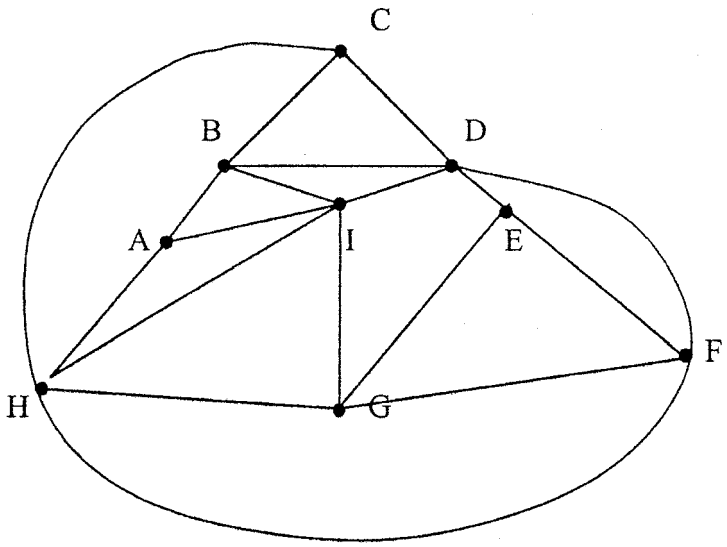
(1,E) adalah 1.

Dari tabel di atas, tentukan banyak jadwal ujian yang dapat dibuat sedemikian rupa sehingga semua siswa dapat mengikuti ujian bidang studi itu tanpa ada kesulitan waktu (kesulitan terjadi jika ada siswa yang harus mengikuti ujian dua bidang studi atau lebih pada waktu yang bersamaan).

11. Berapa bilangan khromatik graf berikut?



12. Tentukan bilangan khromatik graf berikut.



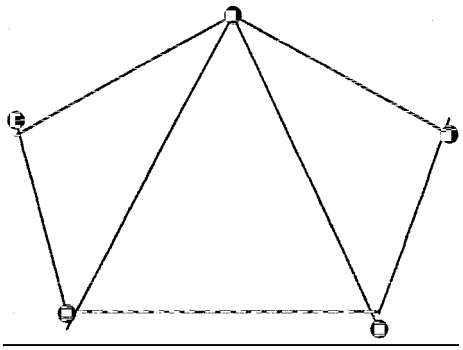
13. Ada 6 jenis zat kimia yang perlu disimpan di gudang. Beberapa pasang dari zat itu tidak dapat disimpan di tempat yang sama, karena campuran gasnya bersifat eksflosif. Untuk zat-zat semacam itu perlu dibangun ruang-ruang terpisah yang dilengkapi ventilasi dan penyedot udara keluar yang berlainan. Jika lebih banyak ruang dibutuhkan, berarti lebih banyak ongkos yang dikeluarkan. Karena itu perlu diketahui berapa banyak minimum ruangan yang diperlukan untuk dapat menyimpan

semua zat kimia itu dengan aman. Berikut ini adalah daftar pasangan zat kimia yang tidak dapat disimpan di tempat yang sama.

Zat Kimia	tidak dapat bersama dengan zat kimia
A	B,D
B	A, D, E, F
C	E
D	A, F
E	B, C
F	B,D

Berapa banyak minimum ruangan berbeda untuk menyimpan semua zat kimia itu secara aman?

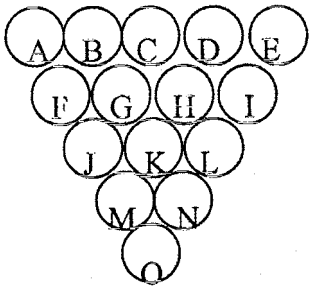
14. Berapa banyak macam pohon dengan 6 titik?
15. Carilah banyaknya pohon pembangun |(G) jika graf G dilukiskan sebagai berikut:



16. Buktikan bahwa
    a. Setiap pohon adalah graf bipartit.
    b. Jika G adalah graf sederhana, |E(G)| = ε dan |V(G)| = v, maka

$$\varepsilon \leq \frac{v(v-1)}{2}$$

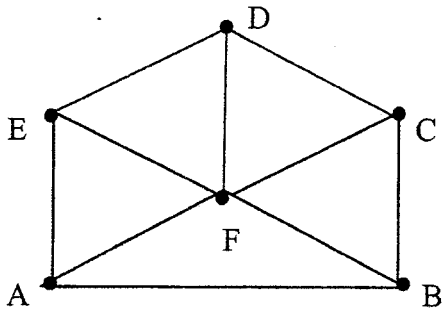
17. Susunlah model graf untuk mewarnai 15 bola sodok sehingga bola - bola itu disusun seperti berikut.



18. Sekolah n Harapan Bangsan merencanakan seminar pendidikan matematika bagi anak-anak. Ada enam pembicara yang masing-masing akan tampil selama satu jam. Seandainya setiap pembicara tampil dalam kesempatan yang berbeda, kegiatan tersebut akan memakan waktu terlalu lama. Akan tetapi jugs tidak diharapkan pembicara-pembicara tertentu tampil pada saat yang bersamaan. Pimpinan sekolah menghendaki seminar ini berlangsung tidak lebih dari empat babak. Bagaimanakah kegiatan ini dijadwalkan jika pembicara-pembicara yang sebaiknya tidak tampil pada saat yang bersamaan ditandai dengan n*n pada tabel berikut.

Nama pembicara	A	B	C	D	E	F
A		*	*			
B			*		*	*
C					*	*
D						*
E						*

19. Berilah wama pada garis (sisi) graf berikut, kemudian tentukan indeks khromatiknya.



20. Jika G merupakan graf sederhana maka berlaku $\chi'(G) = \Delta(G)$ atau $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

21. **DAFTAR PUSTAKA**

22. Bondy, J.A and Murty, U.S.R. (1976). *Graph Theory with Application. USA:* American Elsev1er Publishing Co.

23. Brualdi, R.A. (1977). *Introductory Combinatorics.'North-Holland:* Elsev1er Science Publishing.

24. Bryant, V. (1993). *Aspects of Combinatorics.* New York: Cambridge University Press.

25. Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. New York: Dover Publication, Inc.

26. Harary, F. (1969). *Graph Theory*. Massachusetts: Addison - Wesley Publishing Company Tnc.

27. Liu, C.L. (1985). *Elements of Discrete Mathematics.* New York: McGraw-Hill B∞k Company.

28. Narsingh Deo. (1974). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science.* Engliw∞d: Prentice Hall, Inc.

29. Tucker, A. (1984). *Applied Combinatorics.* New York: John Wiley & Sons. Velleman, D.J. (1994). *How to Prove It.* New York: Cambridge University Press. Yaya, S.K. (1998). *Matematika Diskrit.* Bandung: IKIP Bandung Press.